Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	$\sum$/40

Note:

Einführung in die Analysis

Roland Steinbauer, Sommersemester 2012

5. Prüfungstermin (14.6.2013)

Gruppe A

1. *Definitionen, Sätze & Beweise.*

   (a) Definiere die folgenden Begriffe (je 1 Punkt):
   konvergente Reihe, Grenzwert einer Funktion

   (b) Formuliere den Satz, der die Stetigkeit ein Funktion in einem Punkt via Folgen charakterisiert. („Umgebungsstetigkeit = Folgenstetigkeit")

   Beweise den Satz und beschreibe beide Beweisrichtungen kurz in Worten. (7 Punkte)

   (c) Formuliere und beweise das Cauchy-Prinzip für Reihen. Begründe jeden deiner Beweisschritte. (3 Punkte)

2. *Beispiele und Gegenbeispiele.*

   (a) *Folgen.* Berechne die folgenden Grenzwerte und begründe jeden deiner Schritte: (je 2 Punkte)

   $$\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}} \qquad\qquad \sqrt{n^2-n}+\sqrt{n}$$

   (b) *Funktionen.* Gib, falls existent, je ein Beispiel für eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit den geforderten Eigenschaften an: (je 1 Punkt)
   unstetig aber keine Sprünge, stetig und unbeschränkt, bijektiv und $f(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$.

   (c) *Potenzen.* Skizziere auf $(0,1)$ die Graphen der allgemeinen Potenzfunktion x^α für $\alpha<0$, $\alpha=0$, $0<\alpha<1$, $\alpha=1$ und $1<\alpha$. (3 Punkte)

   (d) *Reihen.* Konvergiert die folgende Reihe? Konvergiert sie auch absolut?

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^n}{n^{n+1}}$$

Bitte umblättern!

3. *Vermischtes.*

   (a) *Exponentialfunktion.* Gib die Definition der (reellen) Exponentialfunktion an und beweise $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ und $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (3 Punkte)

   (b) *Winkelfunktionen.* Leite aus der Reihendarstellung der komplexen Exponentialfunktion und den Definitionen der Winkelfunktionen die Reihendarstellung von Sinus und Cosinus her. (3 Punkte)

   (c) *Vollständigkeit.* Was versteht man unter der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$? Nenne verschiedene äquivalente Formulierungen und gib eine exakt an. Gib je ein Resultat über Folgen, Reihen und (stetige) Funktionen an, das wesentlich auf der Vollständigkeit beruht. (4 Punkte)

4. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (je 3 Punkte)

   (a) Seien $a_n \geq 0$, dann gilt: $s_m = \sum_{k=0}^{m} a_k$ beschränkt $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

   (b) Jede Teilfolge einer gegen a konvergenten Folge konvergiert auch gegen a.