Blatt 5: Folgen & Reihen

$\boxed{1}$ *Berührpunkte und Häufungspunkte konkret.*
Bestimme jeweils alle Berührpunkte und Häufungspunkte der angegebene Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(a) $A = \{\frac{1}{n^2} : \ 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$

(b) $B = [a, b) \cup (b, c]$ für $a < b < c \in \mathbb{R}$

(c) $C = (1, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$

(d) $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige endliche Teilmenge.

$\boxed{2}$ *Berührpunkte und Häufungspunkte theoretisch.*
Beweise Vo. Prop. $\boxed{1}$ 3.30(ii), genauer zeige für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ die folgende Aussage gilt:

$$a \text{ ist Häufungspunkt von } A \iff a \text{ ist Berührpunkt von } A \setminus \{a\}$$

Hinweis. Die schwierigere Richtung ist die Rückrichtung: Mit einer Konstruktion analog zu Vo. $\boxed{1}$ 3.30(i) ,,$\Rightarrow$" findest du entsprechende Punkte oder, falls dir das sympathischer ist, eine Folge...

$\boxed{3}$ *Limes vs. Häufungswert.*
Sei (a_n) eine reelle Folge. Ziel dieser Aufgabe ist es folgende wichtige Aussage zu zeigen:

$$(a_n) \text{ konvergiert} \quad \iff \quad (a_n) \text{ ist beschränkt und hat genau einen Häufungswert}$$

(a) Zeige die Hinrichtung ,,$\Rightarrow$".
Anleitung. Die Beschränktheit folgt leicht. Außerdem ist $a := \lim a_n$ ein Häufungswert von (a_n). Um zu zeigen, dass es keinen weiteren geben kann, nimm an, es gebe eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit $a_{n_k} \to b$. Nun bastle aus den Definitionen von Grenz- und Häufungswert einen $\varepsilon/2$-Beweis, der $a = b$ zeigt.

(b) Zeige die Rückrichtung ,,$\Leftarrow$".
Anleitung. Diesen Beweis führst du am einfachsten indirekt. Also sei a der (einzige) Häufungswert von (a_n) und angenommen $a_n \not\to a$, dann läßt sich aus der Negation der Limesdefinition eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ konstruieren, die ,,weit weg" von a bleibt. Diese ist aber lt. Vorraussetzung beschränkt, besitzt also nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_l}})_l$ (Teilfolge der Teilfolge—uff!). Deren Limes muss aber a sein, und das ist ein Widerspruch.

Roland Steinbauer, Mai 2012

$\boxed{4}$ *Weitere Eigenschaften von Folgen?*
Kann eine (reelle) Folge (a_n) die folgenden Eigenschaften haben? Wenn ja gib ein Beispiel, wenn nein argumentiere.

(a) Hat zwei verschiedene Limiten.
(b) Hat zwei verschieden Häufungswerte.
(c) Hat einen Limes und einen Häufungswert.
(d) Hat einen Limes und zwei Häufungswerte.
(e) Hat einen Häufungswert, ist aber nach oben beschränkt.
(f) Ist beschränkt aber hat keinen Häufungswert.

$\boxed{5}$ *Konvergenz von Reihen*
Untersuche ob die angegeben Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren.

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{(n+2)(n+1)}$ (b) $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ (c) $a_n = \dfrac{1+n}{n}$

(d) Wie sieht es jeweils mit absoluter Konvergenz aus?

$\boxed{6}$ *Absolute Konvergenz von Reihen, 1.*
Sind die folgenden Reihen absolut konvergent?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$\boxed{7}$ *Absolute Konvergenz von Reihen, 2.*
Sind die folgenden Reihen absolut konvergent?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$

Roland Steinbauer, Mai 2012