$\boxed{8}$ $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ ZZ: stetig auf $\mathbb{R}$ (mittels direktem ε-δ-Beweis)

WH: f stetig auf $\mathbb{R}$, wenn $\forall x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

$$\Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Unsere Aufgabe: müssen passendes δ angeben!

(δ darf dabei von x_0 und ε abhängen)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig,

$$\underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{} = \left| \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x_0^2+1} \right| = \frac{|x_0^2 - x^2|}{(x_0^2+1)(x^2+1)} \leq$$

wollen das durch ε abschätzen, dafür müssen wir das variable x loswerden

$$\underset{[x^2+1 \geq 1]}{\leq} \frac{|(x_0 - x)(x_0 + x)|}{x_0^2 + 1}$$

$$\underset{[\Delta\text{-Ungl.}]}{\leq} \frac{|x_0 - x| (|x_0| + |x|)}{x_0^2 + 1}$$

$$\underset{[\text{Vor}]}{\leq} \delta \frac{|x_0| + |x|}{x_0^2 + 1} =: (*)$$

Wie weiter abschätzen ?! Versuche Abschätzung aus der Vor. $|x - x_0| < \delta$ zu bekommen

aus umgekehrter Δ-Ungl: $\big| |x| - |x_0| \big| \leq |x - x_0| < \delta$

$$\Rightarrow \ -\delta \leq |x| - |x_0| \leq \delta$$

$$\Rightarrow \ |x| \leq \delta + |x_0|$$

also,

$$\circledast \leq \delta \cdot \frac{|x_0| + \delta + |x_0|}{x_0^2+1} = \underbrace{\frac{\delta^2 + 2\delta|x_0|}{x_0^2+1}}_{\text{hätten } \delta \text{ gerne "alleine" stehen}} =: (**)$$

wähle $\delta \leq 1 \Rightarrow \delta^2 \leq \delta$,

$$(**) \leq \frac{\delta + 2\delta|x_0|}{x_0^2+1} = \delta \cdot \frac{1+2|x_0|}{x_0^2+1} =: (***)$$

wähle $\delta \leq \frac{\varepsilon}{\frac{1+2|x_0|}{x_0^2+1}}$, denn dann gilt

$$(***) \leq \frac{\varepsilon}{\frac{1+2|x_0|}{x_0^2+1}} \cdot \frac{1+2|x_0|}{x_0^2+1} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ wähle $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{\frac{1+2|x_0|}{x_0^2+1}}\right\}$ und $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist erfüllt