Prüfungsausarbeitung

4. TERMIN } 2013-03-01

GRUPPE A

$\boxed{1}$ (a) •) Eine Folge (a_n) heißt uneigentlich konvergent bzw bestimmt divergent gegen $+\infty$, falls

$$\forall C>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ a_n\geq C\ \forall n\geq N$$

•) Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ konvergiert gegen $z\in\mathbb{C}$, falls

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ |z_n-z|<\varepsilon\ \forall n\geq N$$

[Betrag in $\mathbb{C}$]

•) Eine reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt konvergent, falls die Folge der Partialsummen $S_k=\sum_{n=0}^{k} a_n$ konvergiert.

•) Die Zahl π ist [in unserem Zugang] definiert als das Doppelte der 1. Nullstelle der Cosinusfunktion für $x>0$. [oder der eindeutigen Nullstelle in $[0,2]$]

(b) $\underline{zz:}$ a HW von (a_n) $\Longleftrightarrow$ Jede ε-Umgebung von a enthält unendl. viele der a_n

d.h.: $\forall\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists m\geq N:\ |a_m-a|<\varepsilon$

„$\Rightarrow$": a HW $\overset{\text{Def HW}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ TF $(a_{n_k})_k$ mit $a=\lim_k a_{n_k}$

Sei nun $\underline{\varepsilon>0}$ $\overset{\text{Def Konv}}{\Longrightarrow}$ $\exists K\ \forall k\geq K\ |a_{n_k}-a|<\varepsilon$ $(*)$

Sei $N \in \mathbb{N} \underset{\text{Def TF}}{\Longrightarrow} \exists \tilde{k} \geq K$ mit $n_{\tilde{k}} \geq N$

Setze $m = n_{\tilde{k}} \overset{(*)}{\Longrightarrow} |a_m - a| < \varepsilon$

„$\Leftarrow$": Wir verwenden die Bedingung auf der rechten Seite, um eine gegen a konv. TF zu konstruieren

Es gilt ja $\forall \varepsilon > 0 \; \forall N \; \exists m \geq N : |a - a_m| < \varepsilon$

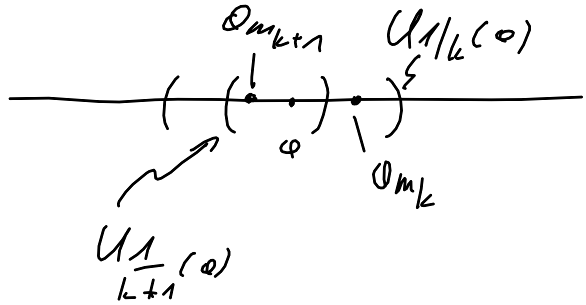
Setze sukzessive $\varepsilon = \frac{1}{k}$ $(k \geq 1) \Longrightarrow \exists m_k : |a_{m_k} - a| < 1/k$

Die Folge $(a_{m_k})_k$ konvergiert dann gegen a

[Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $1/N < \varepsilon \Rightarrow |a_{m_k} - a| < \frac{1}{N} < \varepsilon$
$\forall k \geq N$]

$\square$

Skizze zur Konstruktion



Die Bedingung wird verwendet um in jedem $U_{1/k}(a)$ ein Folgenglied zu finden. Diese bilden dann eine gegen a konv. TF.

Stichwort: Zoomen mit Umgebungen gegen a, die jeweils ein Folgenglied enthalten.

$\boxed{1}$ (c) Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte (reelle) Folge hat eine konv. TF (bzw. einen HW)

Cauchy Prinzip: Für reelle Folgen gilt:

(a_n) konvergiert $\Longleftrightarrow$ (a_n) ist Cauchy-Folge

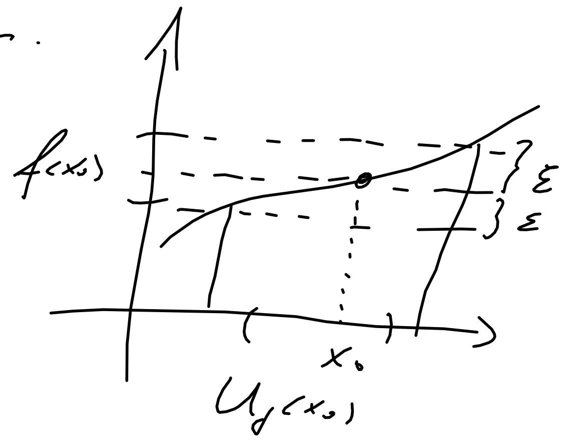
wobei eigentlich „$\Leftarrow$" der Witz ist

$\boxed{2}$ (a) $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, falls
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(b) Grob bedeutet es, dass bei kleinen Änderungen der Argumente in der Nähe von x_0 die Funktionswerte nur wenig von $f(x_0)$ abweichen.

Genauer (und hier ist die Reihenfolge der Quantoren entscheidend): Für jede vorgegebene „Toleranzgrenze" ε für die Funktionswerte gibt es ein „Sicherheitsintervall" $U_\delta(x_0)$, sodass Funktionswerte für Argumente im Sicherheitsintervall innerhalb der Toleranzgrenze liegen.

Graphisch



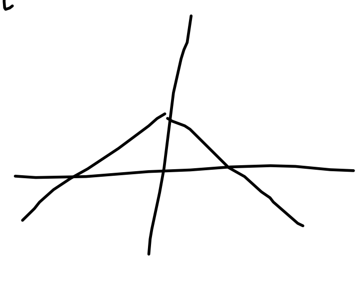
(c) stetig auf ganz $\mathbb{R}$
Polynome, exp

definiert auf $\mathbb{R}$ und
unstetig: $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} \sin 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist in $x_0 = 0$ nicht definiert, daher ist die Frage nach der Stetigkeit dort sinnlos

$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^3} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$; ja denn $|g(x)| \leq |x|$ und daher $g(x) \to 0 = g(0)$ für $x \to 0$

h:



Ja, denn $\lim\limits_{x \nearrow 0} h(x) = 1 = \lim\limits_{x \searrow 0} h(x)$

$\boxed{12}$ (e) Sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$ und sei $g: E \to \mathbb{R}$ mit $E \supseteq f(D)$ stetig in $f(a) \in E$. Dann ist $g \circ f$ stetig in a

Zum Beweis verwenden wir das Folgenkriterium: Sei (x_n) Folge in D mit $x_n \to a$

$$\overset{f \text{ stetig in } a}{\Longrightarrow} \quad f(x_n) \to f(a)$$

$y_n := f(x_n)$ ist Folge in E mit $y_n \to f(a)$

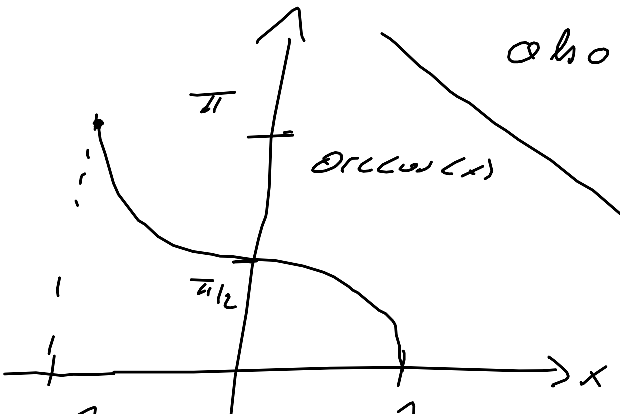
$$\overset{g \text{ stetig in } f(a)}{\Longrightarrow} \quad g(y_n) = g(f(x_n)) \to g(f(a))$$

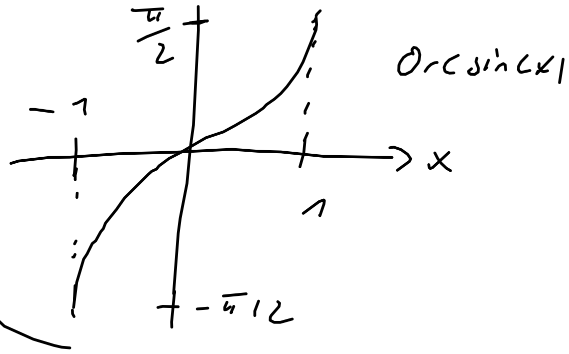
$$\Longrightarrow \quad g \circ f \text{ stetig in } a \in D \qquad \square$$

$\boxed{13}$ (a) Die Arcusfunktionen sind die mittels Umkehrsatz definierten Umkehrfkt von sin & cos: Genauer

- arcsin ist die Umkehrfkt des sin auf $[-\pi/2, \pi/2]$

also arcsin: $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$





- arccos ist die Umkehrfkt des cos auf $[0, \pi]$

arccos: $[-1, 1] \to [0, \pi]$

3 (b) • $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \underbrace{\frac{n}{(1+n)(2+n)}}_{a_n}$ ist konv. nach Leibniz, denn $a_n \to 0$ $\left[\frac{n}{n^2+3n+2} \to 0\right]$

und a_n mon. fallend $\left[(n+1)^2 \leq n(n+3) \text{ für } n \geq 1 \Rightarrow \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} \leq \frac{n}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n\right]$

nicht abs. konv. nach Minorantentest, denn

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)} \geq \frac{n}{(n+2)^2} \overset{n\geq 2}{\geq} \frac{n}{(n+n)^2} = \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{n} \;\&\; \sum \frac{1}{n} \text{ div.}$$

• $\sum \frac{(2+n)^n}{n^{n+1}}$ div. nach Minorantentest, denn

$$\frac{(2+n)^n}{n^{n+1}} = \underbrace{\left(\frac{2+n}{n}\right)^n}_{\geq 1} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} \;\&\; \sum \frac{1}{n} \text{ div}$$

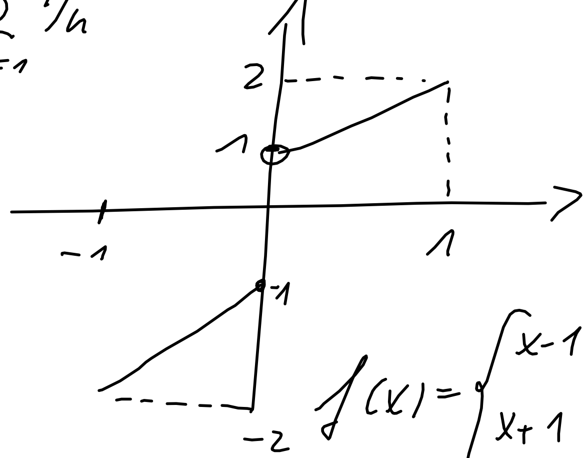
(c) $$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{n(n-1)\cdots 2\cdot 1} = \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\geq 1}\,\underbrace{\frac{n}{n-2}}_{\geq 1} \cdots \underbrace{\frac{n}{2}}_{\geq 1} \cdot n \geq n \to \infty$$

$$b_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}\right) \to \infty$$

4 (a) falsch; Gegenbsp $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$

(b) falsch, Gegenbsp

Stetigkeit war ja nicht verlangt



$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$$

Gruppe B

[1] (a)

- $a \in \mathbb{R}$ heißt HP der Menge A, falls jedes $U_\varepsilon(a)$ unendlich viele Pkte aus A enthält.

- $f: D \to \mathbb{R}$ heißt glm. stetig, falls
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in D: |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

- Eine reelle Folge $(a_n)_n$ heißt bestimmt div oder uneig. konv gegen $-\infty$, falls
$$\forall C > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \quad a_n < -C$$
$$[\text{bzw } -a_n > C, \text{ dh } a_n \to +\infty]$$

- Die Eulersche Zahl e ist [in unserem Zugang] definiert als
$$e := \exp(1)$$
[wobei $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ die Exponentialfkt, d.h.
$$e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k! \quad]$$

(b) Eine Fkt $f: D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$ $\Longleftrightarrow$ $\forall$ Folgen (a_n) in D mit $a_n \to x_0$ gilt $f(a_n) \to f(x_0)$

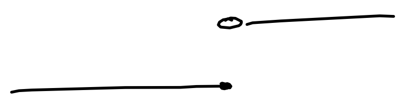
[1] (c) siehe Gruppe A [1] (b)

[2] (a) siehe Gruppe A [2] (a)

[2] (b) Grundsätzlich bedeutet das, dass kleine Änderungen der Argumente nahe x_0 große Änderungen der Funktionswerte hervorrufen können.

Es gibt 2 „Prototypen" von Unstetigkeiten

1) Sprünge, zB $f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$



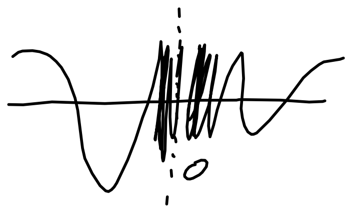
f ist unstetig in $x_0 = 0$, denn sei $\varepsilon < 1$, dann $\not\exists\, \delta > 0$ mit $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |f(x_0)| < 1$

Jede $U_\delta(0)$ enthält immer ein $x > 0 \Rightarrow f(x) = 1$

2) Wilde Oszillation, zB $f(x) = \begin{cases} \sin 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

ist unstetig in $x_0 = 0$, weil f in jedem $U_\delta(0)$ alle Werte in $[-1, 1]$ annimmt

[n.B.: $f(x) = \sin 1/x$ ist nicht stetig nach $x_0 = 0$ fortsetzbar]

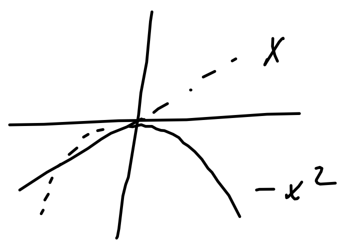


[2] (c) siehe Gruppe A, [2] (c)

(d) f ist stetig in $x_0 = 0$, denn $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x)$

g ist stetig in $x_0 = 0$, denn

$|g(x)| \le |x^2| \to 0 \quad (x \to 0)$



h ist in $x_0 = 0$ nicht definiert, daher ist die Frage sinnlos.

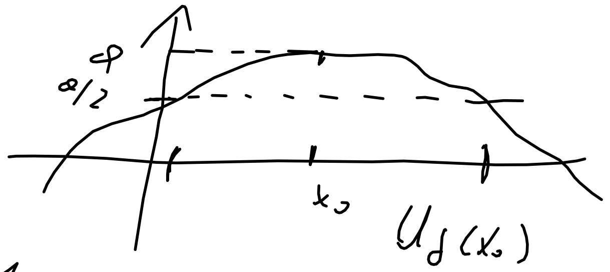
$\boxed{12}$ (e) Sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und $f(x_0) \neq 0$.
Dann $\exists \delta > 0$ sodass $f(x) \neq 0 \ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D$

Beweis. Sei o.B.d.A $a := f(x_0) > 0$ [sonst analog]

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D \ |f(x) - a| < a/2$

$\Rightarrow |f(x)| \geq |f(x_0)| - |f(x) - f(x_0)| = a - a/2 = a/2 > 0$ $\square$

[Skizze zum Beweis



]

$\boxed{13}$ (a) $a_n = \dfrac{n - \sqrt{n} - n}{\sqrt{n} + \sqrt{\sqrt{n} + n}} = \dfrac{-1}{1 + \sqrt{\frac{1}{\sqrt{n}} + 1}} \to -1/2$

$b_n = \dfrac{3^n}{n!} = \dfrac{3 \cdot 3 \cdots 3}{1 \cdot 2 \cdots n} = 3 \, \dfrac{3}{2} \cdot 1 \, \underbrace{\dfrac{3}{4}}_{\leq 1} \underbrace{\dfrac{3}{5}}_{\leq 1} \cdots \underbrace{\dfrac{3}{n-1}}_{\leq 1} \, \dfrac{3}{n} \leq \dfrac{9}{2} \, \dfrac{3}{n} \to 0$

$\boxed{13}$ (b) siehe Gruppe A $\boxed{3}$ (a)

(c) $\sum \left(\sqrt[n]{n} - 1/2\right)^n$ ist abs konv. nach WT, denn
$|a_n|^{1/n} = \sqrt[n]{n} - 1/2 \to 1 - 1/2 = 1/2 < 1$

$\sum \dfrac{(-1)^n n}{(n+2)(n+1)}$ siehe Gruppe A $\boxed{3}$ (b)

$\boxed{14}$ (a) falsch; Gegenbsp $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$
ist stetig aber nicht glm stetig

[$x_n = 1/n$, $y_n = 1/2n \Rightarrow |x_n - y_n| = 1/2n \to 0$ aber
$|f(x_n) - f(y_n)| = n \to \infty$]

(b) Richtig, denn $a_n \geq 0 \ \forall n \Rightarrow \sum |a_n| = \sum a_n$ konv
[Und wären nur endl. viele $a_n < 0$, dann würde
das an der Konvergenz von $\sum |a_n|$ nichts ändern.]