Prüfungsausarbeitung

2. TERMIN (28.9.2012)

GRUPPE A

$\boxed{1}$ (a) (Häufungswert) Sei $(a_n)_n$ reelle Folge. Ein Pkt $a \in \mathbb{R}$ heißt HW von (a_n), falls es eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ gibt mit $a_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$

[oder alternativ, siehe VO $\boxed{1}$ Prop. 3.9: ... falls
$\forall \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists m \geq N \quad |a_m - a| < \varepsilon$]

(Grenzwert einer Funktion) Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ eine Fkt und sei a Berührpunkt von D. Wir schreiben

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = c \quad (\in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$, falls

$\forall$ Folgen $(x_n)_n \in D$ mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to c$

(Sinus) $\quad \sin(x) := \operatorname{Im}(e^{ix}) \quad (x \in \mathbb{R})$

Komplexe Exponentialfkt
$e^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k / k!$

[1] (b) (Intervallschachtelungsprinzip)

Sei (I_n) eine Folge abg. & beschränkte Intervalle, sodass

(i) $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$

(ii) $\operatorname{diam} I_n \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Dann existiert genau ein a mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{a\}$

Beweis (Existenz) Wir schreiben $I_n = [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$

(1) Die Folge $(a_n)_n$ ist eine Cauchy-Folge: Sei $\varepsilon > 0$

$\overset{(ii)}{\Longrightarrow} \exists N \ \forall n \geq N \ \operatorname{diam} I_n = b_n - a_n < \varepsilon$

Seien $m, n \geq N \overset{(i)}{\Longrightarrow} a_m, a_n \in I_N$

$\Longrightarrow |a_n - a_m| \leq \operatorname{diam} I_N < \varepsilon$

(2) Cauchy-Prinzip $\Longrightarrow \exists a := \lim a_n$

(3) $a \in I_k \ \forall k \in \mathbb{N}$: Sei k beliebig $\Rightarrow \forall n \geq k$:

$$\begin{array}{ccccccc} a_k & \leq & a_n & < & b_n & \leq & b_k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & (n \to \infty) \\ a_k & & a & & b_k & & \end{array} \quad \Longrightarrow a \in [a_k, b_k] = I_k$$

(Eindeutigkeit) Folgt sofort aus (ii): Seien $a, b \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$

$\Longrightarrow 0 \leq |a - b| \leq \operatorname{diam} I_n \to 0 \Rightarrow a = b$. $\square$

$\boxed{1}$ (c) (log) Der Logarithmus ist definiert als die Umkehrfkt der (stetigen, streng monoton wachsenden) Exponentialfkt $\exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ [via Umkehrsatz]

Daher ist $\log: (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig & str. mon. wachsend

Außerdem gilt die Funktionalgl. $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ [folgt sofort aus $e^{x+y} = e^x e^y$]

$\boxed{2}$ (a) (Stetigkeit vs. glm Stetigkeit) Sei $f: D \to \mathbb{R}$

f stetig auf $D :\Longleftrightarrow \forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in D$ mit

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

f glm stetig auf $D :\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in D$ mit

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Stetigkeit in einem Pkt $x \in D$ bedeutet, dass wenn y nahe x liegt, dann auch $f(y)$ nahe bei $f(x)$ im präzisen Sinne von $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in D\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Ist f stetig in D gilt diese Eig. $\forall x \in D$. Dabei muss i.a. bei fixem $\varepsilon > 0$ das zugehörige δ abhängig von x gewählt werden.

Das ist nun bei der glm. Stetigkeit anders, denn die Def. besagt, dass bei gegebenem $\varepsilon > 0$ das δ unabhängig vom Pkt x gewählt werden kann. [Es hängt nur vom ε ab! — Reihenfolge der Quantoren]

Daher ist die glm. Stetigkeit der stärkere Begriff, d.h. es gilt

$$f \text{ glm. stetig auf } D \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} f \text{ stetig auf } D$$

Gegenbsp. $f(x) = 1/x$ auf $(0,\infty)$

[Es gilt jedoch "$\Leftarrow$" auf kp Intervallen.]

$\boxed{2}$(b) (Konvergent vs. abs. Konvergent) Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- konvergiert, falls die Folge der Partialsummen
$$s_m := \sum_{n=0}^{m} a_n \quad \text{konvergiert}$$
- konvergiert absolut, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Es gilt $\sum a_n$ abs konv $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ $\sum a_n$ konvergent

[Cauchyprinzip f. Reihen oder Vollständigkeit]

Gegenbsp: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist konv. aber nicht abs. konv.

$\boxed{2}$ (c) (Umkehrsatz) Sei I ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig & streng mon wachsend [fallend]. Dann gilt

(i) $f(I)$ ist ein Intervall (ii) $f: I \to f(I)$ ist bijektiv

(iii) $f^{-1}: f(I) \to I$ ist stetig & str. mon wachsend [fallend]

Die Stetigkeit wird nur für (i) verwendet.
[D.h. ist f nur str. mon. und nicht notwendigerweise stetig dann gilt noch wie vor (ii) & (iii), aber f^{-1} ist nicht notwendigerweise auf einem Intervall definiert.]

3 (a) Indirekt ang. f unstetig in a $\Longrightarrow$

$$\neg\left(\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in D,\ |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon\right)$$

$$\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x\in D,\ |x-a|<\delta \text{ aber } |f(x)-f(a)|\geq \varepsilon$$

Fixiere dieses ε und wähle sukzessive $\delta = 1/n$. Erhalte Folge $(x_n)_n \in D$ mit $|x_n - a| < 1/n$, also $x_n \to a$, aber $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$, also $f(x_n) \not\to f(a)$

3 (b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ $(x \in \mathbb{R}\setminus\{1\})$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig fortsetzbar

denn $f(x) = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1$; setze $f(1) = 2$

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ist in $x_0 = 1$ nicht stetig fortsetzbar weil unbeschränkt.

(c) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$. Sei k fix, dann $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \geq \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$

$$\Longrightarrow \frac{e^x}{x^k} \geq \frac{x^{k+1}}{x^k (k+1)!} = \frac{x}{(k+1)!} \to \infty \ (x\to\infty)$$

Interpretation: e^x wächst schneller als jede Potenz

(d) (i) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{3^k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^k = \dfrac{1}{1-1/3} = 3/2$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2} - 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$\boxed{3}$ (d) (ii) $\sqrt{9n^2+2n+1}-3n = \frac{9n^2+2n+1-9n^2}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} = \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}$

$$\longrightarrow \frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad (n\to\infty)$$

$\boxed{4}$ (a) richtig; ang. nicht, d.h. ang. a ist HW von $(a_n)_n$ aber $a_n \not\to a$, dann gibt es eine TF $(a_{n_k})_k$, die nicht gegen a konvergiert. Diese ist beschränkt und hat daher nach Bolzano Weierstraß einen HW $b\neq a$; b ist HW von $(a_n)_n$ ↯

(b) Die Aussage ist unsinnig [also weder richtig noch falsch] da $x_0=0 \notin D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

GRUPPE B

$\boxed{1}$ (a) (Beschränkte Fkt)

$f: \mathbb{R}\supseteq D \to \mathbb{R}$ heißt beschr. $:\Leftrightarrow \exists C>0: |f(x)|\leq C \; \forall x\in D$

(b) (Cosinus) $\cos(x) := \mathrm{Re}(e^{ix}) \quad (x\in\mathbb{R})$

komplexe exp-Fkt

(c) (Char Fkt) Sei $M\subseteq\mathbb{R}$.
Die char. Fkt χ_M von M ist definiert als

$$\chi_M:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \chi_M(x)=\begin{cases}1 & x\in M\\ 0 & x\notin M\end{cases}$$

(d) (allg. Potenz)

$$x^\alpha := \exp(\alpha \log(x))$$

$\boxed{1}$ (b) $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $(x \in \mathbb{R})$ [Reihe abs konv $\forall x \in \mathbb{R}$]

exp ist stetig, positiv & str. mon wachsend. Es gilt die Funktionalgl. $e^{x+y} = e^x e^y$ $(\forall x, y \in \mathbb{R})$

$\boxed{1}$ (c) siehe Gruppe A, $\boxed{1}$ (b)

$\boxed{2}$ (a) (Folgenstetigkeit) [Rückrichtung zu A, $\boxed{3}$ (a)]

Sei (x_n) Folge in D mit $x_n \to a$. Sei $\varepsilon > 0$.

f stetig $\Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall x \in D, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$(x_n \to a) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |x_n - a| < \delta$

Also insgesamt $\forall n \geq N \Rightarrow |f(x_n) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$ $\square$

$\boxed{2}$ (b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{e^k} = 0$ [siehe Gr A $\boxed{3}$ (c)]

(c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ $(x \neq 2)$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ und stetig fortsetzbar nach $x_0 = 2$; da $f(x) = x + 2$ setze $f(2) = 4$

$f(x) = \frac{1}{x-2}$ $(x \neq 2)$ ist stetig & nicht stetig fortsetzbar nach $x_0 = 2$ weil unbeschränkt.

(d) $\sqrt{9n^2+n+3} - 3n = \frac{9n^2+n+3-9n^2}{\sqrt{9n^2+n+3}+3n} = \frac{1+3/n}{\sqrt{9+1/n+3/n^2}+3} \to \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

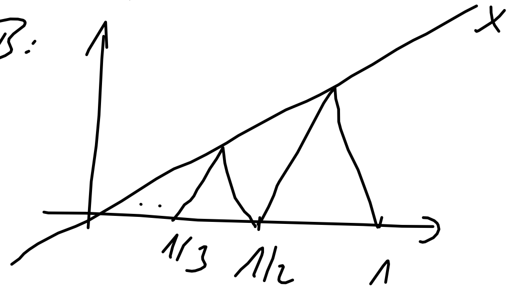
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 - 1 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{1/2}}$

$\boxed{3}$ (a) = Gruppe A $\boxed{2}$ (c)
(b) = Gruppe A $\boxed{2}$ (b)
(c) = Gruppe A $\boxed{2}$ (a)

$\boxed{4}$ (a) falsch; Gegenbsp $x_n = \begin{cases} 1/n & n \text{ gerade} \\ n & n \text{ ungerade} \end{cases}$

hat den einzigen HW 0, ist aber unbeschr $\Rightarrow$ nicht konv

(b) Abgesehen davon, dass die Formulierung schwammig ist, ist sie auch falsch. Es gibt Fkt die stetig sind, aber deren Graph unbeschränkte (unendliche) Länge hat, z.B.:



Länge bis $1/n = \ell(1/n) \geq 2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} \longrightarrow \infty$