Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	$\sum$/40

Note:

Einführung in die Analysis

Roland Steinbauer, Sommersemester 2012

3. Prüfungstermin (14.12.2012)

Gruppe A

1. *Definitionen, Formulierungen und Beweise.*
   (a) Definiere die folgenden Begriffe (je 1 Punkt):
   gleichmäßig stetige Funktion, Teilfolge einer reellen Folge, Cauchy-Folge
   (b) Formuliere und beweise den Zwischenwertsatz (Existenz einer Nullstelle). (6 Punkte)
   (c) Beantworte folgende Fragen zu obigem Beweis. Verweise explizit auf deine Ausarbeitung von (b). (3 Punkte)
   Wo wird die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ verwendet? Wo wird die Stetigkeit von f verwendet? Ist die Nullstelle eindeutig?

2. *Folgen & Konvergenz.*
   (a) Formuliere und beweise das Sandwich-Lemma. (4 Punkte)
   (b) Berechne die Grenzwerte der folgenden Folgen (je 2 Punkte)
   $$\sqrt{1+\frac{1}{n}}, \qquad \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$$
   (c) Diskutiere, was es anschaulich für eine reelle Folge bedeutet, gegen einen Grenzwert (in $\mathbb{R}$) zu konvergieren. (2 Punkte)

3. *Vermischtes.*
   (a) Skizziere die Exponential- und die Logarithmusfunktion und gib die Limiten $\lim_{x\to-\infty} e^x$, $\lim_{x\to\infty} e^x$, $\lim_{x\searrow 0}\log(x)$, $\lim_{x\to\infty}\log(x)$ an. (2 Punkte)
   (b) Gib je eine reelle Reihe mit den folgenden Eigenschaften an: absolut konvergent, konvergent aber nicht absolut konvergent, divergent (3 Punkte)
   (c) Diskutiere die folgende Aussage „Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist stetig, falls sie ohne Absetzen gezeichnet werden kann." (3 Punkte)
   (d) Untersuche die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz. (je 2 Punkte)
   $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n)!}{n^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Bitte umblättern!

4. *Richtig oder falsch?*
Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (Je 3 Punkte)

(a) Eine stetige Funktion nimmt auf einem beschränkten Intervall Maximum und Minimum an.

(b) Jede gleichmäßig stetige Funktion ist auch stetig.

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	$\sum$/40

Note:

Einführung in die Analysis

Roland Steinbauer, Sommersemester 2012

3. Prüfungstermin (14.12.2012)

Gruppe B

1. *Reihen & Konvergenz.*
   (a) Formuliere und Beweise den Quotiententest für Reihen. (5 Punkte)
   (b) Untersuche die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz. (4 Punkte)
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n)!}{n^n}$$
   (c) Begründe anschaulich, warum eine Reihe $\sum a_n$ mit $a_n > 0$ für alle n überhaupt konvergieren kann. (3 Punkte)

2. *Definitionen, Formulierungen und Beweise.*
   (a) Definiere die folgenden Begriffe (je 1 Punkt):
   Bestimmte Divergenz einer reellen Folgen gegen ∞, Konvergenz einer Reihe, stetige Funktion.
   (b) Formuliere und beweise den Zwischenwertsatz (Existenz einer Nullstelle). (6 Punkte)
   (c) Beantworte folgende Fragen zu obigem Beweis. Verweise explizit auf deine Ausarbeitung von (b). (3 Punkte)
   Wo wird die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ verwendet? Wo wird die Stetigkeit von f verwendet? Ist die Nullstelle eindeutig?

3. *Vermischtes.*
   (a) Skizziere die Sinus- und die Cosinusfunktion im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$. (2 Punkte)
   (b) Gib je eine reelle Folge mit den folgenden Eigenschaften an: divergent aber beschränkt, unbeschränkt aber nicht bestimmt divergent, divergent und nach oben sowie nach unten unbeschränkt (3 Punkte)
   (c) Diskutiere die folgende Aussage „Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, falls sie ohne Absetzen gezeichnet werden kann.” (3 Punkte)
   (d) Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n(n+4)}{n^2+7n-1}$ (2 Punkte)

Bitte umblättern!

4. *Richtig oder falsch?*
Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (Je 3 Punkte)

(a) Für eine konvergente Folge $(a_n)_n$ mit $a_n < 0$ für alle n gilt $\lim_{n\to\infty} a_n < 0$.

(b) Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$ gilt:

$$f \text{ stetig in } \; a \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$