Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	$\sum$ /40

Note:

Einführung in die Analysis

Roland Steinbauer, Sommersemester 2012

4. Prüfungstermin (1.3.2013)

Gruppe A

1. *Definitionen, Formulierungen und Beweise.*
   (a) Definiere die folgenden Begriffe (je 1 Punkt):
   bestimmte Divergenz gegen $+\infty$, Konvergenz einer Folge in $\mathbb{C}$, Konvergenz einer Reihe, die Zahl π

   (b) Beweise folgende Charakterisierung der Häufungswerte eine (reellen) Folge:
   $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungswert der Folge (a_n) genau dann, wenn jede ε-Umgebung von a unendlich viele Punkte enthält.
   Erkläre zusätzlich die Idee des Beweises der Rückrichtung in einer Skizze.
   (6 Punkte)

   (c) Formuliere den Satz von Bolzano-Weierstraß und das Cauchy-Prinzip.
   (2 Punkte)

2. *Stetigkeit.*
   (a) Definiere den Begriff Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt. (1 Punkt)

   (b) Diskutiere was es anschaulich für eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ bedeutet, im Punkt $x_0 \in D$ stetig zu sein. (3 Punkte)

   (c) Gib zwei auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktionen und zwei auf $\mathbb{R}$ definierte unstetige Funktionen an. (2 Punkte)

   (d) Sind die folgenden Funktionen in $x_0 = 0$ stetig? Warum, warum nicht? (je 1 Punkt)

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad h(x) = \begin{cases} 1+x & x \leq 0 \\ 1-x & x > 0 \end{cases}$$

   (e) Formuliere die folgende Aussage explizit aus und beweise sie:
   Die Zusammensetzung stetiger Funktionen ist stetig. (3 Punkte)

Bitte umblättern!

3. *Beispiele.*

   (a) Definiere und skizziere die Arcusfunktionen arcsin und arccos (2 Punkte)

   (b) Sind die folgenden Reihen absolut konvergent, konvergent oder divergent? (je 2 Punkte)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{(1+n)(2+n)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+n)^n}{n^{n+1}}$$

   (c) Berechne die Grenzwerte der folgenden Folgen: (je 2 Punkte)

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, \qquad b_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}\right)$$

4. *Richtig oder falsch?*

   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (Je 3 Punkte)

   (a) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

   (b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Funktion mit $f(x) = -1$ und $f(b) = 1$. Dann hat f eine Nullstelle x_0 in $[a, b]$.

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	$\sum$ /40

Note:

Einführung in die Analysis

Roland Steinbauer, Sommersemester 2012

4. Prüfungstermin (1.3.2013)

Gruppe B

1. *Definitionen, Formulierungen und Beweise.*
   (a) Definiere die folgenden Begriffe (je 1 Punkt):
   Häufungswert einer Folge, gleichmäßig stetige Funktion, bestimmte Divergenz gegen $-\infty$, die Eulersche Zahl e
   (b) Beweise folgende Charakterisierung der Häufungswerte eine (reellen) Folge:
   $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungswert der Folge (a_n) genau dann, wenn jede ε-Umgebung von a unendlich viele Punkte enthält.
   Erkläre zusätzlich die Idee des Beweises der Rückrichtung in einer Skizze.
   (6 Punkte)
   (c) Formuliere den Satz der die Stetigkeit einer (reellen) Funktion in einem Punkt mittels Konvergenz von Folgen charakteristisiert. (2 Punkte)

2. *Stetigkeit.*
   (a) Definiere den Begriff Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt. (1 Punkt)
   (b) Diskutiere was es anschaulich für eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ bedeutet, im Punkt $x_0 \in D$ *nicht* stetig zu sein. (2 Punkte)
   (c) ib zwei auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktionen und zwei auf $\mathbb{R}$ definierte unstetige Funktionen an. (2 Punkte)
   (d) Sind die folgenden Funktionen in $x_0 = 0$ stetig? Warum, warum nicht? (je 1 Punkt)

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad h(x) = \frac{1}{x^3}$$

   (e) Formuliere die folgende Aussage explizit aus und beweise sie:
   Wenn eine stetige Funktion in einem Punkt nicht verschwindet, dann verschwindet sie schon auf einer ganzen Umgebung nicht. (3 Punkte)

Bitte umblättern!

3. *Beispiele.*
   (a) Berechne die Grenzwerte der folgenden Folgen: (je 2 Punkte)

$$a_n = \sqrt{n} - \sqrt{\sqrt{n} + n}, \qquad b_n = \frac{3^n}{n!}$$

   (b) Definiere und skizziere die Arcusfunktionen arcsin und arccos (2 Punkte)
   (c) Sind die folgenden Reihen absolut konvergent, konvergent oder divergent? (je 2 Punkte)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \frac{1}{2} \right)^n, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

4. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (Je 3 Punkte)
   (a) Jede Funktion $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ die stetig ist, ist auch gleichmäßig stetig.
   (b) Jede Reihe, die konvergiert aber nicht absolut konvergiert, muß negative Glieder haben.