Blatt 7: Stetigkeit & Grenzwerte von Funktionen

$\boxed{1}$ *Grenzwerte explizit.*
Untersuche, ob die Grenzwerte existieren und wenn ja, berechne sie!

$$\text{(a)}\ \lim_{x\searrow 1}\frac{1+x}{1-x}\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-5x^2-1}{1-x^3}\qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to\infty}\exp\left(\frac{x^2-131x-97}{(x+17)(x+1)}\right)$$

$\boxed{2}$ *Stetigkeit vs. gleichmäßge Stetigkeit.*
Betrachte die Funktion

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^2}.$$

(a) Zeige direkt aus der ε-δ-Definition der Stetigkeit, dass f stetig (in jedem Punkt $x_0\in(0,\infty)$) ist.

(b) Ist f auch gleichmäßig stetig? Warum?

(c) Ist die Einschränkung von f auf $[1,\infty)$ gleichmäßig stetig? Warum?

$\boxed{2A}$ *Freiwillige Zusatzaufgabe: Es liegt nicht an der Unbeschränktheit.*
Finde eine Funktion $f:\ (0,1]\to\mathbb{R}$, die die stetig und (im Gegensatz zu $f(x)=1/x^2$ in Aufgabe $\boxed{2}$) *beschränkt* aber nicht gleichmäßig stetig ist.
Tipp: Zacken wie in Vo. $\boxed{2}$ 1.15(i).

$\boxed{3}$ *Einseitige Grezwerte & Stetigkeit.*
Sei $c\in(a,b)$, sei $f:(a,b)\setminus\{c\}\to\mathbb{R}$ eine Funktion und sei $\alpha\in\mathbb{R}$. Beweise, dass

$$\lim_{x\searrow c}f(x)=\alpha=\lim_{x\nearrow c}f(x)\qquad\Longleftrightarrow\qquad\lim_{x\to c}f(x)=\alpha$$

gilt. (Insbesondere existiert der Limes.)

$\boxed{4}$ *Stetige Fortsetzbarkeit.*
Gegeben ist die Funktion

$$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{x^2}.$$

Zeige, dass f nicht stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.
Hinweis: Mache dir zuerst klar, was die Aussage genau bedeutet (vgl. Vo. $\boxed{2}$ Bem. 1.27).

Roland Steinbauer, Juni 2012

$\boxed{5}$ *Unerwartetes Stetigkeitsverhalten—Monster.*
Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit minimalem } q \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und führe das (in der Vorlesung nicht vorgetragene) Bsp. $\boxed{2}$ 1.15(ii) aus, indem du zeigst, dass

(a) f unstetig in allen $q \in \mathbb{Q}$ ist, aber

(b) f stetig in allen $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist.

$\boxed{6}$ *Fixpunktsatz.*
Ziel dieser Aufgabe ist es, den folgenden (sogenannten) Fixpunktsatz zu verstehen und zu beweisen:

Satz. Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Dann besitzt f einen Fixpunkt d.h. es existiert ein $x_0 \in [0,1]$ mit

$$f(x_0) = x_0.$$

(a) Veranschauliche die Aussage am Einheitsquadrat.
Hinweis: Der Graph von f liegt zur Gänze im Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$, beginnt an dessen linker Kante und endet an dessen rechter Kante. Weiters liegen Fixpunkte auf der Diagonale...

(b) Beweise die Aussage.
Hinweis: Ein Fixpunkt von f ist eine Nullstelle der Funktion g mit $g(x) := f(x) - x$.

(c) Freiwillige Zusatzaufgabe: Mutmaße, wozu Fixpunktsätze gut sein könnten.

$\boxed{7}$ *Unstetige Inverse.*
Wir betrachten die Funktion

$$f: \ D = [-2,-1) \cup [1,2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{für } x \in [-2,-1) \\ x-1 & \text{für } x \in [1,2]. \end{cases}$$

(a) Zeige, dass f als Abbildung $D \to [-1,1]$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv ist.

(b) Nach (a) hat f eine Umkehrfunktion $f^{-1}: \ [-1,1] \to D$. Berechne diese explizit (Tipp: Skizze!) und begründe, warum f^{-1} in $x_0 = 0$ nicht stetig ist.

(c) Was ist die Moral der Geschichte?

Roland Steinbauer, Juni 2012