

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	Σ /40

Note:

Einführung in die Analysis
Roland Steinbauer, Sommersemester 2012
8. Prüfungstermin (28.2.2014)
Gruppe A

1. *Definitionen, Sätze & Beweise.*

- (a) Definiere die folgenden Begriffe (je 1 Punkt):
Beschränkte Folge, Häufungspunkt einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$,
die allgemeine Potenz x^α für $\mathbb{R} \ni x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- (b) Beweise: Jede reelle Cauchy-Folge konvergiert. (5 Punkte)
- (c) Formuliere den Quotiententest für Reihen. (2 Punkte)

2. *Begriffe & Ideen.*

- (a) (*Stetigkeit vs. gleichmäßige Stetigkeit*) (5 Punkte)
Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ definiere die Begriffe Stetigkeit (auf D) und gleichmäßige Stetigkeit. Erkläre die Bedeutung dieser Begriffe und diskutiere das Verhältnis dieser Begriffe zueinander.
- (b) (*Konvergenz vs. absolute Konvergenz*) (3 Punkte)
Für (reelle) Reihen definiere die Begriffe Konvergenz und absolute Konvergenz. Diskutiere das Verhältnis dieser Begriffe zueinander.
- (c) (*Umkehrsatz*) (2 Punkte)
Formuliere den Umkehrsatz für streng monotone und stetige Funktionen. Für welche der Aussagen im Satz ist die Stetigkeit notwendige Bedingung?

3. *Vermischtes.*

- (a) Skizziere die Exponential- und die Logarithmusfunktion und gib die Limiten $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$, $\lim_{x \searrow 0} \log(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x)$ an. (2 Punkte)
- (b) Gib je eine reelle Folge mit den folgenden Eigenschaften an: beschränkt aber nicht konvergent, nach oben und unten unbeschränkt, ein Häufungswert aber nach oben unbeschränkt (3 Punkte)
- (c) Diskutiere die folgende Aussage „Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, falls sie ohne Absetzen gezeichnet werden kann.“ (3 Punkte)

Bitte umblättern!

(d) Untersuche die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz. (je 2 Punkte)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

(e) Berechne: (2 Punkte)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

4. *Richtig oder falsch?*

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (je 3 Punkte)

(a) Sei (a_n) eine Nullfolge, dann konvergiert $\sum a_n$.

(b) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann hat f eine Nullstelle x_0 in $[a, b]$.