Blatt 4: Folgen & Konvergenzprinzipien

$\boxed{1}$ *Kehrwerte von Nullfolgen divergieren.*
Beweise Vo. $\boxed{1}$ Prop. 2.47. Genauer, sei (a_n) eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle n, dann gilt

$$\lim \frac{1}{a_n} = \infty.$$

$\boxed{2}$ *Eigenschaften von Folgen?*
Kann eine (reelle) Folge (a_n) die folgenden Eigenschaften haben? Wenn ja gib ein Beispiel, wenn nein argumentiere.

(a) beschränkt und divergent.
(b) unbeschränkt und konvergent.
(c) bestimmt divergent und beschränkt.
(d) bestimmt divergent und nach oben beschränkt.
(e) unbeschränkt und nicht bestimmt divergent.

$\boxed{3}$ *Teilfolgen.*
Betrachte die Folge $a_n = (-1)^n \left(\frac{-1}{n}\right)$ $(n \geq 1)$. Welche der angegeben Folgen sind Teilfolgen von (a_n)? Begründe!

(a) $a_{n_k} = \frac{1}{2k+1}$ $\quad (k \geq 1)$
(b) $a_{n_l} = (-1)^l \frac{1}{2l+1}$ $\quad (l \geq 1)$
(c) $a_{n_m} = \left(-\frac{1}{2m}\right)^m$ $\quad (m \geq 1)$
(d) $a_{n_r} = (-1)^{2r} \frac{1}{2r}$ $\quad (r \geq 1)$
(e) $a_{n_s} = \frac{1}{2k+1}$ $\quad$ (für ein $k \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$)

$\boxed{4}$ *Häufungswerte.*
Bestimme jeweils alle Häufungswerte der Folge (a_n). Bestimme weiters Limes inferior und superior von (a_n) und vergleiche diese mit Infimum und Supremum der Menge $A := \{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$.

(a) $a_n = (-1)^n \sqrt{2} \quad (n \in \mathbb{N})$
(b) $a_{3n-2} = 3 + \frac{1}{n}, \ a_{3n-1} = \frac{2}{n}, \ a_{3n} = -\frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$
(c) $a_n = \frac{(-1)^n}{3 + 2n + n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$

Roland Steinbauer, Mai 2012

$\boxed{5}$ *Approximation von Wurzeln.*
Betrachte in Analogie zu Vo. Bsp. $\boxed{1}$ 3.24 folgende Approximation für die Wurzel von a: Sei $a > 0$ und $x_0 > 0$.

(a) Zeige, dass die durch die Rekursion ($n \in \mathbb{N}$)

$$x_{n+1} \ := \ \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

definierte Folge (x_n) nach unten beschränkt ist.

(b) Zeige, dass (x_n) ab $n = 1$ monoton fallend ist.

(c) Zeige, dass $x_n \to \sqrt{a}$.

$\boxed{6}$ *Cauchyfolge abstrakt.*
Sei (a_n) eine reelle Folge mit der Eigenschaft

$$|a_n - a_{n+1}| \ \leq \ \frac{1}{2^n}.$$

Zeige, dass (a_n) eine Cauchfolge ist.
Tipp. Für $m \geq n$ ist $a_n - a_m = a_n - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots - a_m$. Dann verwende die geometrische Reihe!

$\boxed{7}$ *Cauchyfolge konkreter.*
Wir betrachten die durch folgende Rekursion gegebene Folge (a_n)

$$a_0 = 0, \ a_1 = 1, \ a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \qquad (n = 2, 3, \dots).$$

(a) Zeige, dass a_n eine Cauchyfolge ist.
Tipp. Weise induktiv die Formel $a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ nach. Das erlaubt es Aufgabe $\boxed{6}$ zu verwenden.

(b) Berechne den Grenzwert von a_n.
Tipp. Es gilt $a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$ und dann geometrische Reihe—was sonst?

Roland Steinbauer, Mai 2012