3.27 DEF (Berührpunkt, Häufungspunkt)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$

(i) $a \in \mathbb{R}$ heißt Berührpunkt von A, falls

$$\forall \varepsilon > 0: \ U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$$

Jedes ε-Umg. von a enthält mind. einen Pkt aus A

(ii) $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von A, falls

$\forall \varepsilon > 0: \ U_\varepsilon(a) \cap A$ enthält unendlich viele Punkte

3.28 BSP (BP & HP)

(i) Jedes $a \in A$ ist BP von A $[a \in U_\varepsilon(a) \cap A \ \forall \varepsilon]$
Jeder HP von A ist auch BP von A

(ii) Nicht jeder Pkt von A ist HP von A, denn $A = \{0\}$ hat garkeine HP.

(iii) Sei $A := [a, b)$ ein Intervall. Jedes $x \in [a, b]$ ist HP (und somit BP) von A
[Bemerke b ist BP von A obwohl $b \notin A$]

(iv) 0 ist HP von $A = \{1/n \mid 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$

[Bemerke wiederum $0 \notin A$]

3.29 BEM (HP vs HW)

Sei (a_n) reelle Folge

Gilt a HW von $(a_n) \overset{?}{\Rightarrow} a$ HP von $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

a HW der Folge

NEIN, denn

a HP der Menge der Folgenglieder

Sei $a_n = (1)_n \Rightarrow a = 1$ ist HW von a_n

ABER $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$ hat garkeine HP [3.28(ii)]

[Bemerke: 1 ist immerhin BP von A]

[In der Literatur werden HW von Folgen auch oft ab HP bezeichnet. Hier wird bewusst darauf verzichtet, da (mit dieser Bezeichnung) a HP von $a_n \not\Rightarrow$ a HP von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$]

3.30 PROP (Einfache Eig von HP & BP) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$

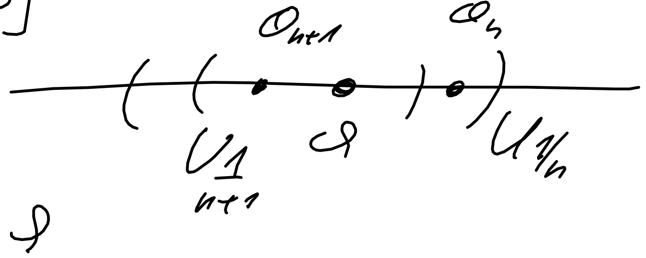
(i) a ist BP von $A \Leftrightarrow \exists$ Folge (a_n) in A [dh $a_n \in A \ \forall n$] mit $a_n \to a$

(ii) a ist HP von $A \Leftrightarrow$ a ist BP von $A \setminus \{a\}$

Beweis. (i)

„$\Rightarrow$": Sei a BP von $A \overset{3.27(ii)}{\Rightarrow} \forall n \geq 1 \ \exists a_n \in U_{\frac{1}{n}}(a) \cap A$

So erhalten wir induktiv eine Folge (a_n) in A mit $a_n \to a$ [$|a_n - a| < 1/n \to 0$]



„$\Leftarrow$": Lt. Voraussetzung $\exists (a_n)$ in A mit $a_n \to a$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ a_n \in U_\varepsilon(a) (\cap A) \Rightarrow U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$

(ii) [UE] □

3.30A. BEM. Nach $\boxed{O}$ 1.11(ii) liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$. Das bedeutet, dass jedes $x \in \mathbb{R}$ HP von $\mathbb{Q}$ ist.

[$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ dicht $:\overset{[O]1.11(ii)}{\Leftrightarrow} \forall x < y \in \mathbb{R} \ \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y \overset{\text{induktiv}}{\Leftrightarrow}$ sogar unendl. viele $\Leftrightarrow \forall \varepsilon \ U_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q}$ unendlich]

3.31 BEM (BP beschränkter Mengen) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt.

(i) Sei (a_n) Folge in A $\overset{BW}{\Longrightarrow}$ (a_n) hat einen HW a

a_n hat TF a_{n_k} und $a_{n_k} \to a$ $\overset{3.30(i)}{\Longrightarrow}$ a ist BP von A

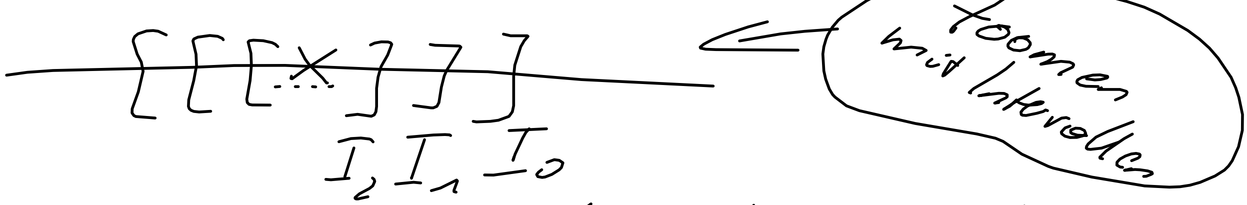
(ii) $(V) \Rightarrow \exists\, a = \sup A \xRightarrow[\sup]{\text{Def}}$ a ist BP von A

[Es gilt sogar $\sup A$ ist Limes einer mon. wachsenden Folge in A: Wähle $a-1 < a_0 \le a$ und dann induktiv $\forall n \ge 1$: $a_n \in A$, $a_n \ge a_{n-1}$, $a - \frac{1}{n} \le a_n \le a$.]

3.32 MOTIVATION (Intervallschachtelungsprinzip)

Wir leiten nun aus dem Cauchy-Prinzip eine weitere „Existenz-Maschine" her, die im Gegensatz zum CP sehr anschaulich ist:

Wenn eine Folge ineinander geschachtelter, abgeschl. Intervalle sich zusammenzieht, dann wird dabei ein eindeutiger Punkt in $\mathbb{R}$ eingefangen.



Dieses Prinzip veranschaulicht nocheinmal die Tatsache, dass $\mathbb{R}$ „keine Löcher" hat

Doch zuerst zu den exakten Begriffen.

3.33 DEF (Durchmesser eines abg. Intervalls)

Seien $a \le b \in \mathbb{R}$ und $I := [a,b]$. Wir definieren den Durchmesser von I als

$$\operatorname{diam} I := b-a$$

3.34 THM (Intervallschachtelungsprinzip, (IP))

Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener, beschränkter Intervalle mit den Eig.

(i) $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$

(ii) $\operatorname{diam} I_n \to 0 \quad (n\to\infty)$.

Dann existiert genau ein $a\in\mathbb{R}$, das in jedem I_n liegt, d.h.

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\}$$

Beweis. (Existenz) Seien $I_n = [a_n, b_n]$ $(n\in\mathbb{N})$

(1) Die Folge (a_n) der linken Randpkte ist eine CF.

Sei $\varepsilon>0$. (ii) $\Longrightarrow \exists N\in\mathbb{N}: \operatorname{diam} I_n < \varepsilon \quad \forall n\ge N$ (*)

Seien also $m,n \ge N$. $\overset{(i)}{\Longrightarrow} a_m, a_n \in I_N$

$$\Longrightarrow |a_n - a_m| \le \operatorname{diam} I_n \overset{(*)}{<} \varepsilon$$

(2) $\overset{3.18}{\Longrightarrow} \exists a = \lim a_n$

(3) $\forall n \ge k$ gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} a_k & \le & a_n & \le & b_n \le & b_k & \\ \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & (n\to\infty) \\ a_k & & a & & & b_k & \end{array}$$

(in n) konstante Folge

$\overset{2.28}{\Longrightarrow} a_k \leq a \leq b_k \ (\forall k) \Longrightarrow a \in I_k \ (\forall k)$

(Eindeutigkeit): [folgt sofort aus (ü)]

Seien $a, b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ dann gilt $\forall n$

$$0 \leq |a-b| \leq \operatorname{diam} I_n \to 0$$

$\Longrightarrow |a-b| = 0 \overset{(N1)}{\Longrightarrow} a = b.$ $\square$

[**3.35 BEOBACHTUNG**: Es gilt also $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\}$, wobei a eindeutig festgelegt ist durch $a = \lim a_n$ [und analog $a = \lim b_n$] [NICHT VORGETRAGEN]]

3.36 NACHBETRACHTUNG (Der rote Faden)

Dieser § war (neben anderen, praktischen Aspekten) einer detaillierten Analyse der Konsequenzen der Ordnungsvollständigkeit (V) gewidmet.

Genauer haben wir bewiesen:

$$(V) \Longrightarrow (BW) \Longrightarrow (CP) \Longrightarrow (IS)$$

Es gilt aber auch $(IS) \Rightarrow (V)$ [ohne Beweis; siehe [Fo] 3.16 Thm] und daher sind alle 4 Aussagen äquivalent ▷ (BW), (CP) und (IS) sind also nur andere (tw. anschaulichere) Manifestationen der Ordnungsvollständigkeit (V) von $\mathbb{R}$.

Daher spricht man oft auch einfach von der <u>Vollständigkeit von $\mathbb{R}$</u>, die durch jede der 4 Aussagen charakterisiert ist.

Nimmt man verschiedene Quellen zur Analysis zur Hand, so wird man jeweils verschiedene Defs der Vollständigkeit finden [z.B. (CP) in Forster, (V) in Deiser und Heuser und noch eine Variante (Konvergenz von Dedekind-Schnitten) in Behrends] aber (immer) auch einen Satz der die Äquivalenzen herstellt — also besagt, dass alle diese Zugänge äquivalent sind.

Zum Abschluss des § nocheinmal & weil es so schön ist

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{ORDNUNGSVOLLST.}} \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{INTERVALLSCHACHTELUNGSP.}} \arrow[l, Rightarrow] \\
\boxed{\text{BOLZANO-WEIERSTRASS}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{CAUCHY-PRINZIP}} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

§4 Reihen & Konvergenz

4.1. Einleitung & Ausblick.

In diesem letzten § von Kap II beschäftigen wir uns ausführlich mit der Konvergenz (unendlicher) Reihen (Def 2.33). Wie bereits in 2.38 angekündigt ist es für Reihen i.a. schwieriger als für „normale" Folgen Konvergenz nachzuweisen und i.a. noch schwieriger den Grenzwert zu bestimmen — also die Summe tatsächlich auszurechnen.

Noch dazu werden wir sehen, dass der „normale" Konvergenzbegriff für Reihen zu kurz greift: Er hat den entscheidenden Nachteil, dass die Umordnung einer konv. Reihe nicht ebenfalls konvergieren muß — die Konvergenz hängt also von der Reihenfolge der Summation ab!
Dieser wirklich problematische Aspekt läßt sich dadurch umgehen, dass man zu einem stärkeren Konvergenzbegriff Zuflucht nimmt.
Die sog. absolute Konvergenz ist stabil bzgl. Umordnungen der Reihe.

sehr lästig?

Das klingt kompliziert, aber einen Bonus gibt es, weil das Rechnen mit abs. konv. Reihen ein sehr mächtiges Werkzeug ist. Das werden wir ganz zum Schluß dieses § sehen, wenn wir die Exponentialreihe und damit die Exponentialfunktion kennen lernen.

4.2 ERINNERUNG (Reihen – Sein & Schein) [vgl. 2.32–34]

Sei (a_n) eine (reelle) Folge, $m \in \mathbb{N}$.
Wir definieren die m-te Partialsumme der Reihe $\sum a_n$ als

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$$

und schreiben $\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, falls der Limes existiert. Damit ist die Konvergenz von Reihen auf die Konvergenz von Folgen zurückgeführt – Reihen sind nichts anderes als spezielle Folgen.

oft lästiger als „normale" Folgen

Wir beginnen damit einfache Konvergenzkriterien für Reihen herzuleiten. Als erstes schreiben wir das Cauchy-Prinzip [Thm 3.18] um auf den Fall von Reihen

4.3 PROP (Cauchy-Prinzip für Reihen) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine reelle Reihe, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq m\geq N \quad \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon \qquad (4.1)$$

Beweis: $\sum a_k$ konv $\overset{\text{Def 2.33}}{\iff}$ s_m konvergent $\overset{3.18}{\iff}$ s_m CF

$\overset{\text{Def 3.16}}{\iff}$ $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \ |s_n - s_{m-1}| < \varepsilon \ \forall n, m-1 \geq N$

Weil in 3.16 „$\forall m,n \geq N$" können hier m & n so gewählt werden.

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m-1} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k \qquad \square$$

OBdA $n \geq m-1$

4.4 BEM (Änderung endlich vieler Glieder)

(i) Bei Folgen kann man endlich viele Glieder ändern, ohne das Konvergenzverhalten zu ändern (vgl. 2.10). 4.3. zeigt, dass dies auch für Reihen zutrifft: Bedingung (4.1) wird von der Änderung endlich vieler a_k's nicht berührt.

[exakt: Seien (a_n), (b_n) (reelle) Folgen und $\exists M \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq M$: $a_n = b_n$ und (a_n) erfüllt (4.1), dann auch (b_n): Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1 \; \forall n, m \geq N_1 \; \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$

wähle $N := \max\{M, N_1\} \Rightarrow \forall m, n \geq N \; \left|\sum_{k=m}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$]

(ii) Weiters verändert sich der Limes einer konvergenten Folge nicht, wenn endlich viele Glieder geändert werden. Das ist bei Reihen anders. Offensichtlich ändert sich dann der Wert der Reihe, z.B.: $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \overset{2.37}{=} \frac{1}{1-x} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} - \underbrace{x^0}_{1} = \frac{1-1+x}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

Nun eine weitere wichtige Konsequenz aus 4.3.

4.5 KOR (Die Glieder konv. Reihen sind Nullfolgen)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Longrightarrow a_k \to 0 \; (k \to \infty)$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Setze in (4.1) $m = n \geq N$

$$\Longrightarrow \varepsilon > \left|\sum_{k=n}^{n} a_k\right| = a_n \Longrightarrow a_n \to 0$$

$\square$

4.6. PROP (Beschränktheit der Partialsummen)

Sei $\sum a_n$ eine Reihe nicht-negativer Zahlen (d.h. $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$), dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff s_m = \sum_{k=0}^{m} a_k \text{ beschränkt}$$

Beweis. ($\Rightarrow$) folgt sofort aus 2.17

($\Leftarrow$) [Auf den ersten Blick überraschend [vgl. 2.18] auf den 2. Blick: Monotonie!]

- s_m ist mon. wachsend, denn $s_{m+1} = s_m + \underbrace{a_{m+1}}_{\geq 0} \geq s_m$
- s_m ist beschr. lt. Voraus.

$\overset{3.25}{\Longrightarrow}$ s_m konv.

[Höchste Zeit für ein Bsp!]

4.7 BSP (konv & div Reihen)

„Dodel-Test" $a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum a_n$ div.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = (1, 0, 1, 0, \dots)$ divergiert, weil $a_n = (-1)^n \not\to 0$ [4.5

(ii) Die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert}$$

Erzbeispiel einer div. Reihe

Wir zeigen, dass die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist [$\overset{4.6}{\underset{a_n = 1/n > 0}{\Longrightarrow}} \sum 1/n$ div]

Wir betrachten S_{2^k} $(k \in \mathbb{N})$ (das ist der Trick!)

$$S_{2^k} = \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n}$$

$n=1=2^0$ $n=2=2^1$ $n=4=2^2$ $n=8=2^3$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{\geq 2\cdot 1/4 = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{\geq 4\cdot 1/8 = 1/2} + \dots$$

Anzahl der Terme:
$2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}(2-1)$
$= 2^{k-1}$

$$\dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)}_{\geq 2^{k-1}\frac{1}{2^k} = 1/2}$$

$$\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{k \text{ Terme}} \geq 1 + \frac{k}{2}$$

Also $S_{2^k} \geq 1 + k/2 \implies S_n$ unbeschränkt.

4.8 GROSSE FETTE WARNUNG!

Bemerke die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{n}$ divergiert, OBWOHL $1/n \to 0$. Daher ist die Umkehrung von 4.5 FALSCH. Es gilt also

$$\sum a_n \text{ konv.} \overset{4.5}{\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}} a_n \to 0$$

einer der beliebtesten Fehler von AnfängerInnen

4.9 Bsp $\left(\sum \frac{1}{n^s}\right)$

(i) Sei $\mathbb{N} \ni k \geq 2$, dann ist $\sum \frac{1}{n^k}$ konvergent

Da alle Glieder $1/n^k \geq 0$ sind müssen wir mit 4.6 nur zeigen, dass s_m beschränkt ist. Dazu sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben; wähle $l \in \mathbb{N}$ so dass $m \leq 2^{l+1}-1$, dann gilt

$n = 2^2 - 1 = 2^{1+1} - 1$

$n = 2^{2+1} - 1$

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{n=1}^{2^{l+1}-1} \frac{1}{n^k}$$

$$= 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right)}_{\leq 2\, 1/2^k} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k}\right)}_{\leq 4\, 1/4^k = 2^2\, 1/4^k} + \dots$$

$$\dots + \underbrace{\sum_{n=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{1}{n^k}}_{\leq 2^l \frac{1}{2^{lk}}}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{l} 2^j \frac{1}{2^{jk}} = \sum_{j=0}^{l} \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^j \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^j = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{k-1}}}$$

geom. Reihe 2.37

obere Schranke von s_m unabh. von m

(ii) Derselbe Beweis funktioniert (wortwörtlich) auch für $\mathbb{R} \ni k > 1$ – wir haben aber n^k für $k \notin \mathbb{Z}$ im Rahmen der VO noch nicht definiert…

Wiederholen wir, es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ ist } \begin{cases} \text{div für } s \leq 1 \\ \text{konv für } s > 1 \end{cases}$$

(iii) Für alle geraden ganzen k können die Summen sogar explizit berechnet werden, z.B. gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

wie wir später (Teil 2 des Zyklus) sehen werden

4.10 THM (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)

Sei $a_n \geq 0 \ \forall n$. Wir betrachten die sog. alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \dots$$

oft leichter zu bändigen

Falls gilt, dass

(i) a_n mon. fällt $[a_n \geq a_{n+1} \ \forall n]$

(ii) $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$,

dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent

Partialsummen einer konv. alt. Reihe

Beweis. • Betrachte TF der geraden/ungeraden Partialsummen ($k \in \mathbb{N}$)

$$s_{2k+2} - s_{2k} = -a_{2k+1} + a_{2k+2} \overset{(i)}{\leq} 0 \implies s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \dots s_{2k} \geq s_{2k+2} \geq \dots \quad (*)$$

$$s_{2k+3} - s_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \overset{(i)}{\geq} 0 \implies s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots s_{2k+1} \leq s_{2k+3} \leq \dots \quad (**)$$

Außerdem $s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} \leq 0 \implies s_{2k+1} \leq s_{2k} \quad (***)$

Also (s_{2k}) mon. fallend $[(*)]$ & n.u.b $[s_{2k} \geq s_1, (**), (***)] \overset{3.25}{\implies}$ konv

d.h. $\exists\, s := \lim_{k \to \infty} s_{2k}$

Analog s_{2k+1} mon. wachsend [(**)] & n.o.b [$\overset{(*)}{(***)}$] $\overset{3.25}{\Longrightarrow}$ konv

d.h. $\exists S' := \lim_{k\to\infty} s_{2k+1}$

• $S = S'$ denn $S - S' = \lim_{k\to\infty} (s_{2k} - s_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$

• $s_n \to S$, denn sei $\varepsilon > 0$.

$$s_{2n} \to S \Rightarrow \exists N_1 \ \forall n \geq N_1 \ |a_{2n} - S| < \varepsilon$$
$$s_{2n+1} \to S \Rightarrow \exists N_2 \ \forall n \geq N_2 \ |a_{2n+1} - S| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq N := \max\{N_1, N_2\} \ |a_n - S| < \varepsilon$$

$\square$

4.11 BSP Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ konvergiert}$$

nach 4.10 weil $1/n$ mon. fallende Nullfolge.

4.12 BEM (zum Leibnitzkriterium)

(i) Bemerke, dass 4.10 eine schwache Form der Umkehrung von 4.5 [$\sum a_n$ konv $\Rightarrow a_n \to 0$] ist [vgl 4.8] denn 4.10 sagt

$$a_n \to 0 \ \& \text{ mon fallend} \Longrightarrow \sum (-1)^n a_n \text{ konv}$$

[(ii) Der Beweis von 4.10 liefert die folgende Fehlerabschätzung

$$|s - s_m| \leq |s_{m+1} - s_m| = a_{m+1}$$

[NICHT VORGETRAGEN]

s_m hüpft ja immer über S hinaus]