§ 1 Die Topologie des $\mathbb{R}^n$

1.1. Intro (Grundlagen der Analysis: Konvergenz)

Bei der Analysis von Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}$] war eines der zentralen Hilfsmittel der Konvergenzbegriff im Definitionsbereich also in $\mathbb{R}$. In [1] haben wir uns ausführlich(st) mit der Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$ beschäftigt und darauf aufbauend in [2] die Stetigkeit von Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als einen der zentralen Begriffe untersucht.

Da unser Interesse nun Fkt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gilt müssen wir uns zunächst mit Fragen der Konvergenz im Ausgangsraum, also $\mathbb{R}^n$ befassen. Dies ist der Inhalt dieses § 1.

Zentraler Begriff für die Formulierung von Konvergenz & Stetigkeit auf $\mathbb{R}$ war der Betrag oder Abstand. Dasselbe gilt auch für die Konvergenz in $\mathbb{C}$ [vgl [2] 3.10] bzw die Konvergenz von Funktionenfolgen [vgl. [3] 1.13]. Wir beginnen daher unsere Untersuchungen mit einer genauen Analyse der Begriffe Abstand und Norm im $\mathbb{R}^n$.

Zuvor aber noch eine kleine Reminiszenz an den $\mathbb{R}^n$

1.2. VH aus der lin. Algebra & Ausblick (Der $\mathbb{R}^n$)

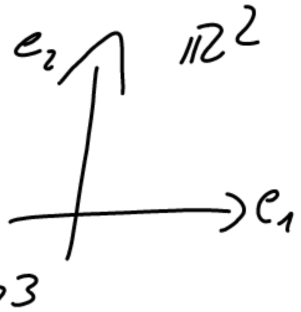
(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}^n$ – die Menge der n-Tupel reeller Zahlen $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1,\dots,x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ 1 \le i \le n\}$ –

Wir verwenden Zeilenvektoren & Spaltenvektoren synonym – also $x = (x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Grundkörper $\mathbb{R}$. D.h. wir haben die beiden Operationen Addition und Multiplikation mit einem Skalar (Zahl)

$$+: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad x+y = (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) := (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$
$$\cdot: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \lambda\cdot x = \lambda(x_1,\dots,x_n) := (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n),$$

die die einschlägigen Axiome erfüllen.



(ii) (Vorstellung und Anschauung)
Im Fall $n=2$ haben wir die Ebene $\mathbb{R}^2$ und im Fall $n=3$ den Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$

mit 2 bzw 3 linear unabhängigen Richtungen. Der $\mathbb{R}^n$ „funktioniert" völlig analog (beim „Rechnen" gibt es keinen Unterschied zwischen dem $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{R}^7$, $\mathbb{R}^{19}$ usw – es ist halt etwas mehr Arbeit) auch wenn wir uns keinen 7-dim Raum „vorstellen" können. Es handelt sich hier um eine große Stärke der Mathematik bzw der Abstraktion: Wir können formal ganz einfach im $\mathbb{R}^n$ arbeiten, ohne ihn uns vorstellen zu müssen. Außerdem gibt uns unsere 3-d Anschauung eine ganz gute Stütze im $\mathbb{R}^n$.

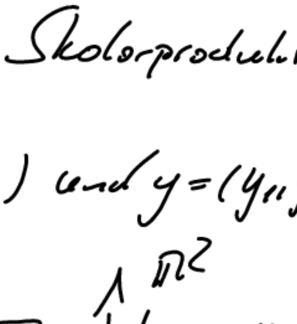
(iii) (Zwei verschiedene $\mathbb{R}^n$'s?)

Während die lineare Algebra vorwiegend an der lin. Struktur des $\mathbb{R}^n$ (d.h. an seiner Struktur als VR und an linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) interessiert ist — Ja klar, in der lin. Alg. dreht sich ja alles um das Lösen lin. Gleichungssysteme — ist die Analysis an allgemeinen (d.h. vorwiegend nicht-linearen) Abb $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ interessiert und an Fragen der Stetigkeit/Diffb. solcher Abb und daher an Fragen der Konvergenz im $\mathbb{R}^n$. Wegen dieser völlig unterschiedlichen Herangehensweisen könnte man oft glauben, es gäbe zwei $\mathbb{R}^n$'s: den der lin Alg & den der Analysis... Dem ist natürlich nicht so ;D

1.3 FAKTENSAMMLUNG/WH aus der lin. Alg (Abstand, Norm Skalarprodukt)

(i) Abstände im $\mathbb{R}^n$: Im $\mathbb{R}^2$ [und $\mathbb{R}^3$] ist der Abstand zwischen 2 Punkten $x=(x_1,x_2)$ und $y=(y_1,y_2)$ gemäß Pythagoras definiert als

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$



Wir nennen d den Euklidischen Abstand oder die Euklidische Metrik und definieren in völliger Analogie

$$d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

$$d(x,y)=\|x-y\|:=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$$

Die Metrik hat die 3 Grundeigenschaften ($x,y,z\in\mathbb{R}^n$)

(M1) $d(x,y)\geq 0$ und $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ (positiv definit)

(M2) $d(x,y)=d(y,x)$ (symmetrisch)

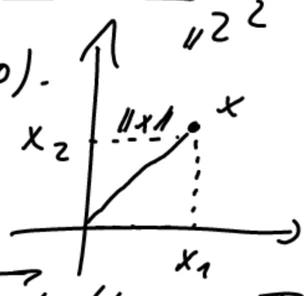
(M3) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ (Δ-Ungl.)

Die Eigenschaften (M1)–(M3) sind leicht aus der Def. zu zeigen und sind intuitiv genau das, was wir uns von einem vernünftigen Abstandsbegriff erwarten.

(ii) Euklidische Norm: Wie in der Notation angedeutet wird d mit Hilfe der sog. Euklidischen Norm ausgedrückt. Diese ist definiert als

$$\|\ \|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$
$$\|x\|=\|(x_1,\dots,x_n)\|:=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

Klarerweise gilt $d(x,y)=\|x-y\|$ bzw $\|x\|=d(x,0)$.



Die Norm hat die 3 Grundeigenschaften ($x,y\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$)

Nullvektor $(0,\dots,0)$

(N1) $\|x\|\geq 0$ und $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$ (pos. definit)

(N2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ (homogen)

(N3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (Δ-Ungl.)

Diese sind ebenso leicht zu zeigen wie (M1)–(M3) und „fangen" unser intuitives Verständnis des Begriffs „Länge eines Vektors" ein.

(iii) (Standard-) Skalarprodukt. Auf $\mathbb{R}^n$ ist das sog. Standard-Skalarprodukt definiert

$$\boxed{\begin{aligned} &\langle\ |\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\langle x|y\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{aligned}}$$

Sein Zusammenhang mit der Norm ist offensichtlich

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

und daher

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y|x-y\rangle}.$$

Das SP hat die 3 Grundeigenschaften $(x,y,z\in\mathbb{R}^n;\ \lambda,\mu\in\mathbb{R})$

(SP1) $\langle x|x\rangle \geq 0$ und $\langle x|x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pos. definit)

(SP2) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$ (symmetrisch) nicht: definiert

(SP3) $\langle \lambda x+\mu y|z\rangle = \lambda\langle x|z\rangle + \mu\langle y|z\rangle$ (bilinear)
$\langle x|\lambda y+\mu z\rangle = \lambda\langle x|y\rangle + \mu\langle x|z\rangle$ linear in jedem Faktor

die ebenso leicht zu beweisen ist, wie die sog.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle x|y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$$

(iv) Allgemein dreht man den Spieß um und definiert eine Metrik, eine Norm & ein Skalarprodukt über die jeweiligen Grundeigenschaften – damit hat man allgemeine Begriffe geschaffen, die sich so verhalten wie ein „anständiger" Abstand, eine „vernünftige" Länge bzw ein „sinnvolles" SP. Jetzt offiziell

das ist das Wesen der Abstraktion

AUF FOLIE VORGETRAGEN

1.4 DEF (Metrik, Norm, Skalarprodukt)

(i) Sei M eine Menge und $d: M\times M \to \mathbb{R}$ eine Abb mit (M1)–(M3), dann nennen wir d eine Metrik auf M und das Paar (M,d) einen metrischen Raum

(ii) Sei V ein VR über $\mathbb{R}$ [oder $\mathbb{C}$] und $\|\ \|: V \to \mathbb{R}$ eine Abb mit (N1)–(N3), dann nennen wir $\|\ \|$ eine Norm auf V und das Paar $(V,\|\ \|)$ einen normierten VR

(iii) Sei V ein VR über $\mathbb{R}$ und $\langle\ |\ \rangle: V\times V \to \mathbb{R}$ eine Abb. mit (SP1)–(SP2), dann nennen wir $\langle\ |\ \rangle$ ein SP auf V und das Paar $(V,\langle\ |\ \rangle)$ einen Euklidischen VR

[Im Falle eines $\mathbb{C}$-VR muss man die Bilinearität & die Symmetrie geeignet anpassen: $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$
$\langle x|\lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x|y\rangle$]

1.5 Bsp (Metrische Raum (MR), Normierte VR (NVR), Eukl. VR (EVR))

(i) Natürlich ist $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-SP / Eukl. Norm / Eukl. Metrik ein EVR / NVR / MR.

[EMA, 6.4.12]

(ii) $(\mathbb{R}, |\,|)$ ist ein NVR und mit $d(x,y) := |x-y|$ ein MR

(iii) $(\mathcal{C}[a,b], \|\,\|_2)$ ist ein NVR, die reellwertigen Fkt in $\mathcal{C}[a,b]$ mit $\langle\,|\,\rangle$ bilden einen EVR. [vgl. 15] §4]

(iv) $(\mathcal{C}[a,b], \|\,\|_\infty)$ ist ein NVR.

1.6. Bem (Begriffe & Hierarchie – zum Ersten)

AUF FOLIE

(i) Die Begriffe MR, NVR dienen dazu allgemein „Räume" mit „Abstands-" bzw „Längenbegriffen" zu studieren. Es zeigt sich, dass man auf diesen Räumen weitgehend analog zum $\mathbb{R}^n$ Analysis betrieben werden kann. Viele Analysis-Bücher formulieren die mehrdimensionale Differentialrechnung in diesem Rahmen (z.B [Heuser], [Forster]).

(ii) Es besteht folgende Hierarchie zwischen EVR, NVR und MR.

∘) Aus jedem EVR $(V, \langle\,|\,\rangle)$ wird vermöge der Definition

$$\|x\| := \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

ein NVR [(N1)–(N3) folgen leicht aus (SP1)–(SP3) bzw aus der CS-Ugl. Diese wiederum folgt aus (SP1)–(SP3); vgl. [EMA, 7.4.15 bzw 7.2.40 und 7.4.16 bzw 7.3.40]]

AUF FOLIE VORGETRAGEN

•) Aus jedem NVR $(V, \| \, \|)$ wird vermöge der Def

$$d(x,y) := \|x-y\|$$ (vgl. [EMA 7.4.18 bzw 7.3.42])

ein MR [(M1)−(M3) folgen leicht aus (N1)−(N3)].

•) Die „Umkehrungen" sind jeweils nicht i.A. möglich. Es gibt MR die keine NVR sind [sie brauchen ja nicht einmal VR zu sein!] und es gibt NVR, die keine EVR sind; im Überblick

$$\begin{tikzcd}
\boxed{EVR} \arrow[d, "\|\,\| := \sqrt{\langle\,\rangle}"] \arrow[d, phantom, shift right=10ex, "\not\uparrow"] & & \text{speziell} \arrow[dd, squiggly] \\
\boxed{NVR} \arrow[d, "d(.,.) := \|.-.\|"] \arrow[d, phantom, shift right=10ex, "\not\uparrow"] & & \\
\boxed{MR} & & \text{allgemein}
\end{tikzcd}$$

Das genauere Studium dieser Begriffe ist Grundlage der Topologie bzw Funktionalanalysis.

1.7 BEM (Der $\mathbb{R}^n$ als NVR)

(i) Auf $\mathbb{R}^n$ lassen sich außer der Eukl. Norm auch andere Normen (und damit Metriken vgl. 1.6) definieren. Beispiele sind

•) $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (die 1-Norm)

•) bzw. allgemeiner $(1 \le p < \infty)$

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad \text{(p-Norm)}$$

mit dem Spezialfall $\|\ \|_2$ = Eukl. Norm und

•) $$\|x\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x_i| \qquad (\infty\text{-Norm})$$

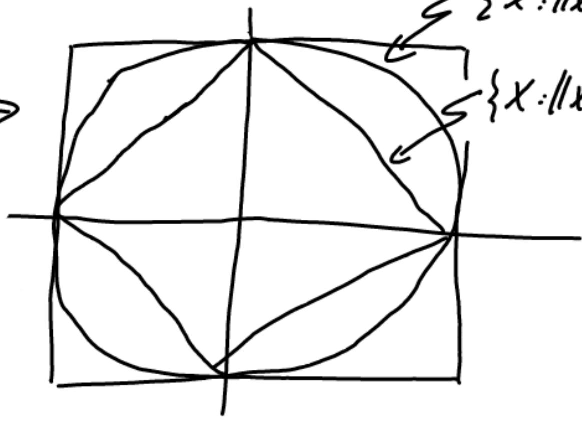
(ii) Es ergeben sich damit jeweils andere „Abstandsmessungen" im $\mathbb{R}^n$, die für gewisse Zwecke sehr brauchbar sind.

Am Bsp des $\mathbb{R}^2$ können wir z.B. die Einheitskugeln (d.h. die Menge der Vektoren der Länge 1) bzgl. verschiedener Normen skizzieren.

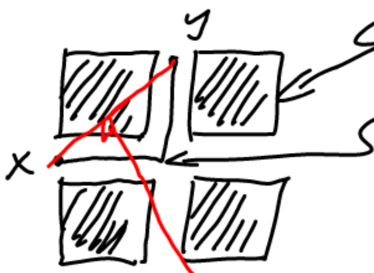
$\{x : \|x\|_2 = 1\}$

$\{x : \|x\|_1 = 1\}$

$\{x : \|x\|_\infty = 1\}$



Die $\|\ \|_1$ ist z.B. zum Messen von „Entfernungen" in amerikanischen Städten viel besser geeignet als $\|\ \|_2$:



Häuserblock

$\|y-x\|_1 = |y_1-x_1| + |y_2-x_2|$ entspricht dem Weg den man gehen kann

$\|y-x\|_2 = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2}$ ist zwar der „natürliche Abstand", aber so kann man nicht gehen...

VORGETRAGEN AUF FOLIE

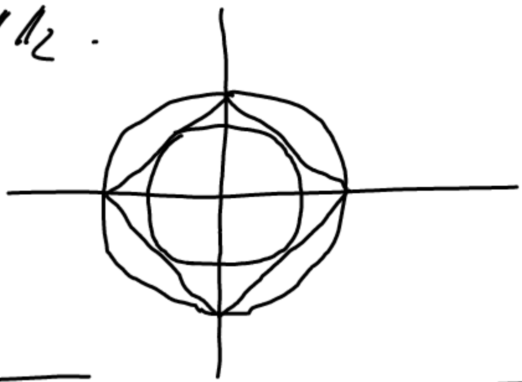
AUF FOLIE VORGETRAGEN

(iii) Zum Glück für die Analysis sind alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent, d.h. genauer gilt der folgende Satz [z.B. Heuser 2, 109.6]

Seien $\|\ \|_a$ und $\|\ \|_b$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$, dann $\exists\, C_1, C_2 > 0$ sodass

$$C_1\|x\|_a \le \|x\|_b \le C_2 \|x\|_a$$

[Anschaulich bedeutet der Satz, dass man die Einheitskugeln bzgl der verschiedenen Normen schachteln kann – was ja graphisch evident ist, z.B. für $\|\ \|_1$ und $\|\ \|_2$.



Der Satz gilt im übrigen in jedem endl. dim NVR]

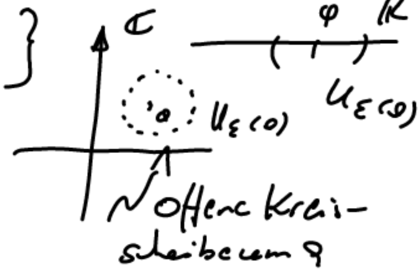
(iv) Wir können daher in Zukunft den $\mathbb{R}^n$ mit vollem Recht als NVR mit $\|\ \|_2$ oder EVR mit $\langle\,|\,\rangle$ studieren – Wenn wir eine beliebige andere Norm heranziehen würden, erhielten wir nämlich genau dieselbe Konvergenz und damit dieselbe Analysis.

(v) In unendlichdim. VR führen verschiedene Normen i.A. zu verschiedenen Konvergenzbegriffen – siehe etwa $\|f\|_\infty$, $\|f\|_2$ in [5] §1, §4.

1.8 Motivation (Grundlagen der Konvergenz)

Wir haben den Konvergenzbegriff in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ auf den Begriff der ε-Umgebung aufgebaut – zur Erinnerung

- in $\mathbb{R}$ $\quad U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$
- in $\mathbb{C}$ $\quad U_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \varepsilon\}$



und $x_n \to a$ falls die x_n schließlich in jeder ε-Umgebung von a liegen.

Im $\mathbb{R}^n$ werden wir den Konvergenzbegriff ebenso auf die ε-Umgebungen stützen. Diese sind in Analogie als offene n-dim Kugeln definiert; offiziell

1.9 DEF (ε-Umgebungen im $\mathbb{R}^n$)

Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir die ε-Umgebung von a als

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < \varepsilon\}$$

1.10 Motivation (Umgebung – offene/abg. Mengen)

Wir haben es in der Analysis auf $\mathbb{R}$ oft mit offenen bzw. abg. Intervallen zu tun gehabt – wobei es für viele Sätze essentiell war, ob das zugrundeliegende Intervall offen oder abg. war.

Die essentielle Eigenschaft offener Intervalle (a,b) bzw. abg. Intervalle $[a,b]$ – nämlich, dass der „Rand" $\{a,b\}$ nicht bzw. schon dazugehört – wollen wir nun auf beliebige Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Natürlich ist hier der „Rand" i.A. viel komplizierter und wir können ihn nicht leicht explizit angeben. Wir formalisieren diese Begriffe daher ebenfalls mittels ε-Umgebungen.

1.11 DEF (Umgebung, offene & abg Menge)

(i) Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Umgebung von a, falls

$$\exists \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(a) \subseteq U$$

Es gibt eine ε-Schutzkugel um a, die ganz in U liegt.

(ii) Eine Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls V Umgebung aller ihrer Punkte ist, d.h.

$$\forall x \in V \ \ \exists \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(x) \subseteq V$$

Jeder Pkt besitzt eine ε-Schutzkugel, die ganz in V liegt.

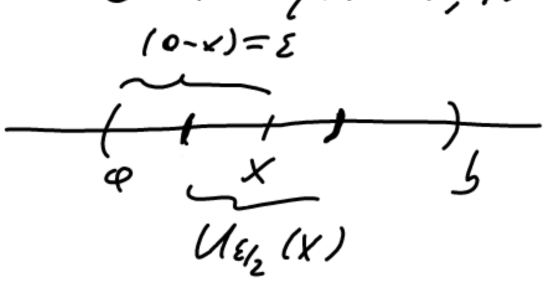
(iii) Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ offen ist.

1.12 BSP (offene & abg Mengen)

(i) Offene Intervalle (a,b) sind offen. (daher der Name?)

Denn sei $x \in (a,b)$ dann setze $\varepsilon = \min\{|x-a|, |x-b|\}$

$\Rightarrow U_{\varepsilon/2}(x) \subseteq (a,b)$



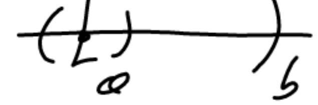
Aus demselben Grund sind die Intervalle der Form $(-\infty, b)$ bzw (a, ∞) offen.

(ii) Abgeschlossene Intervalle $[a,b]$ sind abg. (oh Wunder!)
Denn $[a,b]^c = (-\infty,a) \cup (b,\infty)$ ist offen

Ebenso sind Intervalle der Form $[a,\infty)$ und $(-\infty,b]$ abgeschlossen, denn $[a,\infty)^c = (-\infty,a)$ und $(-\infty,b]^c = (b,\infty)$ sind offen

(iii) Halboffene Intervalle sind weder offen noch abg. Tatsächlich

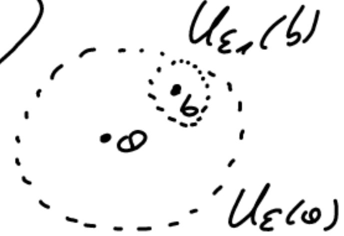
- $[a,b)$ ist nicht Umgebung von a



$\nexists \varepsilon : U_\varepsilon(a) \subseteq [a,b)$

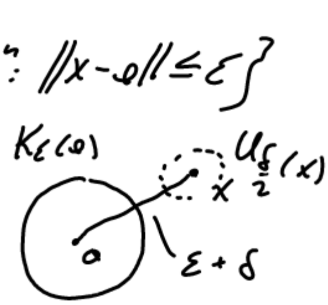
- $[a,b)^c = (-\infty,a) \cup [b,\infty)$ ist nicht offen [es ist keine Umgebung von b]

(iv) ε-Umgebungen sind offen. folgt aus der Δ-Ungl.



Sei nämlich $b \in U_\varepsilon(a)$ beliebig
$\Rightarrow \|b-a\| < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon_1 := \varepsilon - \|b-a\| > 0 \quad (*)$
Wir zeigen, dass $U_{\varepsilon_1}(b) \subseteq U_\varepsilon(a)$. Sei dazu $x \in U_{\varepsilon_1}(b)$.
Es gilt $\|x-a\| \overset{(N3)}{\leq} \|x-b\| + \|b-a\| < \varepsilon_1 + \|b-a\| \overset{(*)}{=} \varepsilon$
und daher $x \in U_\varepsilon(a)$ und da x beliebig war $U_{\varepsilon_1}(b) \subseteq U_\varepsilon(a)$.

(v) Abgeschlossene Kugeln ($a \in \mathbb{R}$) $K_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \leq \varepsilon\}$ sind abg. [Beweis durch Zeichnung, oder



sei $x \in K_\varepsilon(a)^c = \{x : \|x-a\| > \varepsilon\} \Rightarrow \|x-a\| = \varepsilon + \delta \ (\delta > 0)$
dann gilt $U_{\delta/2}(x) \subseteq K_\varepsilon(a)^c$, denn für $y \in U_{\delta/2}(x)$
gilt $\|a-y\| = \|a-x+x-y\| \geq \|a-x\| - \|x-y\| \geq \varepsilon + \delta - \frac{\delta}{2} = \varepsilon + \frac{\delta}{2} > \varepsilon$]
verkehrte Δ-Ungl [UE]

(vi) Die Extremfälle: $\mathbb{R}^n$ und $\emptyset$ sind offen & abg.

$\mathbb{R}^n$ ist offen, da klarerweise Umgebung jedes seiner Pkte und daher ist $\emptyset = \mathbb{R}^c$ abgeschlossen.
Die leere Menge $\emptyset$ ist auch Umgebung aller ihrer Pkte [das ist ein Trick - sie hat ja gar keinen Pkt & so ist nichts zu zeigen] und daher ist $\emptyset$ offen und $\mathbb{R}^n = \emptyset^c$ abg.

1.13 WARNUNG (Offen ist nicht das „Gegenteil" von abg. !!!)

Ein beliebtes Missverständnis ist es zu glauben, dass abg. das „Gegenteil" von offen ist — also dass eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ entweder offen oder abgeschlossen ist.
Das ist aber nicht wahr, denn es gibt Mengen

- die offen & abgeschlossen sind — nämlich $\mathbb{R}^n$ und $\emptyset$, siehe 1.12 (vi) [das sind aber die einzigen TM von $\mathbb{R}^n$ mit dieser Eigenschaft]
- die weder offen noch abg sind — z.B. $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$ oder etwa eine Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$, wo der obere Rand dazugehört & der untere nicht.

1.14 PROP (Grundeigenschaften von Umgebungen & offenen Mengen)

Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Es gilt

(i) U Umgebung von a, $V \supseteq U \Rightarrow V$ Umgebung von a

(ii) U_1, U_2 Umgebungen von $a \Rightarrow U_1 \cap U_2$ Umgebung v. a

(iii) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

also auch von überabz.-vielen

(iv) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Beweis (i) klar per Def

(ii) dito klar per Def

(iii) [einfaches Hantieren mit den Begriffen]

Seien $(U_i)_{i\in I}$ offene Mengen wobei I eine beliebige Indexmenge ist [I kann überabzählbar ∞ sein!]

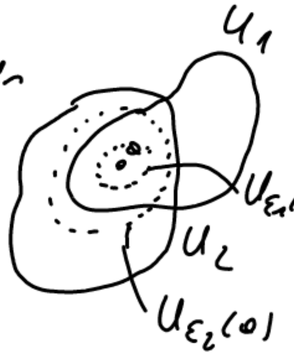
Sei $a\in\bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i\in I: a\in U_i$

U_i offen $\Rightarrow \exists\varepsilon>0\ U_\varepsilon(a)\subseteq U_i \Rightarrow U_\varepsilon(a)\subseteq\bigcup_{i\in I}U_i$

Es gibt ja schon eine ε-Sicherheitskugel um a in einem U_i, daher erst recht in $\bigcup U_i$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I}U_i$ offen

(iv) [ebenfalls...] Seien $U_1,\dots,U_l\subseteq\mathbb{R}^n$ offene Mengen



$a\in\bigcap_{i=1}^{l} U_i \Rightarrow a\in U_i\ \forall 1\le i\le l$

U_i offen $\Rightarrow \forall 1\le i\le l\ \exists\varepsilon_i>0: U_{\varepsilon_i}(a)\subseteq U_i$

Setze $\varepsilon:=\min_{1\le i\le l}\varepsilon_i \Rightarrow U_\varepsilon(a)\subseteq U_i\ \forall 1\le i\le l$

$\Rightarrow U_\varepsilon(a)\subseteq\bigcap_{i=1}^{l}U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{l}U_i$ offen]

1.15 BEM & WARNUNG (Durchschnitte & Vereinigung offener & abg. Mengen)

(i) Mittels der De Morganschen Regeln [EMA 4.1.28] ergibt sich aus 1.14 (iii)(iv) sofort

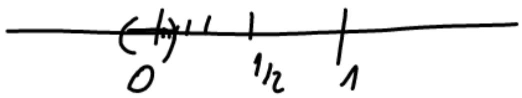
- •) Beliebige Durchschnitte abg. Mengen sind abg.
- •) Endliche Vereinigungen abg. Mengen sind abg.

[Tatsächlich: $(A_i)_{i\in I}$ abg $\Rightarrow \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c \overset{\text{De Morgan}}{=} \underbrace{\underbrace{\bigcup_{i\in I} A_i^c}_{\text{offen nach Def}}}_{\text{offen nach 1.14 (iii)}}$ offen $\Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i$ abg

analog für $\bigcup_{i=1}^n A_i$]

(ii) Die jeweils andere Kombination ist falsch:

- •) Beliebige Durchschnitte offener Mengen sind i.A. nicht offen, denn z.B
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\} \text{ ist abg } \left[\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,\infty) \text{ ist offen }\right]$$
- •) Daher sind wiederum nach De Morgan beliebige Vereinigungen abg. Mengen i.A. nicht abg. Ein explizites Gegenbsp ist etwa
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{n}\right\} \text{ ist nicht abg, denn } \left(\bigcup \left\{\frac{1}{n}\right\}\right)^c$$
ist nicht offen – es enthält kein $U_\varepsilon(0)$



1.16 AUSBLICK (Topologie)

(i) (ε-Umgebungen sind ein metrisches Konzept)

Unsere bisherigen Überlegungen zu offenen & abg. Mengen basieren auf dem Konzept der ε-Umgebung. Dieses ist ein metrisches Konzept – soll heißen es ist in MR definierbar [tatsächlich haben wir nur $\|x-a\|$ verwendet und wir hätten genauso gut schreiben können
$$U_\varepsilon(a) = \{x : d(x,a) < \varepsilon\} \quad]$$

und wir werden im weiteren unsere ganze Betrachtung von Konvergenz & Stetigkeit darauf aufbauen.

(ii) (Es geht aber noch allgemeiner – topologische Räume)

Tatsächlich kann man noch einen Verallgemeinerungsschritt draufsetzen und ohne Zuhilfenahme einer Metrik definieren, was eine offene Menge ist. Dazu bedient man sich wiederum des Tricks [vgl. 1.3(iv)] die Grundeigenschaften zur Definition zu erheben:

Sei M eine Menge. Eine Topologie $\mathcal{O}$ auf M ist ein System von Teilmengen von M (d.h. $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{P}M$, $\mathbb{P}M$ die Potenzmenge von M) mit den Eigenschaften

(O1) $M, \emptyset \in \mathcal{O}$

(O2) Sei I eine beliebige Indexmenge und $U_i \in \mathcal{O}\ \forall i \in I \implies \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$

(O3) Seien $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}$ $(n \in \mathbb{N}) \implies \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{O}$.

$\mathbb{R}^n, \emptyset$ offen vgl. 1.12(vii)

beliebige Verein. sind erlaubt vgl. 1.14(iii)

endl. Durchs. sind erlaubt vgl. 1.14(iv)

Das Paar $(M, \mathcal{O})$ heißt topologischer Raum und die Mengen in $\mathcal{O}$ heißen offene Mengen in $(M, \mathcal{O})$.

Diese Def ist tatsächlich an den Eigenschaften der offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ (vgl. 1.14(iii),(iv)) bzw in MR (vgl (i)) modelliert – die Mengen in $\mathcal{O}$ haben genau dieselben Eigenschaften wie die offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$ bzw in MR (vgl (i)).

(iii) (Topologie)

Das Studium top. Räume ist Inhalt des math. Teilgebiets der (mengentheoretischen) Topologie. Es zeigt sich, dass eine Theorie von Konvergenz & Stetigkeit in top. Räumen entwickelt werden kann – ohne Zuhilfenahme der Begriffe Metrik, Norm oder gar SP, rein unter Verwendung des Begriffs offene Mengen.

In diesem Sinne ist die Topologie jenes Teilgebiet der Mathematik, das den abstrakten Kern des Konvergenzbegriffs freilegt.

(iv) (MR & top. Räume)

Genauso wie man aus jedem EVR einen NVR und aus jedem NVR einen MR machen kann (vgl. 1.6(ii)) kann man aus jedem MR einen topologischen Raum machen.

Genauer, sei (M, d) ein MR, dann ist

U enthält um jeden Pkt eine ε-Schutzkugel

$$\Theta = \{U \subseteq M \mid \forall x \in M\ \exists \varepsilon\ U_\varepsilon(x) \subseteq U\}$$
$$= \{U \subseteq M \mid U \text{ offen im Sinne von } 1.11(ii)\}$$

eine Topologie auf M.
Es gibt aber viele top. Räume, deren Topologie nicht auf diese Weise von einer Metrik erzeugt wird.

(v) (Hierarchie der Begriffe – zum Zweiten)

Zusammen mit 1.6(ii) erhalten wir folgende Hierarchie von „Räumen."

speziell $\boxed{\text{EVR}}$ zusätzlich Orthogonalität (Orthonormalbasen etc...)

$\downarrow \quad \not\uparrow$

$\boxed{\text{NVR}}$ zusätzlich „Längenmessung" VR-Struktur

$\downarrow \quad \not\uparrow$

$\boxed{\text{MR}}$ zusätzlich „Abstandsmessung" Cauchy-Folge, glm. Konvergenz

$\downarrow \quad \not\uparrow$

allg. $\boxed{\text{top. Raum}}$ nur offene Mengen, Konvergenz, Stetigkeit

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ sind natürlich noch spezieller als EVR: $\mathbb{R}$ ist ein vollständiger Körper und $\mathbb{R}^n$ (bis auf Isomorphie) der einzige n-dim EVR.

(vi) (Abstraktion schön & gut – aber wozu)

Diese Frage beantwortet der folgende Textauszug von Michael Grosser:

[M. Grosser, Mathematik für Physik 4 (Funktionalanalysis); Auszug]

Besinnen wir uns auf eine der ursprünglichen Aufgaben der Mathematik in Anwendungssituationen, nämlich etwas „auszurechnen“, die Lösung eines in mathematische Ausdrucksweise übersetzten Problems zu ermitteln.

Besteht die Lösung in einem Zahlenwert, so ist es langfristig gesehen wenig sinnvoll, das gegebene Problem als einzelnes anzugehen: In den meisten Fällen wäre das zu schwierig oder insofern unrationell, weil man man beim nächsten Problem wieder von vorne weg zu überlegen beginnen müßte. Viel sinnvoller ist es, die Menge aller in Frage kommenden (reellen, komplexen) Zahlen mit den dort relevanten Rechenoperationen und Strukturen (Ordnung, Nähe und Distanz, Approximation) zu untersuchen und außerdem die Abbildungen dieser Menge (in einer gegebenen Gleichung entspricht ja jede Seite einer Funktion in der gesuchten Unbekannten) zu studieren. Das geschieht in der Analysis der Funktionen einer (reellen beziehungsweise komplexen) Variablen.

Analoges gilt, falls die Lösung in einem Zahlenvektor beziehungsweise in einem n-Tupel von Zahlen besteht: Wiederum bringt einen das endlose Studium von jeweils gegebenen Einzelfällen kaum weiter. Nützlicher ist es zum Beispiel im Falle linearer Gleichungssysteme, die allgemeine Lösbarkeit einschlägiger Probleme auf der Basis eines gründlichen Studiums endlichdimensionaler Vektorräume und linearer Abbildungen zu untersuchen. Im Falle nichtlinearer Gleichungen beziehungsweise Abbildungen müssen die Methoden der Analysis von Funktionen mehrerer Variabler herhalten.

Genauso stellt sich die Situation dar, wenn die Lösung eines Problems in einem noch „komplizierteren“ mathematischen Objekt wie etwa einer Folge oder einer Funktion besteht. Das ist unter anderem in den unzähligen Situationen der Fall, wo eine Differential- oder eine Integralgleichung gelöst werden muß (beispielsweise zur Ermittlung der Bahn eines Himmelskörpers, der Ausbreitung einer Erdbebenwelle, der Wellenfunktion eines quantenmechanischen Systems, der Schwingung einer Membran einer gewissen Gestalt und so weiter). In einer solchen Situation ist es noch viel schwieriger, eine einzelne Aufgabe in einem „singulären Gewaltakt“ zu lösen. Hier muß jeweils eine geeignete Gesamtheit von Funktionen, Folgen etc. mit den relevanten Strukturen (ein gewisser „Raum“) sowie die passende Art von Abbildungen zwischen solchen Räumen studiert werden. Diese Räume sind meist komplizierter als die vertrauten Räume $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ oder Teilmengen von diesen.

1.17 MOTIVATION (Zurück im Konkreten. Konvergenz im $\mathbb{R}^n$)

Nach unserem Ausflug in die Strukturtheorie kehren wir zu konkreten Dingen zurück: Konvergenz im $\mathbb{R}^n$. Wir beginnen die Terminologie für Folgen im $\mathbb{R}^n$ festzulegen.

1.18 TERMINOLOGIE (Folgen in $\mathbb{R}^n$)

Eine Folge in $\mathbb{R}^n$ (im Sinne von [1] Def 2.1) ist eine Abb

auch Vektorfolge

$$x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

und wir schreiben $x^{(k)} := x(k)$ bzw. $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ oder kürzer $(x^{(k)})_k$, $(x^{(k)})$ für die ganze Folge.

nicht $x_k := x(k)$ weil das spießt sich mit der Komponentenschreibweise

Jedes $x^{(k)}$ ist ja Element in $\mathbb{R}^n$ und wir schreiben

k-tes Folgenglied

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n, \ k \in \mathbb{N}.$$

1.–n-te Komponente des k. Folgenglieds

Die Folge $(x^{(k)})$ besteht also aus den n-stück Komponentenfolgen $(x_1^{(k)}), \dots, (x_n^{(k)})$, die alle reelle Folgen sind.

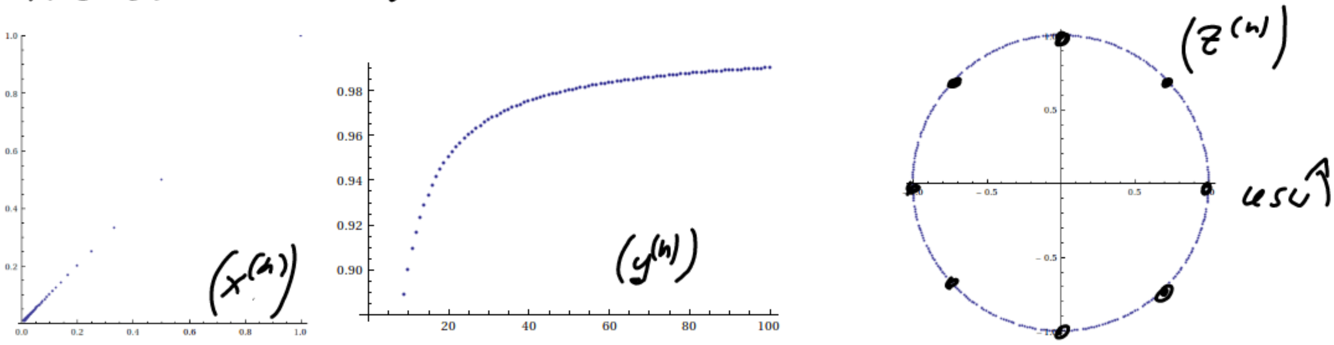
Eine Folge im $\mathbb{R}^n$ sind n-stück Folgen in $\mathbb{R}$

1.19 BSP (Folgen in $\mathbb{R}^n$ – Veranschaulichung)

(i) Bsp für Folgen im $\mathbb{R}^2$ sind etwa

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad y^{(n)} = \left(n, 1-\frac{1}{n}\right), \quad z^{(n)} = \left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

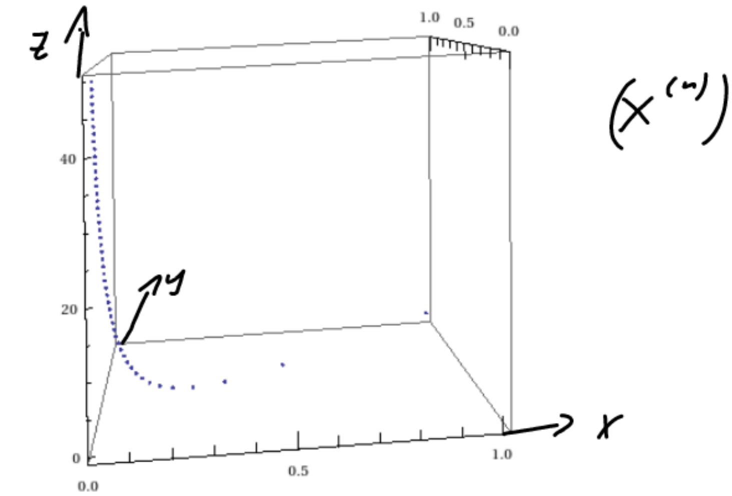
Diese können als Spaziergang im $\mathbb{R}^2$ (vgl. [1] 2.4) veranschaulicht werden:



(ii) Bsp für Folgen im $\mathbb{R}^3$ bzw $\mathbb{R}^5$ sind

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, n\right) \qquad y^{(n)} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, 1, e^n, 1-\frac{1}{n}, n\right)$$

Folgen im $\mathbb{R}^3$ können noch als Spaziergang veranschaulicht werden - allerdings etwas mühsam. Für $n \geq 4$ kann man sinnvoll nur mehr die Komponenten veranschaulichen [als Graph oder Spaziergang vgl. [1] 2.4]



[Jetzt aber endlich zur Konvergenz]

1.20 DEF (Konvergenz im $\mathbb{R}^n$)

Sei $(x^{(k)})$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ und sei $a \in \mathbb{R}^n$. Wir sagen $x^{(k)}$ konvergiert gegen a, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k \geq N: \underbrace{x^{(k)} \in U_\varepsilon(a)}_{\text{d.h. } \|x^{(k)} - a\| < \varepsilon}$$

gilt. Wir schreiben dann

$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a$ oder $x^{(k)} \to a$ $(k \to \infty)$ und nennen a den Grenzwert von $(x^{(k)})$.

1.21 MOTIVATION (Prinzip der koordinatenweisen Konvergenz)

Wie schon in $\mathbb{C}$, wo sich die Konvergenz einer Folge auf die Konvergenz von Real- und Imaginärteil zurückführen lässt [vgl. [2] 3.10(E)], lässt sich die Konvergenz einer Folge $x^{(k)}=(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)})$ in $\mathbb{R}^n$ auf die Konvergenz der Komponentenfolgen $(x_1^{(k)}),\dots,(x_n^{(k)})$ zurückführen – man spricht vom Prinzip der komponentenweisen (oder koordinatenweisen) Konvergenz (PKK).

Genauer werden wir gleich sehen, dass

$$\lim(x^{(k)})=(\lim x_1^{(k)},\dots,\lim x_n^{(k)})$$

gilt. Somit ist – wie schon in $\mathbb{C}$ [vgl. [2] 3.10(E)] – die Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ <u>nichts Neues</u> aber <u>n-mal</u> soviel Arbeit.

1.22 SATZ (PKK)

Sei $x^{(k)}=(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)})$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ und $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}=a \iff \lim_{k\to\infty} x_j^{(k)}=a_j \quad \forall\, 1\le j\le n$$

Beweis [ganz leicht bzw. ein Elfi-Beweis]

„$\Rightarrow$" $\forall\, 1\le j\le n$ gilt $|x_j^{(k)}-a_j| \le \|x^{(k)}-a\| \xrightarrow{\text{lt. Voraus.}} 0 \ (k\to\infty)$

$\Rightarrow x_j^{(k)}\to a_j$.

(*) $|c_j|=\sqrt{c_j^2}\le\sqrt{c_1^2+\dots+c_n^2}=\|c\|$

jede Koordinate ist dem Betrag nach beschränkt durch die Norm

„$\Leftarrow$" Sei $\varepsilon > 0$. Lt. Voraussetzung gilt $\forall\, 1 \leq j \leq n$

$$\exists N_j : |x_j^{(k)} - a_j| < \varepsilon/\sqrt{n} \quad \forall k \geq N_j \quad (*)$$

Setze $N := \max\{N_1, \dots, N_n\}$ und sei $k \geq N$, dann gilt

$$\|x^{(k)} - a\| = \Big(\underbrace{(x_1^{(k)} - a_1)^2}_{\overset{(*)}{\leq} \varepsilon^2/n} + \dots + \underbrace{(x_n^{(k)} - a_n)^2}_{\overset{(*)}{\leq} \varepsilon^2/n} \Big)^{1/2}$$

$$< \left(n \frac{\varepsilon^2}{n} \right)^{1/2} = \varepsilon.$$

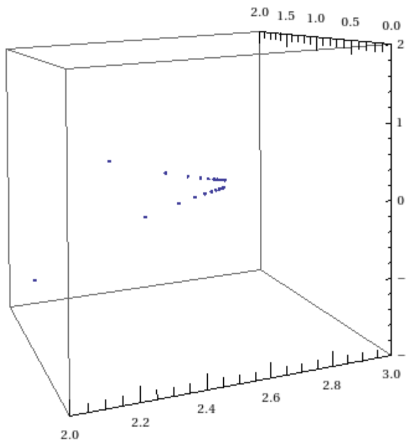
$\Rightarrow x^{(k)} \to a.$ $\square$

1.23 BSP (Konvergenz im $\mathbb{R}^n$)

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0) \quad (n \to \infty)$$

$$y^{(n)} = \left(n, 1 - \frac{1}{n}\right) \text{ divergiert } \left[\text{weil } y_1^{(n)} = n \to \infty\right]$$

$$z^{(k)} = \begin{pmatrix} (1 + 1/k)^k \\ 1 \\ (-1)^k/k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



1.24 BEM (PKK und seine Folgen)

Das PKK erlaubt es uns Resultate über Folgen in $\mathbb{R}$ ganz leicht in Resultate über Folgen in $\mathbb{R}^n$ zu verwandeln – vgl. dazu auch [Z] 3.10 (G), (H).
Z.B. ist es „keinen Satz wert" festzustellen dass Summen von konvergenten Folgen in $\mathbb{R}^n$ gegen die Summe der

Grenzwerte konvergieren.

$$\Big[\, x^{(k)} \to a,\ y^{(k)} \to b \overset{\text{PKK}}{\Longrightarrow} x_j^{(k)} \to a_j,\ y_j^{(k)} \to b_j \ \ \forall 1 \le j \le n$$

$$\overset{[1]\,2.23}{\Longrightarrow} x_j^{(k)} + y_j^{(k)} \to a_j + b_j \ \ \forall 1 \le j \le n$$

$$\overset{\text{PKK}}{\Longrightarrow} x^{(k)} + y^{(k)} \to a + b \,\Big]$$

Folgende beide Resultate über Cauchy-Folgen & beschränkte Folgen halten wir – wegen ihrer großen Relevanz – explizit fest. Zuvor müssen wir aber noch definieren.

1.25 DEF (CF & beschränkte Folge)

Sei $(x^{(k)})$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Wir nennen $x^{(k)}$

(i) eine Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall l, m \ge N: \|x^{(l)} - x^{(m)}\| < \varepsilon$$

(ii) beschränkt, falls

$$\exists R > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \ \|x^{(k)}\| \le R$$

Das sind dieselben Def. wie in $\mathbb{R}$ – nur $|\,|$ ersetzt $\|\,\|$

1.26 KOR (Vollständigkeit, Bolzano-Weierstraß)

(i) $\mathbb{R}^n$ ist vollständig, d.h. für jede Folge $(x^{(k)})$ im $\mathbb{R}^n$ gilt

$$x^{(k)} \text{ konvergent} \Longleftrightarrow x^{(k)} \text{ CF}$$

(ii) In $\mathbb{R}^n$ gilt der Satz v. Bolzano-Weierstraß, d.h. jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge.

Muß nicht definiert werden – Def [1] 3.3 gilt für Folgen in beliebigen Mengen

Beweis (i) [ganz leichte Anwendung von PKK] [UE]

In jedem Schritt erfolgt eine „Ausdünnung" TF von TF ... doch macht aber nichts, es bleiben ∞ viele Glieder über

(ii) $x^{(k)}$ beschränkt $\Longrightarrow x_j^{(k)}$ beschränkt $\forall\, 1 \leq j \leq n$ Wie (*) im Beweis von 1.22

$x_1^{(k)}$ beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ $\overset{BW}{\underset{[1]\,3.11}{\Longrightarrow}} \exists$ konv. TF $\left(x_1^{(k_l)}\right)_l$

Betrachte nun die Folge $\left(x_2^{(k_l)}\right)_l$. Sie ist als TF der beschr. reellen Folge $\left(x_2^{(k)}\right)_k$ beschränkt

$\overset{BW}{\Longrightarrow} \exists$ konv. TF $\left(x_2^{(k_{l_m})}\right)_m$

Betrachte nun $\left(x_3^{(k_{l_m})}\right)_m$ ....

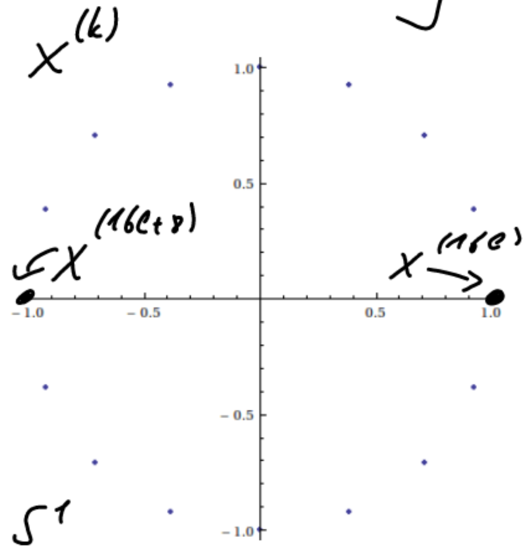
$\vdots$

$\Longrightarrow \exists$ konv. TF $\left(x_n^{(k_{\dots_s})}\right)_s$

Konstruktion $\Longrightarrow \exists$ TF $\left(x^{(k_s)}\right)_s$, die in jeder Komponente konv.

$\overset{PKK}{\Longrightarrow} \left(x^{(k_s)}\right)_s$ konvergent (als Folge in $\mathbb{R}^n$). $\square$

1.27 Bsp (zum BW)



$x^{(k)} = \left(\cos\left(k\frac{\pi}{8}\right), \sin\left(k\frac{\pi}{8}\right)\right)$

$\left(x^{(k)}\right)$ ist beschränkt, denn

$\|x^{(k)}\|^2 = \cos^2\left(\frac{k\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{k\pi}{8}\right) = 1$

$\Longrightarrow \|x^{(k)}\| = 1\ \forall k$ d.h. alle $x^{(k)} \in S^1$

Eine konv. TF ist z.B. $x^{(16l)} = (\cos(2l\pi), \sin(2l\pi)) = (1,0)$

oder etwa auch $x^{(16l+8)} = (\cos(2(l+1)\pi), \sin(2(l+1))\pi) = (-1,0)$

1.28 MOTIVATION (Abg & kp Mengen)

In der Analysis stetiger Fkt auf $\mathbb{R}$ haben die beschränkten & abg. Intervalle $[a,b]$ eine Sonderrolle gespielt [vgl [R] 2.1.8 Thms 2.11, 2.16] diese haben wir als <u>kompakte</u> Intervalle bezeichnet.

Ihrer Verallgemeinerung, den „<u>kompakten</u> Mengen <u>in MR</u>" wenden wir uns jetzt zu: Zwar könnten wir analog zum Vorgehen in $\mathbb{R}$ kompakte Mengen als abg + beschränkte Mengen definieren – das wäre zwar ein möglicher Zugang, aber auch ein unnatürlicher$^{(\Delta)}$: Eine wesentliche Eigenschaft einer kompakten Menge K ist nämlich:

$$\boxed{\text{Jede Folge in } K \text{ hat eine in } K \text{ konv. TF.} \quad (*)}$$

Zugegeben: unanschaulich <u>aber</u> praktisch sehr brauchbar als Existenzmaschine [vgl. [1] Kap 3]

Zentraler Begriff der höheren Analysis, Topologie, Funktionalanalysis!

der Limes einer TF wird „in die Existenz gerufen".

Kompaktheit ist in gewisser Weise der abstrakte Kern der „Existenzmaschine" der Analysis. Er kann nicht nur in MR, sondern auch in top. Räumen formuliert werden.

allerdings nicht wie in (*) sondern mittels Überdeckungseigenschaft vgl. [Forster 2, I §3]

Allerdings können schon in MR kp Mengen „per se" als abg + beschränkte Mengen sein... [vgl (Δ)].

Zunächst befassen wir uns aber noch mit abg. Mengen.

1.29 Satz (Abg Mengen enthalten die GW ihrer Folgen)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gilt

A ist abgeschlossen $\iff$ Für alle (in $\mathbb{R}^n$) konvergenten Folgen $(x^{(k)})$ in A gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} \in A$

1.30 Bsp (Zur Illustration von 1.29)

genauer: $\forall c \in \mathbb{R}^n$ mit $c = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$ und $x^{(k)} \in A \ \forall k \Rightarrow c \in A$

Wir betrachten $x_n = 1/n$ in $\mathbb{R}$. Dann gilt

$x_n \in (0,1]$ aber $\lim x_n = 0 \notin (0,1]$ und $(0,1]$ ist nicht abg.

$x_n \in [0,1]$ und $\lim x_n \in [0,1]$ und $[0,1]$ ist abg.

[2x indirekt aber anschaulich]

Beweis: „$\Rightarrow$" Indir ang $c = \lim x^{(k)}$ mit $x^{(k)} \in A \ \forall k$ aber $c \notin A$

$\Rightarrow c \in A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$

A abg $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$ offen

$\Rightarrow \exists$ Sicherheitskugel um c

genauer $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(c) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$

$\Rightarrow U_\varepsilon(c) \cap A = \emptyset \quad (*)$

Das ist aber ein Widerspruch zu $c = \lim x^{(k)}$, $x^{(k)} \in A$, denn

$c = \lim x^{(k)} \Rightarrow \exists N \ \forall k \geq N : x^{(k)} \in U_\varepsilon(c)$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} x^{(k)} \notin A \ \forall k \geq N$ ↯ zu $x^{(k)} \in A \ \forall k$

„⇐" Wir zeigen, dass A^c offen ist.

Indir. ang. nicht $\Rightarrow \exists b \in A^c : \forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(b) \not\subseteq A^c$

d.h. jede ε-Umgebung von b schneidet A

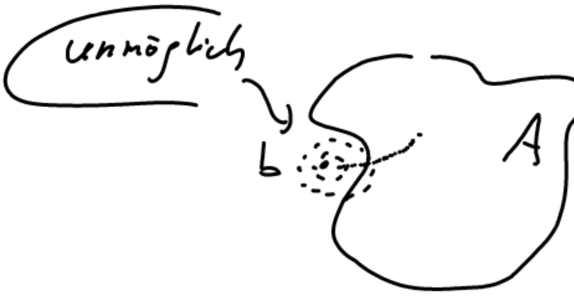
Konstruiere Folge $x^{(k)}$ in A mit $x^{(k)} \to b \Rightarrow b \in A$ ↯

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: U_{\frac{1}{k}}(b) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ \exists x^{(k)} \in U_{\frac{1}{k}}(b) \cap A$

$\Rightarrow (x^{(k)})$ ist Folge in A mit $x^{(k)} \to b \ (k \to \infty)$

$\overset{A \text{ abg}}{\Longrightarrow} b \in A$ ↯



$\square$

1.31 BEM (Abschluss einer Menge)

(i) (Die Idee)

Man kann den „Defekt" einer nicht abg. Menge M beheben nicht abg. zu sein, indem man die Limiten aller (in $\mathbb{R}^n$) konvergenten Folgen $x^{(k)}$ in M zu M dazugibt.

(ii) Formal definieren wir den Abschluss einer beliebigen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ als

$$\boxed{\overline{M} := \{ c \in \mathbb{R}^n \mid \exists \text{ Folge } x^{(k)} \text{ in } M \text{ mit } c = \lim x^{(k)} \}}$$

(iii) Einfache Eigenschaften des Abschlusses sind

$M \subseteq \overline{M}$ [jedes $c \in M$ ist $\lim x^{(k)}$ mit $x^{(k)} = c \ \forall k$]

$\overline{M}$ ist abg. [folgt sofort aus 1.29]

$M = \overline{M} \Leftrightarrow M$ abg [ditto]

(iv) Ein Bsp: $\overline{U_r(x_0)} = \overline{\{x\in\mathbb{R}^n : \|x-x_0\|<r\}}$

$= K_r(x_0) = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-x_0\|\le r\}$

(v) Der Abschluss einer Menge ist ein top. Begriff, d.h. er ist in top. Räumen formulierbar (ohne anders)

1.32 DEF (Kompakte Menge) Eine Menge $K\subseteq\mathbb{R}^n$ heißt **kompakt**, falls jede Folge $(x^{(k)})$ in K eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Pkt $a\in K$ konvergiert

1.33 Bsp (kp. Intervall)

$K=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ ist kp, denn sei (x_n) eine Folge in K

$\Rightarrow a\le x_n\le b \ \forall n \Rightarrow (x_n)$ ist beschränkt

$\overset{BW}{\Longrightarrow} \exists$ konv. TF $(x_{n_l})_l$

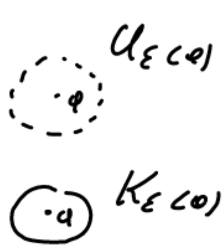
$\Rightarrow a\le x_{n_l}\le b \ \forall l \underset{\text{Sandwich}}{\Longrightarrow} a\le \lim_l x_{n_l}\le b \Rightarrow \lim_l x_{n_l}\in K$

1.34 THM (Satz von Heine-Borel) Sei $K\subseteq\mathbb{R}^n$, dann gilt

K ist kompakt $\Longleftrightarrow$ K ist beschränkt & abg.

[Das ist ein zentraler Satz und wie in 1.28 erwähnt in $\mathbb{R}^n$ gerade noch richtig, in M.R. falsch.]

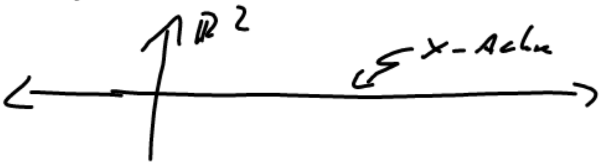
1.35 BSP (kp & nicht kp Mengen)



$U_\varepsilon(a)$ ist nicht kp, weil nicht abg

$K_\varepsilon(a)$ ist kp, weil beschränkt & abg

$\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist nicht kp, weil nicht beschränkt



[im übrigen abg & nicht offen]

Beweis. [Zusammensetzen der Konzepte & 1.28]

„$\Rightarrow$": (1) K ist abg, denn sei $(x^{(k)})$ in K mit $c = \lim_k x^{(k)}$

$\overset{1.28}{\Longrightarrow}$ es genügt ZZ: $c \in K$

K kp $\Rightarrow \exists$ TF $(x^{(k_l)})_l$ mit $a := \lim_l x^{(k_l)} \in K$

$x^{(k)}$ konv $\Rightarrow c = a \Rightarrow c \in K$

(2) K ist beschränkt. [d.h. $\exists R > 0$: $K \subseteq K_R(0)$, vgl. 1.25(iii)]

Indir. ang. K nicht beschränkt, d.h. $\forall R$: $K \not\subseteq K_R(0)$

$\Rightarrow \exists$ Folge $(x^{(k)})$ in K mit $\|x^{(k)}\| \to \infty$ $(k \to \infty)$

$\Rightarrow (x^{(k)})$ hat keine konv. TF $\lightning$ zu K kp

(eine solche wäre ja beschränkt)

„$\Leftarrow$": Sei $(x^{(k)})$ eine Folge in K [ZZ $(x^{(k)})$ hat in K konv. TF]

K beschr $\Rightarrow (x^{(k)})$ beschr $\overset{BW}{\Longrightarrow} \exists$ konv TF $(x^{(k_l)})_l$; sei $a := \lim_l x^{(k_l)}$

K abg $\Rightarrow a \in K$. $\square$