Prüfungsausarbeitung

5. Termin 2013-06-14

[1] (a) Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ heißt konvergent, falls die Folge der Partialsummen $S_m = \sum_{k=0}^{m} a_n$ konvergiert.

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Fkt, a ein Berührpkt von D.

$\lim_{x \to a} f(x) = b :\iff \forall$ Folgen (x_n) in D mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to b$ (in $\mathbb{R}$)

$b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

(b) Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Fkt, $a \in D$. Es gilt

f stetig in $a \iff \forall$ Folgen (x_n) in D mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to f(a)$

Beweis: ($\Longrightarrow$) Sei $(x_n)_n$ Folge in D mit $x_n \to a$. Sei $\varepsilon > 0$

$\Longrightarrow \exists \delta > 0 \ \forall x \in D, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$\overset{x_n \to a}{\Longrightarrow} \exists N \ \forall n \geq N \ |x_n - a| < \delta$

Also insges. $\forall n \geq N \ |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

($\Longleftarrow$) Indir. ang. f nicht stetig bei a

$\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in D, |x - a| < \delta$ aber $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$

Fixiere ε & wähle sukzessive $\delta = 1/n$, damit erhalten wir eine Folge (x_n) in D mit $|x_n - a| < 1/n$, also $x_n \to a$ aber $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ also $f(x_n) \not\to f(a)$

Beschreibung: ($\Rightarrow$) Eine Folge $x_n \in D$ mit $x_n \to a$ kommt in jede δ-Umgebung von a und wegen der Stetigkeit kommt $f(x_n)$ in jede vorgegeben ε-Umgebung von $f(a)$ also $f(x_n) \to f(a)$

($\Leftarrow$) Falls f unstetig bei a kann mittels „Versage-ε" eine Folge konstruiert werden mit $x_n \to a$, $f(x_n) \not\to f(a)$

$\boxed{1}$ (c) Cauchy-Prinzip f. Reihen: Eine reelle Reihe $\sum a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m \geq N$

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

Beweis: $\sum a_n$ konv $\Leftrightarrow$ $s_m = \sum_{k=0}^{m} a_k$ konv

Def vp(1)(a)

$\Leftrightarrow$ s_m ist Cauchy-Folge

Vollständigkeit

Def CF

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m-1 \geq N$

$|s_n - s_{m-1}| < \varepsilon$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m-1} = \sum_{m}^{n} a_k$$

oBdA $n \geq m-1$

$\boxed{2}$ (a)

$$\frac{n^2+1}{n^2} = \frac{1 + \overbrace{1/n^2}^{\to 0}}{1} \to 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}} \to \sqrt{1} = 1$$

$\sqrt{\ }$ stetig

$$\sqrt{n^2-n} + \sqrt{n} \overset{\sqrt{\ } \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \sqrt{n^2-n} \to \infty,\ \sqrt{n} \to \infty$$

$$n(n-1) \to \infty \quad \overset{\text{Summe}}{\Longrightarrow} \quad \sqrt{n^2-n} + \sqrt{n} \to \infty$$

$\to\infty$ $\to\infty$

uneigtl. Limes

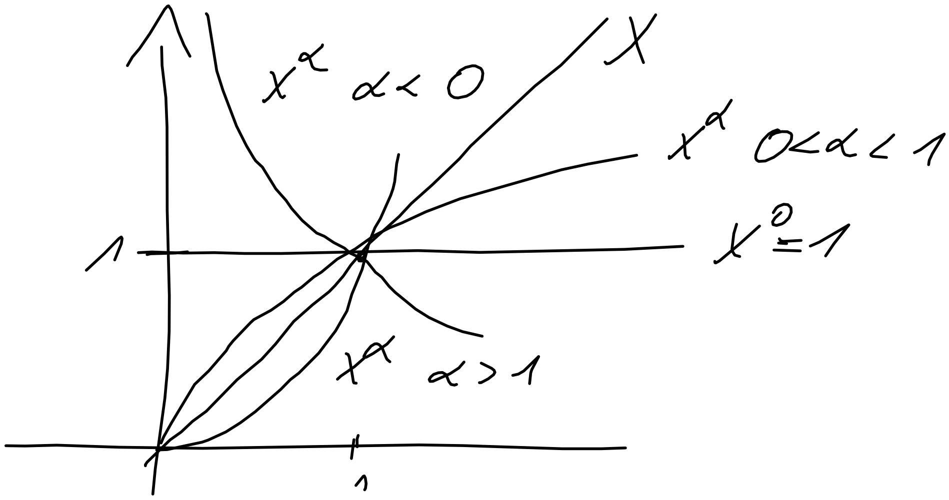
$\to \infty$

(b) unstetig ohne Sprünge: $f(x) = \begin{cases} \sin 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

stetig & unbeschränkt: $f(x) = x$

bijektiv & mit Bild $f(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$: $\operatorname{arctg}(x)$

(c)



(d)

$$\frac{(n+2)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n} \underbrace{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n}_{\geq 1} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \sum \frac{1}{n} \text{ divergente Minorante}$$

$$\Rightarrow \underline{\sum \frac{(n+2)^n}{n^{n+1}} \text{ div}}$$

[3] (a) $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konv abs $\forall x \in \mathbb{R}$

$\underline{\exp(-x) = 1/\exp(x)}$, denn aus der Funktionalgl. $[\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)]$

folgt $1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x)\exp(-x)$ (*)

$\Rightarrow \exp(-x) = 1/\exp(x)$

$\underline{\exp(x) > 0}$, denn für $x \geq 0 \Rightarrow \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \ldots \geq 1 > 0$

und für $x < 0 \Rightarrow -x > 0$ und

$$\exp(x) = 1/\exp(\underbrace{-x}_{>0}) > 0$$

$\boxed{3}$ (b)

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \operatorname{Re}\left(\sum \frac{(ix)^k}{k!}\right)$$

$$\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \operatorname{Im}\left(\text{——"——} \right)$$

Es gilt $i^n = \begin{cases} 1 & n = 4l \\ i & n = 4l+1 \\ -1 & n = 4l+2 \\ -i & n = 4l+3 \end{cases} \quad l \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow e^{ix} = \left(1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\cos(x)} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin(x)}$$

(c) Vollständigkeit. Unter der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ versteht man intuitiv, dass $\mathbb{R}$ keine „Lücken" hat. Formal definiert haben wir sie über die Supremumseigenschaft (auch Ordnungsvollständigkeit):

Jede nicht leere nach oben beschränkte TM von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum

Äquivalente Formulierungen sind das Cauchy-Prinzip für Folgen (CF $\Rightarrow$ konvergent), das Intervallschachtelungsprinzip, der Satz von Bolzano-Weierstraß sowie die Tatsache, dass jede absolut konv. Reihe konvergiert.

Resultate: Folgen siehe oben oder Konvprinzip für beschr. & monotone Folgen
Reihen siehe oben oder CP
stetige Fkt: Zwischenwertsatz

$\boxed{14}$ (a) Ja, denn $a_n \geq 0 \Rightarrow S_n$ monoton wachsend
S_n beschränkt $\Rightarrow S_n$ konvergent

Konvergenzprinzip f. monotone, besch. Folge

(b) Ja, denn $x_n \to a \Rightarrow$ alle bis auf endlich viele der x_n's in jedem $U_\varepsilon(a)$
$\Rightarrow$ alle bis auf endl. viele $(a_{n_k})_k$ einer jeden TF in $U_\varepsilon(a)$