$$\overset{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} |a_n|\,|b_n - b| + |a_n - a|\,|b|$$
$$\underline{<} K \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K} K = \underline{\varepsilon} \qquad \square$$

2.24 BEM (Polierte Beweise) Natürlich ist insbesondere der letzte Beweis POLIERT, in dem Sinn, dass ε und K so gewählt wurden, dass am Schluss $\underline{< \varepsilon}$ dasteht und nicht etwa $2K\varepsilon$. Letzteres wäre zwar auch okay, aber eben nicht ganz so lässig. [VE]

Man spricht im Zusammenhang mit dem Auftreten der Δ-Ungleichung in der entscheidenden Abschätzung von $\varepsilon/2$-Beweisen [vgl. Summe in 2.23]. Wir werden aber sehr bald auch $\varepsilon/3$-Beweise sehen; so wird ein zweimaliges Anwenden der Δ-Ungl. angedeutet.

Statt weiter „Methodologie" lieber eine (einfache) Folgerung aus 2.23

2.25 KOR: (Linearkombinationen konv. Folgen)

Seien (a_n), (b_n) konvergente (reelle) Folgen und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert auch die Folge $(\lambda a_n + \mu b_n)$ und es gilt
$$\lim(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim a_n + \mu \lim b_n$$

Beweis. Das Korollar folgt aus 2.23 mittels eines Tricks: Wir interpretieren die Folge $(\lambda a_n)_n$ als Produkt zweier Folgen
$$(\lambda a_n)_n = \underbrace{(\lambda)_n}_{\text{konstante Folge } (\lambda)_n \to \lambda \ (2.11(i))} \cdot (a_n)_n$$
$$\overset{2.23}{\Longrightarrow} \lambda a_n \to \lambda \lim a_n$$

Analog folgt $\mu b_n \to \mu \lim b$ und mit dem Summenteil in 2.23 haben wir insgesamt

$$(\lambda a_n)+(\mu b_n) \longrightarrow \lambda \lim a + \mu \lim b \,. \qquad \square$$

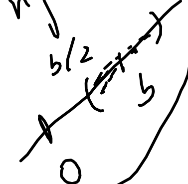
2.26 SATZ (Quotienten konvergenter Folgen)

Seien (a_n), (b_n) konvergente (reelle) Folgen mit $\lim b_n =: b \neq 0$.
Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $b_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$, die Quotientenfolge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ konvergiert und es gilt

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

$\exists \frac{1}{b_n}$? Ja für n groß genug

Idee:



Beweis: Sei $a := \lim a_n$

(1) Wir beweisen zunächst die Aussage, dass $b_n \neq 0$ für große n:

$b \neq 0 \Rightarrow |b|/2 \ (=: \varepsilon') > 0$

$$\overset{(b_n \to b)}{\Longrightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N}: |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq n_0: \frac{|b|}{2} > |b_n - b| \geq |b| - |b_n| \Longrightarrow |b_n| > |b|/2 > 0 \quad (*)$$

umgekehrte Δ-Ungl

(2) Wir zeigen $\left(1/b_n\right)_{n\geq n_0} \longrightarrow 1/b$.

Achtung: Schon wieder poliert

Sei $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \varepsilon'' := |b|^2\varepsilon/2 > 0$

$$\overset{[b_n \to b]}{\Longrightarrow} \exists N_1 \in \mathbb{N}: |b_n - b| < \varepsilon'' = \frac{|b|^2\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1 \quad (**)$$

$\Longrightarrow \forall n \geq N := \max(n_0, N_1)$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} = \frac{1}{|b_n|}\,\frac{1}{|b|}\,|b_n - b| \overset{(*)(**)}{<} \frac{2}{|b|}\,\frac{1}{|b|}\,\frac{|b|^2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(3) Aus Satz 2.23 folgt sofort $\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n} \longrightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ $\square$

2.27 BSP (Im Sinne von 2.22)

$$\lim \frac{3n^2+13n}{n^2+2} = \lim \frac{3+\frac{13}{n}}{1+\frac{2}{n^2}} \underset{N}{\overset{[2.26]}{=}} 3$$

Trick: dividiere Zähler und Nenner durch die jeweils höchste n-Potenz

$3+\frac{13}{n} = 3+13\frac{1}{n} \longrightarrow 3+13\cdot 0 = 3$ [2.25, 2.26]

$1+\frac{2}{n^2} = 1+2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} \longrightarrow 1+2\cdot 0\cdot 0 = 1$ [2.23, 2.25, 2.26]

2.28 SATZ (Größenvergleich konvergenter Folgen)

Seien (a_n), (b_n) (reelle) konvergente Folgen mit $a_n \le b_n$ für fast alle n (d.h. $\exists n_0 : a_n \le b_n \ \forall n \ge n_0$) dann gilt

$$\lim a_n \le \lim b_n$$

Idee: 0 c_n ~~(c)~~ kann nicht Lim. sein

Beweis:

- Setze $c_n := b_n - a_n \implies c_n \ge 0$ für fast alle n
  $\overset{2.25}{\implies} \exists c := \lim c_n = \lim b_n - \lim a_n$

  Daher genügt es z.z., dass $c \ge 0$

- Indirekt ang. $c < 0$. Setze $-c := \varepsilon > 0 \overset{2.6}{\implies} \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \ge N$

$$\varepsilon > |c_n - c| = |c_n - (-\varepsilon)| = |c_n + \varepsilon| \underset{N}{=} c_n + \varepsilon$$

[$c_n \ge 0$, $\varepsilon > 0$]

$\implies 0 > c_n \ \forall n \ge N$ ↯ WID

$\square$

2.29 SATZ (Sandwich-Lemma) Seien (a_n), (b_n), (c_n) (reelle) Folgen mit

$$a_n \le b_n \le c_n \quad \text{für fast alle } n$$

und $a_n \to a$, $c_n \to a$. Dann ist auch (b_n) konvergent und es gilt $b_n \to a$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N_0 \begin{cases} |a_n - a| < \varepsilon \\ |c_n - a| < \varepsilon \end{cases}$

$$\Longrightarrow a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon \quad \forall n \ge N := \max\{n_0, N_0\}$$

$$\overset{(-a)}{\Longrightarrow} \quad -\varepsilon < b_n - a < \varepsilon \qquad \forall n \ge N$$

$$\Longrightarrow |b_n - a| < \varepsilon \ \ \forall n \ge N \Longrightarrow b_n \to a. \qquad \square$$

2.30 Bsp (Wieder im Sinne von 2.22; mit einem Bonus)

Sei $(n \ge 1)$ $b_n := \sum_{k=n+1}^{2n} 1/k^2 = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$

Es gilt $n+1 \le k \le 2n \Rightarrow n < k \Rightarrow \frac{1}{k} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n^2}$ und daher

$$0 < b_n < \underbrace{\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{n\text{-mal}} = n\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$$

$$\overset{\text{Sandwich-L}}{\Longrightarrow} \boxed{b_n \to 0}$$

$[a_n = 0,\ c_n = \frac{1}{n}]$

2.31 WARNUNG (Kein 2.28 für $<$ statt $\le$) (a_n), (b_n) konv;

$$a_n < b_n \ (\text{sogar}) \ \forall n \overset{2.30}{\not\Longrightarrow} \lim a_n < \lim b_n$$

$$\overset{2.28}{\Longrightarrow} \lim a_n \le \lim b_n$$

das ist der Bonus von 2.30

2.32 MOTIVATION (Unendliche Reihen-Formulierung)

Einige der bisher untersuchten Folgen waren als Summen gegeben (zB 2.5(vi) = die geometrische Reihe, 2.30). Genauer, sei $(a_n)_n$ eine Folge. Daraus entsteht eine (unendliche) Reihe (offizielle Def unten) durch Summieren

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

Dieser Ausdruck ist sehr vage – um ihn genauer zu fassen betrachten wir die sog. Partialsummen

$$s_m = a_0 + a_1 + \dots + a_m = \sum_{k=0}^{m} a_k$$

und fassen $(s_m)_m$ als Folge auf. Durch diesen Trick können wir unendliche Reihen als spezielle Folgen – nämlich als die Folge der Partialsummen – auffassen und so alles, was wir über Folgen schon herausgefunden haben verwenden. Nun offiziell.

2.33 DEF (Reihe)

Sei (a_n) eine Folge.

(i) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ definieren wir die m. Partialsumme

$$s_m := \sum_{n=0}^{m} a_n$$

(ii) Die Folge $(s_m)_m$ der Partialsummen heißt (unendliche) Reihe mit Gliedern a_n und wird mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \left(\text{oder kurz } \sum a_n\right) \text{ bezeichnet.}$$

(iii) Konvergiert (s_m), so sagen wir auch die Reihe konvergiert. Wir bezeichnen $\lim s_m$ ebenfalls mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (kurz $\sum a_n$) nennen ihn Summe der Reihe.

2.34 BEM (Zur Notation) Das Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $\left(\sum a_n\right)$ steht also für 2 Dinge

(i) die Reihe selbst, also die Folge $(s_m)_m$ der Partialsummen

(ii) im Falle der Konvergenz für den Grenzwert

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n$$

Ganz analog zu Folgen betrachten wir auch Reihen $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ für ein beliebiges $1 \leq k \in \mathbb{N}$.

2.35 BSP: Sei $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ $(n \geq 1)$. Die korrespondierende Reihe ist dann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Bemerke, dass $a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}$. $\left[\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - n^2 - n + n + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}\right]$

Daher gilt für die Partialsummen

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{m-1}{m} - \frac{m-2}{m-1}\right) + \left(\frac{m}{m+1} - \frac{m-1}{m}\right) = \frac{m}{m+1} \longrightarrow 1$$

wie in 2.22

Bsp zur 2.11(iv)

Also ist die Reihe konvergent und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{m\to\infty} s_m = 1$$

2.36 HOPPALA (Reality check)

Wie können wir intuitiv verstehen, dass eine Summe von unendlich vielen positiven Zahlen nicht unendlich ergibt, also konvergiert – so wie in Bsp 2.35 passiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots = 1 \qquad ?$$

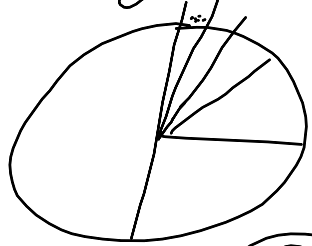
Natürlich werden die a_n immer kleiner; es gilt sogar
$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \to 0$ $\left[0 < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} \to 0 \text{ dann Sandwich-Lemma}\right]$

Aber warum (bzw. wann) reicht das?

Für eine intuitive Antwort betrachten wir eine Torte. Zunächst essen wir die halbe Torte, dann (sparsamerweise) von der verbliebenen Hälfte die Hälfte usw. Es ergibt sich die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

deren Summe höchstens 1 sein kann – wir hatten ja nur eine Torte ;-P Als Grenzwert ergibt sich tatsächlich 1, wie wir unter anderem im nächsten Bsp sehen werden.



2.37 BSP (Die geometrische Reihe) ← DAS Erzbsp

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix. Wir betrachten $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Praktischerweise haben wir in 1.6 schon die Partialsummen S_m ausgerechnet:

$$S_m(x) = \begin{cases} m+1 & (x=1) \\ \dfrac{1-x^{m+1}}{1-x} & (x \neq 1) \end{cases} \qquad (*)$$

Wir unterscheiden Fälle wie schon in 2.19(ii) (wo wir praktischerweise schon das Konvergenzverhalten der Glieder x^n berechnet haben).

FALL (1): $\boxed{|x|>1 \Rightarrow \sum x^n \text{ divergent}}$

$$S_m \overset{(*)}{=} \underbrace{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x}}_{\text{unabhängig von } m} x^{m+1} \Rightarrow S_m \text{ unbeschr} \overset{2.17}{\Rightarrow} S_m \text{ div}$$

unbeschränkt nach 2.19(ii)

FALL (2): $\boxed{|x|=1 \Rightarrow \sum x^n \text{ divergent}}$

Sei $x=1 \Rightarrow S_m \overset{(*)}{=} m+1$ unbeschr $\Rightarrow$ div.

Sei $x=-1 \Rightarrow$
$$S_m \overset{(*)}{=} \frac{1-x^{m+1}}{1-x} = \frac{1-(-1)^{m+1}}{2} = \begin{cases} 1 & (m \text{ gerade}) \\ 0 & (m \text{ ungerade}) \end{cases}$$

$\Rightarrow S_m$ divergent (analog VT-Maschine 2.11(iii))

FALL (3): $|x|<1 \Rightarrow$
$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}}$$

der wichtige FALL D

Eine der wichtigsten Formeln der VO

$$S_m \overset{(*)}{=} \underbrace{\frac{1}{1-x} - \frac{x^{m+1}}{1-x}}_{\to 0} \to \frac{1}{1-x}$$

$x^{m+1} \to 0$ [2.19(ii)]

[2.23]

Als Spezialfälle von Fall (3) betrachten wir $x = \pm 1/2$. Wir erhalten

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

vgl. Torte 2.36

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}$$

2.38 BEM (Konvergenz von Reihen) Im Vergleich zu „normalen" Folgen ist es oft schwieriger die Konvergenz von Reihen zu zeigen. Noch schwieriger ist es die Summe einer Reihe tatsächlich auszurechnen und wir werden uns damit später noch ausführlich befassen.

Hier halten wir nur ein einfaches strukturelles Resultat für Summen (LK) konv. Reihen fest – Produkte sind komplizierter … später

2.39 PROP (Linearkombinationen konv. Reihen)
Seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergente Reihen und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann ist auch $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Beweis. Wende Kor 2.25 auf die Partialsummen an. [UE] $\square$

2.40 BSP: (Periodische Dezimalzahlen) Unendliche Dezimalzahlen sind spezielle Reihen. Hier betrachten wir die periodische Dezimalzahl $x = 0{,}086363\overline{63}$ ← Schreibweise: 63 wiederholt sich unendlich oft

Das bedeutet, dass x folgenden Wert hat

$$x = \frac{8}{100} + \frac{63}{10000} + \frac{63}{1000000} + \dots$$
$$= \frac{8}{100} + \frac{63}{10^4} + \frac{63}{10^6} + \dots = \frac{8}{100} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{63}{10^{4+2k}}$$

Wir berechnen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{63}{10^{4+2k}} \overset{[2.39]}{=} \frac{63}{10^4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(10^{-2}\right)^k \overset{[2.37]}{=} \frac{63}{10^4} \frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{63}{10000} \frac{100}{99} = \frac{63}{9900}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{8}{100} + \frac{63}{9900} = \frac{855}{9900} = \boxed{\frac{19}{220}}$$