4.13 BEM & WARNUNG (Reihenkonv. ist instabil)

Wie bereits in 4.1. angekündigt hängen Limes und sogar Konvergenzverhalten von Reihen von der Summationsreihenfolge ab.

(i) Um dieses (unerwünschte) Phänomen genauer zu untersuchen benötigen wir die folgende Notation:

Sei $\sum a_n$ eine Reihe und $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ eine Umordnung von $\sum a_n$

(ii) Umordnung konvergenter Folgen kann den Limes ändern.

Sei z.B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ die alternierende harm. Reihe

konv. wegen 4.11

Gruppieren wir die Terme um, so ergibt sich

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{1/2} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}_{=1/6} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}}_{=1/10} - \frac{1}{12} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{14}}_{=1/14} - \frac{1}{16} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right)$$

und wir erhalten die Hälfte der ursprünglichen Summe.

(iii) Umordnung konv. Reihen kann sogar zu Divergenz führen!

Wir ordnen nochmals die alt. harm. Reihe um, und zwar so, dass die negativen Terme immer später und später auftreten ($n \geq 2$):

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{>0}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)}_{>2/8=1/4}-\frac{1}{6}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)}_{>4/16=1/4}-\frac{1}{8}+\ldots$$

$9=2^3+1$ $\quad$ $15=2^{3+1}-1$ $\quad$ $8=2\cdot 3+2$

#Terme $= \frac{2^{n+1}-2^n}{2} = \frac{2^n(2-1)}{2} = 2^{n-1}$

$$\ldots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)}_{\geq 2^{n-1}/2^{n+1}=1/4}-\frac{1}{2n+2}$$

$$> \frac{n-1}{4}-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n+2}\right) > \frac{n-1}{4}-\frac{n-1}{6}=\frac{n-1}{12}$$

der Klammern mit pos. Termen $\leq n-1$ = # der neg. Terme

Also müssen die Partialsummen einer solchen Umordnung unbeschränkt sein $\Rightarrow$ Reihe divergent

(iv) FAZIT: Wir benötigen einen stärkeren Konvergenzbegriff der solche Effekte ausschließt!

4.14 DEF (Absolute Konvergenz) Eine Reihe $\sum a_n$ heißt absolut konvergent, falls $\sum |a_n|$ konvergiert

Reihe der Absolutbeträge der Glieder

4.15 BEM (zur abs. Konv.)

(i) Wegen $|a_n| \geq 0$ ergibt 4.6.

$$\sum |a_n| \text{ konv} \Leftrightarrow s_m=\sum_{n=0}^{m} |a_n| \text{ beschränkt}$$

(ii) $\boxed{\sum a_n \text{ konv} \not\Rightarrow \sum |a_n| \text{ konv}}$ denn die harm. Reihe ist ein Gegenbsp.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ konv. [4.11] aber } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ div [4.7(iii)]}$$

Die Umkehrung ist aber richtig ← abs Konv ist also wirklich stärker als bloße Konvergenz

4.16 PROP (abs Konv ⇒ Konv)

Jede absolut konv. Reihe konvergiert

Beweis. [CP für Reihen & Δ-Ungl.]

Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt mit 4.3. für $\sum |a_n|$: $\exists N \; \forall n \geq m \geq N$

$$\varepsilon > \sum_{k=m}^{n} |a_k| \geq \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \quad \overset{4.3 \text{ für } \sum a_n}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ konv}$$

Δ-Ungl f. endl. Summe von rechts nach links gelesen

$\square$

4.17 THM (Umordnungssatz) Abs Konv. ist stabil bzgl. Umordnungen

Sei $\sum a_n$ absolut konvergent. Dann ist jede Umordnung $\sum a_{\tau(n)}$ abs. konvergent und konvergiert gegen denselben Limes.

Beweis. $4.16 \Rightarrow \exists s := \lim \sum a_n$. Sei $\varepsilon > 0$

[Jetzt in 3 Schritten ins Ziel]

(1) Abschätzung für den Reihenrest.

$\overset{4.3}{\underset{\sum|a_n|}{\Longrightarrow}} \exists N \in \mathbb{N} \ \forall \ell \geq N \quad \sum_{k=N}^{\ell} |a_k| < \varepsilon/2$

2.28 [vgl. auch 2.31]

$\Big\downarrow \ell \to \infty$

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon/2 \quad (*)$$

Daher $\forall m \geq N$

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{N-1} a_k\right| = \left|\sum_{k=N}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=N}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon/2$$

$$\underset{(m\to\infty)}{\overset{2.28}{\Longrightarrow}} \quad \left|S - \sum_{k=0}^{N-1} a_k\right| \leq \varepsilon/2 \qquad (**)$$

(2) $\lim \sum a_{\tau(n)} = S$.

Sei $M \in \mathbb{N}$ so dass $M \geq N$ und so dass $\{\tau(0), \tau(1), \dots \tau(M)\} \supseteq \{0, 1, \dots, N\}$

möglich, weil τ bijektiv

Dann gilt $\forall m \geq M$

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_{\tau(k)} - S\right| \leq \left|\underbrace{\sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{m} a_{\tau(k)}}\right| + \left|\sum_{k=0}^{N-1} a_k - S\right|$$

wiedereinmal dieser Trick: Einschieben & Δ Ugl

alle Terme ≥ 0

$$\leq \left|\sum_{k=N}^{m} a_{\tau(k)}\right| \overset{(\Delta)\text{Ugl } m}{\leq} \sum_{k=N}^{m} |a_{\tau(k)}| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$$

$$\overset{(*),(**)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)} = S}$$

(3) $\sum a_{\tau(n)}$ konv. absolut. Folgt sofort aus (1) & (2) für die Reihe $\sum b_n$ mit $b_n := |a_n|$. $\square$

4.18 MOTIVATION (Absolute Konvergenz: schön, aber wie?)

Nachdem wir gesehen haben, dass abs. Konvergenz der richtige Begriff ist, um Reihen gut umgehen zu können – manchmal sagt man für bloss konvergenten R. auch BEDINGT Konv. – stellt sich die wichtige Frage: Wie sehe ich einer Reihe an, ob sie absolut konvergiert? Dazu gibt es einige in der Praxis recht gut einsetzbare TESTS; diese leiten wir nun her.

4.19 PROP (Vergleichstests: Majoranten- und Minorantenkriterium)

(i) Sei $\sum c_n$ konvergent und $c_n \geq 0$. ($\sum c_n$ ist eine konv. Majorante)

$$|a_n| \leq c_n \text{ für fast alle } n \Longrightarrow \sum a_n \text{ absolut konv.}$$

(ii) Sei $\sum d_n$ divergent und $d_n \geq 0$ ($\sum d_n$ ist div. Minorante)

$$a_n \geq d_n \text{ für fast alle } n \Longrightarrow \sum a_n \text{ divergent}$$

Beweis. (i) OBdA können wir annehmen, dass $|a_n| \leq c_n \ \forall n$ gilt (der Reihenanfang ist egal; vgl. 4.4(ii))

Wir verwenden 4.6: ($\sum |a_n|$ ist Reihe mit nichtneg. Termen)

$$\forall m \text{ gilt } 0 \leq s_m = \sum_{n=0}^{m} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{m} c_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$$\Longrightarrow s_m \text{ beschränkt} \overset{4.6}{\Longrightarrow} \sum |a_n| \text{ konv.}$$

(ii) Indirekt ang. $\sum a_n$ konvergiert $\overset{(i)}{\Longrightarrow} \sum d_n$ konvergent $\lightning$

$\square$

4.20 Bsp (Vergleichstest)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ divergiert, denn $\forall n \geq 1: \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$

$\sum \frac{1}{n}$ div (4.7(iii)) $\overset{4.19}{\underset{(ii)}{\Longrightarrow}} \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ div

(ii) Sei (a_n) eine reelle Folge mit $|a_n| < 1 \ \forall n$. Sei $q \in (0,1)$, dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ ist absolut konvergent, denn

$|a_n q^n| \leq q^n$; $\sum q^n$ konv [2.37] $\overset{4.19}{\underset{(i)}{\Longrightarrow}} \sum a_n q^n$ konv.

4.21 Prop (Wurzeltest) Die reelle Reihe $\sum a_n$ ist

(i) absolut konvergent, falls $\exists \Theta: 0 < \Theta < 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \Theta \quad \forall n \geq n_0$$

THETA

(ii) divergent, falls $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n

Beweis [sehr einfach...]

(i) $|a_n| \leq \Theta^n$ für fast alle n, $\sum \Theta^n$ konv [2.37]

$\overset{4.19}{\underset{(i)}{\Longrightarrow}} \sum |a_n|$ konv.

(ii) $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele $n \Rightarrow a_n \not\to 0$

$\overset{4.5}{\underset{\text{Dodel-Test}}{\Longrightarrow}} \sum a_n$ divergent. $\square$

4.22 BEM (zum Γ-Test) (i) In der Praxis tritt oft auf, dass $\exists Q := \lim |a_n|^{1/n}$. Dann gilt

$Q < 1 \implies$ Bedingung in 4.21(i) $[\Theta = Q + \varepsilon < 1] \implies \sum a_n$ abs. konv.
$Q > 1 \implies$ Bedingung in 4.21(ii) $\implies \sum a_n$ div

(ii) WARNUNG! Der Γ-Test benötigt wirklich die Abschätzung

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le \rho < 1 \text{ und nicht nur } \sqrt[n]{|a_n|} \le 1.$$

$|a_n|^{1/n}$ hat endlichen Abstand zu 1

$|a_n|^{1/n}$ kann 1 beliebig nahe kommen

Es gilt z.B. nämlich $(n>1)$

$1 > (1/n^2)^{1/n} \to 1$ und $\sum \frac{1}{n^2}$ konv. [4.9.(i)]

$1 > (1/n)^{1/n} \to 1$ und $\sum 1/n$ div [4.7(ii)]

4.23 PROP (Quotiententest) Sei $a_n \neq 0$ für fast alle n. Die reelle Reihe $\sum a_n$

(i) konvergiert absolut, falls $\exists \Theta: 0 < \Theta < 1 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \le \Theta \quad \forall n \ge n_0$$

(ii) divergiert, falls

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \ge 1 \quad \forall n \ge n_0$$

Beweis: (i) $\forall n \geq n_0$ gilt

$$|a_{n+1}| \leq \theta |a_n| \leq \theta^2 |a_{n-1}| \leq \ldots \leq \theta^{n-n_0} |a_{n_0}|$$

$$\Longrightarrow \sum \theta^{n-n_0} |a_{n_0}| = |a_{n_0}| \theta^{-n_0} \sum \theta^n \text{ konv. } [2.37]$$

$$\overset{4.19(i)}{\Longrightarrow} \sum |a_n| \text{ konv.}$$

(ii) Sei $n_1 \geq n_0$ und so dass $a_{n_1} \neq 0 \Rightarrow |a_n| \geq |a_{n_1}| > 0 \ \forall n \geq n_1$

$$\Longrightarrow a_n \not\to 0 \overset{4.5}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ div.}$$

$\square$

4.24. BEM (Zum Quotiententest)

(i) Analog zum WT: Falls $\exists \theta = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, dann gilt

$$\theta < 1 \overset{4.23(i)}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ abs. konv.}$$

$$\theta > 1 \underset{4.23(ii)}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ div.}$$

(ii) WARNUNG! Auch hier ist bei $\theta = 1$ keine Aussage möglich, denn z.B.

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ konv und } (n>1) \ 1 > \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$$

$$\sum \frac{1}{n} \text{ div und } (n>1) \ 1 > \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$$

NICHT VORGETRAGEN

(iii) Wurzeltest vs Quotiententest. Man kann zeigen,

(i) im Quotiententest $\Rightarrow$ (i) im Wurzeltest

[d.h. falls der QT positiv ausfällt, dann ist auch der WT anwendbar]

Die Umkehrung ist falsch [für Details siehe Barner, Flohr Analysis 1, §5.3]

4.25 Bsp (QT, WT)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ist abs. konv., denn [4.23(ii), 4.24(ii)]

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{2} < 1$$

(ii) $\sum a_n$ mit $a_n = \begin{cases} 2^{-n} & n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$ ist abs konv, denn [4.21(ii)]

$$|a_n|^{1/n} \le \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \le \frac{1}{2} < 1 \quad \forall n$$

können $\theta = 1/2$ wählen

Bemerke, für diese Reihe ist der Quotiententest nicht schlüssig, denn

QT bringt hier nichts :D

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k} \xrightarrow{1.5(ii)} 0, \quad \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2k+1} \xrightarrow{1.5(ii)} \infty$$

4.26 Motivation (Dezimaldarstellung & b-adische Entwicklung)

Als erste Anwendung des entwickelten Begriffsapparates für Reihen werden wir nun die Dezimaldarstellung reeller Zahlen und ihre Verallgemeinerung auf andere Basen (statt 10) studieren

(i) Beginnen wir mit $\mathbb{Q}$: Im Alltag sind wir es gewohnt, rationale Zahlen in Dezimaldarstellung zu sehen, z.B. auf Preisschildern im Supermarkt 17,48 EUR. Die entsprechende Bruchzahl $x \in \mathbb{Q}$ errechnet sich gemäß

$$\underline{x} = 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} = \frac{10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8}{10^2} = \underline{\frac{1748}{100}}$$

(ii) Es ergeben sich unmittelbar zwei mögliche Verallgemeinerungen:

(A) Obige Darstellung hat endlich viele Terme. Können wir auch unendlich viele Terme zulassen und x so als Limes einer (unendlichen) Reihe auffassen – und welche Zahlen x können wir so darstellen (mehr als $\mathbb{Q}$?) ?

(B) Eine völlig analoge Darstellung für beliebige Basen $b \geq 2$ statt 10 ist leicht zu bewerkstelligen.

In diesem Rahmen (offizielle Def kommt sofort) werden wir uns den Fragen in (A) widmen.

4.27 DEF (b-adische Entwicklung)

Sei $\mathbb{N} \ni b \geq 2$ (Basis), $N \in \mathbb{Z}$ und $a_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ (Ziffern) $(N \leq n \in \mathbb{Z})$. Die Reihe

$$\pm \sum_{n=N}^{\infty} a_n b^{-n}$$

heißt b-adische Entwicklung mit Ziffern a_n $(N \leq n \in \mathbb{Z})$

4.28 BSP (b-adische Entwicklungen)

(i) Im Bsp in 4.26 ist $b=10$, $N=-1$, $a_{-1}=1$, $a_0=7$, $a_1=4$, $a_2=8$; nochmal

$$17{,}48 = 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} = \sum_{n=-1}^{2} a_n 10^{-n}$$

(ii) $2^7 = 128$ daher hat 128 die Binärdarstellung $(b=2)$

$$128 = 1 \cdot 2^7 = \sum_{n=-7}^{-7} 1 \cdot 2^{n}$$

4.29 MOTIVATION (Konkretisierung von (A) in 4.26(ii))

Die Fragen in 4.26(ii) (A) können wie folgt konkretisiert werden

(i) Ist jede b-adische Entwicklung konvergent?

(ii) Kann jedes $x \in \mathbb{R}$ als Limes einer b-adischen Entwicklung dargestellt werden?

(iii) Ist diese Darstellung eindeutig?

4.30 BEM (Uneindeutigkeit b-adischer Entwicklungen)

Die Antwort auf 4.29(iii) ist negativ, wie das folgende Bsp zeigt ($b=10$)

$$0{,}9999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = 9 \cdot 10^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (10^{-1})^n$$

$$\overset{\text{geo. R.}}{=} \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \frac{10}{10-1} = 1 = 1{,}0000\ldots$$

Zum Glück lautet die Antwort auf 4.29 (i), (ii): JA

4.31 THM (b-adische Entwicklung reeller Zahlen)

Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, dann gilt:

(i) Jede b-adische Entwicklung konv. absolut.

(ii) Jede reelle Zahl x ist Summe (d.h. Limes) einer b-adischen Entwicklung (wobei die Ziffern rekursiv konstruiert werden können).

Beweis. (i) [leicht & wie gehabt] $\forall n$ gilt:

$$|a_n b^{-n}| \leq (b-1) b^{-n} \text{ und } (b-1)\sum b^{-n} \text{ ist konvergente Majorante}$$

$a_n \leq b-1 \;\forall n$ $\xRightarrow{4.19(i)}$ abs. konv.

(ii) [technisch anspruchsvoll ...]

NICHT VORGETR.

Es genügt den Fall $x \geq 0$ zu betrachten. Wir konstruieren eine b-adische Darstellung für $x \in \mathbb{R}$ beliebig

(1) Konstruktionsvorschrift

[Wohldef.]

$$b \geq 2 \overset{1.5}{\Longrightarrow} \exists m \in \mathbb{N}: b^m > x \Longrightarrow \exists m_0 = \min\{m \in \mathbb{N}: x \leq b^{m+1}\}$$

Setze $N = -m_0$.

Wir konstruieren induktiv eine Folge a_n in $\{0,1,..,b-1\}$ sodass

$$\forall n \geq N \;\exists \xi_n \text{ mit } 0 \leq \xi_n < b^{-n} \text{ und } x = \sum_{k=N}^{n} a_k b^{-k} + \xi_n \qquad (*)$$

(2) Das genügt, denn $(*) \Rightarrow \xi_n \to 0$ also

$$x = \sum_{k=N}^{\infty} a_k b^{-k}$$

was die Aussage (ii) beweist.

(3) Konstruktion.

Wir gehen induktiv vor und beginnen bei $n = N$

ERINNERUNG: nächst kleinere Ganze [UE, Blatt 1, 6]

$\lfloor\cdot\rfloor: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lfloor y \rfloor := \max\{\ell \in \mathbb{Z} \mid \ell \leq y\}$

Es gilt $0 \leq y - \lfloor y \rfloor < 1$ (Δ)

$\underline{n=N}$: Def $N \Rightarrow 0 \le x b^N < b$. Wir definieren $a_N \in \{0,1,\dots,b-1\}$ und ξ_N durch

$$a_N := \lfloor x b^N \rfloor, \quad \xi_N := (x b^N - a_N) b^{-N}$$

Dann gilt $x = b a_N + \xi_N$ und $0 \overset{(\Delta)}{\le} \xi_N < b^{-N}$

also $(*)$ für $n=N$

$\underline{n \mapsto n+1}$: Aus $(*)$ für n folgt $0 \le \xi_n b^{n+1} < b$

Wir definieren a_{n+1}, ξ_{n+1} durch

$$a_{n+1} := \lfloor \xi_n b^{n+1} \rfloor, \quad \xi_{n+1} := \underbrace{(\xi_n b^{n+1} - a_{n+1})}_{0 \le \quad < 1 \ (\Delta)} b^{-n-1} \quad (\Delta\Delta)$$

Dann gilt $\xi_n = a_{n+1} b^{-n-1} + \xi_{n+1}$ und daher

$$x \overset{(IV)}{=} \sum_{k=N}^{n} a_k b^{-k} + a_{n+1} b^{-n-1} + \xi_{n+1} = \sum_{k=N}^{n+1} a_k b^{-k} + \xi_{n+1}$$

und $\quad 0 \le \xi_{n+1} \overset{(\Delta\Delta)}{<} b^{-n-1}$, also $(*)$ für $n+1$.

$\square$

4.32 Kor (Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, zum Dritten)

Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Limes einer Folge in $\mathbb{Q}$

Vgl. mit $\boxed{\text{☐}}$ 1.11(iii) und 3.30A

$\underline{\text{Beweis}}$: $4.31 \Rightarrow \exists$ Dezimaldarstellung für x, d.h.

$$x = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}$$

Für jedes m ist die Partialsumme

$$s_m = \sum_{n=N}^{m} a_n \cdot 10^{-n} \in \mathbb{Q}$$

und $s_m \to x$.

$\square$

4.33 BEM. Sei $\mathbb{R} \ni x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}$ eine b-adische Entwicklung. Man kann zeigen [Amann, Escher, Analysis 1, II.7]

$x \in \mathbb{Q} \iff$ Die Ziffernfolge a_n ist ab einem $K \in \mathbb{N}$ periodisch, d.h. $\exists K \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$
$$a_{n+p} = a_n \quad \forall n \geq K$$

inkludiert den Fall, dass fast alle a_n verschwinden, die Entwicklung also abbricht!

4.34 MOTIVATION (Das Cauchy-Produkt für Reihen)

(i) Um zu einer zweiten – noch viel wichtigere – Anwendung unserer Erkenntnisse über Reihen zu gelangen, nämlich der EXPONENTIALFUNKTION müssen wir uns noch um Produkte von Reihen kümmern.

(ii) Um letztere zu motivieren beginnen wir mit einer Überlegung zu Produkten endlicher Summen.

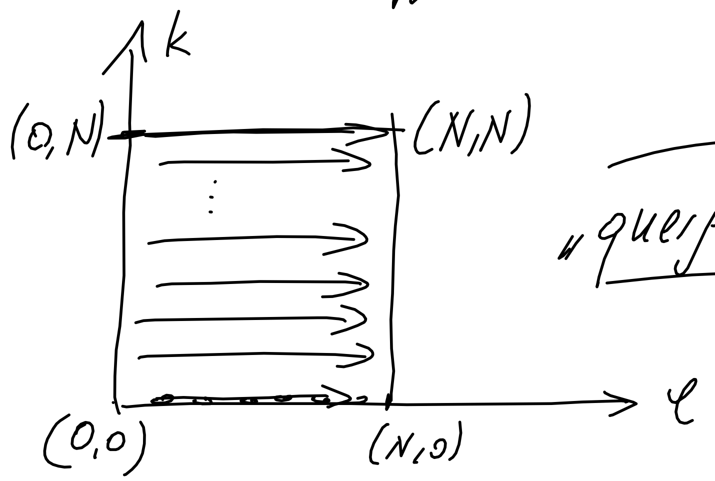
Seien $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$, $B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$, dann gilt

$$A_N \cdot B_N = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} a_k b_l \qquad (*)$$

Für die Untersuchung der Konvergenz $N \to \infty$ solcher Ausdrücke erweist es sich als günstig, die Summationen anders zu arrangieren. Am besten wird das in einer 2-dimensionalen Skizze deutlich:

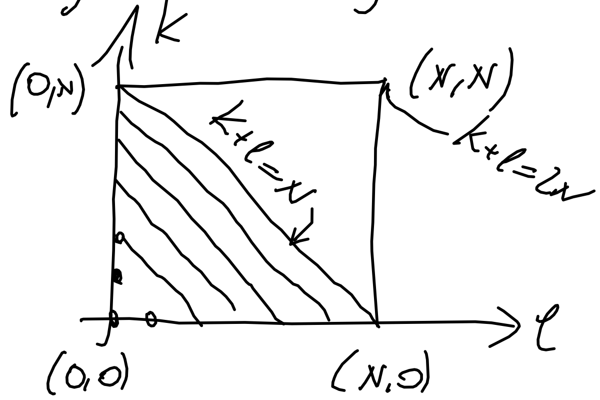
Alles läuft darauf hinaus in welcher Reihenfolge wir die Indexpaare (k,l) in der Doppelsumme in $(*)$ abklappern:

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} a_k b_l \;\hat{=}$$

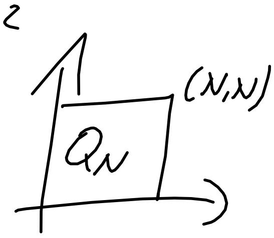


„quergeparkt"

Es erweist sich für viele Anwendungen als günstiger längs der Diagonalen zu laufen, zumindest bis wir die längste Diagonale erreichen ...

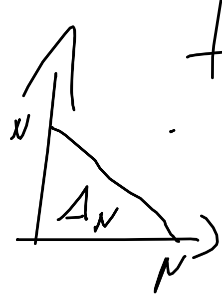


Wir verwenden folgende Abkürzungen für Bereiche des Gitters $\mathbb{N}\times\mathbb{N} =: \mathbb{N}^2$



$$Q_N := \{(k,l)\in\mathbb{N}^2 \mid 0\le k,l\le N\}$$

$$\Delta_N := \{(k,l)\in Q_N \mid k+l\le N\}$$



Damit können wir schreiben

$$A_N\cdot B_N = \sum_{(k,l)\in Q_N} a_k b_l = \sum_{(k,l)\in \Delta_N} a_k b_l + \sum_{(k,l)\in Q_N\setminus\Delta_N} a_k b_l =$$

$$\boxed{= \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} + \sum_{(k,l)\in Q_N\setminus\Delta_N} a_k b_l}$$

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{\substack{(k,l)\in\Delta_N\\ k+l=n}} a_k b_l = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

laufe längs der Diagonalen

(iii) Wozu das ganze? Wenn $\sum a_n$, $\sum b_n$ absolut konvergieren und wir $(\sum a_n)(\sum b_n)$ betrachten, dann müssen wir in obiger Terminologie $\lim(A_N B_N)$ bearbeiten. Dabei zeigt sich, dass relativ schnell zu sehen ist, dass

$$\sum_{(k,l)\in Q_N\setminus \Delta_N} a_k b_l \to 0$$

und der erste Term also gegen $(\sum a_n)(\sum b_n)$ geht.

Außerdem ermöglicht die Struktur des Terms

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

schöne Formeln

(iv) Ja, und muß man das so machen?

Nein, jede Form des Durchlaufens erzeugt bei abs. konv $\sum a_n$, $\sum b_n$ eine abs konv. Reihe [Deiser p 116ff]

4.35 PROP (Cauchy-Produkt f. Reihen)

Seien $\sum a_n$, $\sum b_n$ absolut konvergente Reihen. Definiere

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Dann ist $\sum c_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right)$$

NICHT VORGETRAGEN

Beweis. [technisch]. Wir verwenden die Notation aus 4.35.

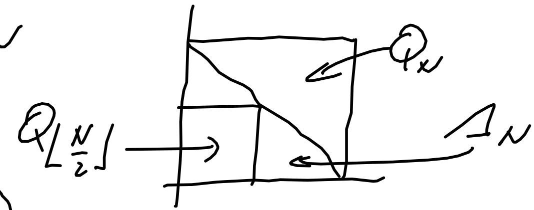
Sei $S_N := \sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, dann gilt

$$A_N \cdot B_N - S_N = \sum_{(k,l)\in Q_N \setminus \Delta_N} a_k b_l$$

(1) $\lim S_N = \left(\sum a_k\right)\left(\sum b_l\right)$:

Setze $A_N^* = \sum_{n=0}^{N} |a_n|$, $B_N^* = \sum_{n=0}^{N} |b_n| \Rightarrow A_N^* B_N^* = \sum_{(k,l)\in Q_N} |a_k b_l|$

Es gilt $Q_{\lfloor N/2 \rfloor} \subseteq \Delta_N \subseteq Q_N$ und damit



$$|A_N B_N - S_N| \leq \sum_{(k,l)\in Q_N\setminus\Delta_N} |a_k||b_l| \leq \sum_{(k,l)\in Q_N \setminus Q_{\lfloor N/2 \rfloor}} |a_k||b_l| \qquad (*)$$

$$= A_N^* B_N^* - A^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} B^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$$

Nach Vorauss. $(A_N^* B_N^*)_N$ konv $\Rightarrow$ CF

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} A_N^* B_N^* - A^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} B^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} = 0$$

Wegen $A_N \cdot B_N \to \left(\sum a_k\right)\left(\sum b_l\right) \overset{(*)}{\Longrightarrow} S_N \to \left(\sum a_k\right)\left(\sum b_l\right)$

(2) $\sum c_n$ konv. absolut:

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| \Longrightarrow \text{konv.}$$

(1) für $\sum |a_n|, \sum |b_n|$

(Δ)-Ungl

$\square$

Jetzt endlich für Exponentialreihe

4.36 BEM (Exponentialreihe)

(i) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ abs. konv.,
denn für $x \neq 0 \Rightarrow a_n \neq 0$

und
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}\, n!}{(n+1)!\,|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \overset{QT}{\Longrightarrow} \text{abs. konv.}$$

für $x = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$

(ii) [ACHTUNG: NEUE IDEE!]

Daher können wir eine Funktion definieren
$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R},$$
offiziell:

4.37 DEF (EXPONENTIALFUNKTION)

Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch
$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
und $e := \exp(1)$ heißt Eulersche Zahl!

4.38 MOTIVATION (Funktionalgleichung für exp)

Viele wichtige Eigenschaften der überaus wichtigen exp-Fkt folgen aus der Funktionalgl. $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$.
[Tatsächlich ist exp dadurch und eine Beschränktheits-

bedingung schon eindeutig charakterisiert [Barner-Flohr, Sec 7.5]
Wir werden sie jetzt als Folgerung aus dem Cauchy-Produkt herleiten

4.39 THM (Funktionalgl. für die exp-Fkt)
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y). \quad (4.2)$$

Beweis. $4.36 \Rightarrow \sum \frac{x^n}{n!}, \sum \frac{y^n}{n!}$ sind abs konv.

$$4.35 \Rightarrow \exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ mit}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \overset{\text{BLS}}{=} \frac{(x+y)^n}{n!} \quad (*)$$

Also

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).$$

□

4.40 KOR (Wichtige Eigenschaften von exp) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\exp(x) > 0$

(ii) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

(iii) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(n) = e^n$

Beweis. (ii) Die Funktionalgl. (4.2) liefert

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) \overset{(4.2)}{=} \exp(x)\exp(-x)$$

(i) Für $x \geq 0$ gilt

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \geq 1 > 0. \qquad (*)$$

Für $x < 0$ gilt $\exp(x) \overset{(ii)}{=} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{\exp(-x)}_{>0}}}_{>0\ (*)} > 0$

(iii) Wegen $\exp(-n) = 1/\exp(n)$ [(ii)] genügt es die Aussage für $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen. Das machen wir induktiv:

$\underline{n=0}$: $\exp(0) = 1 = e^0$

$\underline{n \mapsto n+1}$: $\exp(n+1) \overset{(4.2)}{=} \exp(n)\exp(1) \overset{(IV)}{=} e^n \cdot e^1 = e^{n+1}$ $\square$

4.41 BEM & MOTIVATION

(i) Thm 4.39 und Kor 4.40(i) besagen, dass exp ein Gruppenhomomorphismus

$$\exp: (\mathbb{R},+) \to ((0,\infty),\cdot)$$

ist; vgl. [EMA, 5.2.6 2]

NICHT VORGETRAGEN

(ii) Zum Abschluß des Ⅰ und des Kapitels beweisen wir nun eine grobe aber doch nützliche Fehlerschranke für die Exponentialreihe – später [WS] werden wir diese noch erheblich verbessern [Stichwort: Taylorreihe]

4.42 PROP (Fehlerabschätzung für exp)

Sei $N \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x)$$

N-te Partialsumme

wobei der „Rest" R_{N+1} für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1 + N/2$ die Abschätzung

$$|R_{N+1}(x)| \leq 2\,\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$$

erfüllt

Beweis. Für den Restterm gilt

$$R_{N+1}(x) = \exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

und letztere Reihe konvergiert absolut. [4.36(ii)]
Daher gilt

Nicht vorgetragen

$$|R_{N+1}(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\Big(1 + \frac{|x|}{N+2} + \underbrace{\frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)}}_{\leq |x|^2/(N+2)^2} + \dots\Big)$$

verallgemeinerte Δ-Ungl. ($|\sum_{n=0}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ für abs. konv. Reihen [UE]

$$\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{|x|}{N+2}\Big)^k \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^k$$

$|x| \leq \frac{N+2}{2}$

$$\overset{2.37}{\underset{\text{geom. R.}}{=}} 2\, \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

$\square$

4.43 BSP (Approximation für e) Es gilt

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + R_{N+1}(1)$$

und $x = 1 \leq 1 + N/2$ $\forall N \in \mathbb{N}$. Daher erhalten wir aus 4.42 für $N = 2$

$$e = \sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!} + R_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + R_3(1)$$

und

$$0 < R_3(1) \leq 2\, \frac{1}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Also insgesamt

$$2 < \frac{5}{2} < e \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6} \overset{2.8\dot{3}}{=} < 3.$$

Tatsächlich gilt $e \approx 2{,}71828$ [die ersten 100 Stellen erhält man genau schon nach Summation der ersten 73 Terme]