

Aufgabensammlung

Grundbegriffe der Topologie

Günther Hörmann, Roland Steinbauer

Sommersemester 2010 (Version 15. Juni 2010)

Die vorliegende Aufgabensammlung dient als Grundlage für die *Übungen zu Grundbegriffe der Topologie*, das die gleichnamige Vorlesung begleitet. Die Übungen und die Vorlesung bilden eine untrennbare Einheit: der behandelte Stoff ist identisch, es laufen bloß die beiden jeweils passenden Teile des Lernprozesses in der Vorlesung bzw. in den Übungen ab. Ein Verständnis der einschlägigen Begriffe kann daher nur auf der Basis beider Veranstaltungen entstehen.

Die Aufgaben sind eng an den Ablauf der Vorlesung angepasst; die Kapitelnummerierung entspricht der der Vorlesung. Die Aufgabensammlung enthält eine Mischung aus „Routinebeispielen“ (kürzer, weniger anspruchsvoll) und längeren, aufwendigeren Aufgaben, die zum Teil auch offen formuliert sind; speziell—aber nicht nur—für letztere empfiehlt sich ein Nachschlagen in der entsprechenden Literatur und/oder Gruppenarbeit.

0 Rückblick auf topologische Konzepte im \mathbb{R}^n und in metrischen Räumen

1. Bild vs. Urbild.

Seien X und Y Mengen mit jeweils mindestens 2 Elementen und $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion.

- (i) Für beliebige Familien von Teilmengen $(B_i)_{i \in I}$ von Y zeige, dass das Urbild der Vereinigung (des Durchschnitts) der B_i gleich der Vereinigung (dem Durchschnitt) der Urbilder der B_i ist. Kurz gesagt zeige:

$$f^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \quad \text{und} \quad f^{-1}\left(\bigcap_i B_i\right) = \bigcap_i f^{-1}(B_i).$$

- (ii) Für beliebige Familien von Teilmengen $(A_i)_{i \in I}$ von X bearbeite die analogen Fragestellungen für die Bilder. Nötigenfalls erzwinge die Gleichheit durch eine geeignete Bedingung an f .
- (iii) Für je zwei Teilmengen von X bzw Y vergleiche das (Ur)Bild der Mengendifferenz mit der Differenz der (Ur)bilder. Welche Eigenschaften von f führen zur Gleichheit.
- (iv) Führe das analoge Spiel für das Komplement einer Menge in X bzw Y durch; genauer vergleiche das (Ur)Bild des Komplements mit dem Komplement des (Ur)Bilds. Gegebenenfalls stelle wiederum die Gleichheit mittels geeigneter Bedingungen an f her.
- (v) Vergleiche eine Teilmenge von X mit dem Urbild ihres Bildes und eine Teilmenge von Y mit dem Bild ihres Urbilds. Gegebenenfalls ...

2. Einheitskugeln im \mathbb{R}^2 .

Im \mathbb{R}^2 definieren wir die 1-, die 2- (oder Euklidische) und die Maximummetrik durch

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^2 |x_i - y_i|, \quad d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2}, \quad \text{und} \quad d_\infty(x, y) = \max_{i=1,2} |x_i - y_i|.$$

Skizziere graphisch die Einheitskugeln $B_1(0)$ bzgl. dieser drei Metriken.

3. *Eigenschaften abgeschlossener Mengen.*
 Zeige, dass in einem metrischen Raum (X, d) folgendes gilt (vgl. Thm. 0.9 aus der Vorlesung).
- (i) X und \emptyset sind abgeschlossen.
 - (ii) Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
 - (iii) Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
4. *Eindeutigkeit des Grenzwerts.*
 Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ im metrischen Raum (X, d) . Zeige, dass x eindeutig bestimmt ist.
Hinweis: Gehe indirekt vor.
5. *Charakterisierung abgeschlossener Mengen.*
 Beweise Prop. 0.8 aus der Vorlesung, also zeige, dass für eine Teilmenge B des metrischen Raumes (M, d) die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:
- (i) B ist abgeschlossen.
 - (ii) $x \in M$ und $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in B$.
 - (iii) (x_n) Folge in B (d.h. $x_n \in B \forall n$), $x_n \rightarrow x$ (in M) $\Rightarrow x \in B$.
6. *Charakterisierung offener Mengen in \mathbb{R} .*
 Beweise die Behauptung aus Bsp. 0.10(1) aus der Vorlesung, d.h. zeige dass für beliebige $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt
- A offen $\Leftrightarrow A$ ist (höchstens) abzählbare Vereinigung disjunkter offener Intervalle.
7. *Vereinigungen abgeschlossener und Durchschnitte offener Mengen.*
 Zeige durch explizite Gegenbeispiele (in einem möglichst einfachen metrischen Raum), dass beliebige Vereinigungen (Durchschnitte) abgeschlossener (offener) Mengen nicht abgeschlossen (offen) sein müssen.

1 Topologische Räume und Stetigkeit

8. *Eine seltsame Topologie.*
 Sei X eine Menge und $A \subseteq X$.
- (i) Zeige dass die Mengenfamilie τ bestehend aus allen Obermengen von A und der leeren Menge, also

$$\tau = \{Y \subseteq X : A \subseteq Y\} \cup \{\emptyset\}$$
 eine Topologie auf X ist.
 - (ii) Für $E \subseteq X$ beschreibe den Abschluss \overline{E} und das offene Innere E° von E bzgl. τ .
 - (iii) Speziell, wie sieht τ aus, falls $A = \emptyset$ bzw. falls $A = X$ gilt?
9. *Topologie via abgeschlossene Mengen.*
 In der Vorlesung, Def. 1.1 wurden Topologien durch die Vorgabe des Systems der offenen Mengen definiert. Alternativ dazu kann eine Topologie auch durch Vorgabe des System abgeschlossenen Mengen definiert werden. Zeige dazu den folgenden Satz:
 Sei X eine Menge und \mathcal{A} ein Teilsystem von $\mathcal{P}(X)$ mit den Eigenschaften
- (A1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $X \in \mathcal{A}$
 - (A2) Beliebige Durchschnitte von Mengen in \mathcal{A} liegen wieder in \mathcal{A} .
 - (A3) Endliche Vereinigungen von Mengen in \mathcal{A} liegen wieder in \mathcal{A} .

Dann ist

$$\tau := \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

eine Topologie auf X . \mathcal{A} ist genau die Familie der abgeschlossenen Mengen in (X, τ) und τ ist die einzige Topologie mit diesen Eigenschaften.

10. *Eigenschaften des Abschlusses.*

Beweise Proposition 1.6 (ii)–(v) aus der Vorlesung, also folgende Eigenschaften des Abschlusses einer beliebigen Teilmenge A des topologischen Raumes (X, τ) .

(ii) $A \subseteq \bar{A}$

(iii) $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$

(iv) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

(v) A ist abgeschlossen genau dann, wenn $\bar{A} = A$.

Zeige außerdem, dass $\bar{\emptyset} = \emptyset$ und $\bar{X} = X$ gelten.

11. *Kugeln und Sphären in metrischen Räumen.*

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. In Bsp. 1.7(3) in der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Kugeln $K_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$ abgeschlossen sind. Zeige (mit möglichst geringem Aufwand), dass auch die Sphären $S_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) = \varepsilon\}$ abgeschlossen sind.

12. *Kugeln in metrischen Räumen.*

Sei (X, d) wieder ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wie in Aufgabe 11 wiederholt, sind die abgeschlossenen Kugeln $K_\varepsilon(x)$ abgeschlossen. Sie sind im allgemeinen aber nicht gleich dem Abschluss der offenen Kugeln $B(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$! Gib dazu ein Beispiel an.

Tipp: Betrachte als metrischen Raum $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ mit der Euklidischen Metrik.

13. *Die Sorgenfrey-Gerade.*

Zeige die Behauptungen aus Bsp. 1.21 der Vorlesung. Genauer für $X = \mathbb{R}$ und $x \in X$ zeige

(i) Das System $\mathcal{B}(x) := \{[x, z[: z > x\}$ erfüllt die Eigenschaften (UB1)–(UB3) aus Thm. 1.20. Wir können somit durch Vorgabe der Systeme $\mathcal{B}(x)$ ($x \in X$) auf X die sogenannte Sorgenfrey-Topologie τ_S definieren, deren Umgebungsbasen gerade die $\mathcal{B}(x)$ sind.

(ii) Zeige, dass für Intervalle I von \mathbb{R} gilt

$$I \text{ offen bzgl. } \tau_S \iff I \text{ ist rechts offenes Intervall.}$$

14. *Abschluss und Häufungspunkte.*

Zeige Bem. 1.23 aus der Vorlesung, also, dass in einem topologischen Raum X

$$\bar{A} = A \cup \{x \in X : x \text{ ist Häufungspunkt von } A\}$$

gilt.

15. *Vergleich von Topologien mittels Umgebungsbasen.*

Zeige Prop. 1.24 aus der Vorlesung, genauer: Sei X eine Menge, seien τ_1, τ_2 Topologien auf X und seien für jedes $x \in X$ die Systeme $\mathcal{B}^1(x)$ bzw. $\mathcal{B}^2(x)$ Umgebungsbasen bei x bzgl. τ_1 bzw. τ_2 . Dann gilt

$$\tau_1 \text{ ist gröber als } \tau_2 \text{ genau dann, wenn } \forall x \in X \quad \forall B^1 \in \mathcal{B}^1(x) \quad \exists B^2 \in \mathcal{B}^2(x) : B^2 \subseteq B^1.$$

16. *Moore Ebene/Niemytzki Raum.*

Auf der abgeschlossenen oberen Halbebene $\Gamma := \{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ im \mathbb{R}^2 definieren wir eine Topologie τ durch Vorgabe von Umgebungsbasen $\mathcal{B}(p)$, $p \in \Gamma$ (vgl. Thm. 1.20). Dieser topologische Raum wird Moore Ebene oder Niemytzki Raum genannt und ist ein in der ganzen Topologie beliebtes (Gegen-)Beispiel.

Für Punkte in der offenen oberen Halbebene, d.h. $p = (x, y) \in \Gamma$ mit $y > 0$ sei

$$\mathcal{B}(p) := \{U_\varepsilon(p) : 0 < \varepsilon \leq y\},$$

also das System der üblichen ε -Kugeln um p (mit der Einschränkung, dass sie Γ nicht verlassen sollen). Für Punkte auf der x -Achse, d.h. $p = (x, y) \in \Gamma$ mit $y = 0$ sei

$$\mathcal{B}(p) := \{C_\varepsilon(p) : \varepsilon > 0\}, \text{ mit } C_\varepsilon(p) := \{q \in \Gamma : d(m, q) < \varepsilon \text{ mit } m = (x, \varepsilon)\} \cup \{p\},$$

also das System bestehend aus offenen ε -Kugeln in der oberen Halbebene, die tangential an die x -Achse bei p liegen, vereinigt mit p selbst.

- (i) Skizziere die Systeme $\mathcal{B}(p)$ für $p \in \Gamma$.
- (ii) Verifiziere, dass die Systeme $\mathcal{B}(x)$ die Bedingungen (UB1)–(UB3) in Thm. 1.20 erfüllen, also tatsächlich eine Topologie τ auf Γ definieren.
- (iii) Vergleiche die so entstandene Topologie τ mit der üblichen Topologie τ_E auf Γ (d.h. Γ als Teilmenge des \mathbb{R}^2 mit der Euklidischen Topologie). *Tipp:* Verwende Prop. 1.24, d.h. Aufgabe 15!
- (iv) Für $E \subseteq \Gamma$ vergleiche offenes Inneres E° und Abschluss \bar{E} bzgl. τ und τ_E .

17. *Keine Grundeigenschaften für Subbasen.*

Beweise Prop. 1.31 aus der Vorlesung: Sei X eine Menge und \mathcal{S} ein beliebiges Teilsystem der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$. Dann ist \mathcal{S} Subbasis einer eindeutig bestimmten Topologie τ auf X ; diese ist die größte Topologie, für die alle $S \in \mathcal{S}$ offen sind.

18. *Subbasis für \mathbb{R} .*

Zeige Bsp. 1.32 aus der Vorlesung, d.h. dass das System

$$\mathcal{S} := \{] - \infty, a[: a \in \mathbb{Q} \} \cup \{]b, \infty[: b \in \mathbb{Q} \}$$

eine Subbasis für die gewöhnliche Topologie auf \mathbb{R} ist.

19. *Basis für \mathbb{R}^2 .*

Zeige, dass das System bestehend aus allen offenen Rechtecken

$$\{]a, b[\times]c, d[: a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$$

eine Basis für eine Topologie auf \mathbb{R}^2 ist. Wie sieht diese Topologie aus? Gib eine Subbasis für diese Topologie an.

20. *Moore Ebene 2: Induzierte Topologien.*

Betrachte die Moore Ebene aus Aufgabe 16.

- (i) Welche Topologie wird auf der x -Achse induziert?
- (ii) Welche Topologie wird auf der positiven y -Achse, d.h. auf $\{(0, y) : y > 0\}$ induziert?

21. *Spurtopologie auf metrischen Räumen.*

Zeige Bsp. 1.35(4): Sei (X, d) metrischer Raum und betrachte X als topologischen Raum mit der von der Metrik induzierte Topologie τ_d (vgl. Bsp. 1.2(1)). Weiters sei $A \subseteq X$ und d_A bezeichne die Einschränkung der Metrik auf A . Zeige, dass

$$\tau_A = \tau_{d_A}$$

gilt, also die Spurtopologie τ_A auf A mit jener Topologie übereinstimmt, die von der Einschränkung d_A der Metrik d auf A induziert wird.

22. *Stetigkeit via Stetigkeit der Einschränkungen.*

Vervollständige den Beweis von Prop. 1.41(ii), d.h. zeige die folgende Aussage: Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, seien $A, B \subseteq X$ beide abgeschlossen, $X = A \cup B$ und seien $f|_A$ und $f|_B$ stetig. Dann ist auch f stetig.

23. *Charakterisierung von Homöomorphismen.*

Beweise Thm. 1.44 aus der Vorlesung, also die Äquivalenz der folgenden Aussagen für eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen:

- (i) f ist ein Homöomorphismus
- (ii) Für alle $A \subseteq X$ gilt: $f(A)$ offen in $Y \Leftrightarrow A$ offen in X
- (iii) Für alle $B \subseteq X$ gilt: $f(B)$ abgeschlossen in $Y \Leftrightarrow B$ abgeschlossen in X

24. *Basis der Produkttopologie.*

Zeige die in der Definition der Produkttopologie (Def. 1.48) verwendete Tatsache, dass für topologische Räume $(X_i)_{i \in I}$ mit beliebiger Indexmenge I das System

$$\mathcal{B} := \{\prod_{i \in I} U_i \mid \exists J \subseteq I \text{ endlich} : U_i = X_i \ (i \notin J), U_i \subseteq X_i \text{ offen } (i \in J)\}$$

die Eigenschaften einer Basis einer Topologie aus Thm. 1.28(ii) für $X = \prod_{i \in I} X_i$ erfüllt.

25. *Produkttopologie auf \mathbb{R}^n .*

Zeige, dass die Produkttopologie (Def. 1.48) auf \mathbb{R}^n gleich der Euklidischen Topologie ist.

26. *Inneres und Abschluss in der Produkttopologie.*

Seien X, Y topologische Räume und $A \subseteq X, B \subseteq Y$. Wir betrachten $X \times Y$ mit der Produkttopologie. Zeige die folgenden Aussagen:

- (i) $A^\circ \times B^\circ = (A \times B)^\circ$
- (ii) $\overline{A} \times \overline{B} = \overline{(A \times B)}$

2 Zusammenhang

27. *Zusammenhängende Mengen in \mathbb{R} .*

Zeige Beispiel 2.2(3), also die folgende Aussage für $A \subseteq \mathbb{R}$ mit der Euklidischen Topologie:

$$A \text{ ist zusammenhängend} \Leftrightarrow A \text{ ist Intervall (oder leer).}$$

Hinweis: Eine Möglichkeit den Beweis zu führen ist es, zunächst die folgende Hilfsaussage zu zeigen: A ist genau dann zusammenhängend, wenn für alle $x, y \in A, x < y: [x, y] \subseteq A$ gilt.

28. *Zusammenhangskomponenten.*

Zeige Eigenschaft 2.7(ii), also, dass für die Zusammenhangskomponenten $C(x)$ und $C(y)$ zweier Punkte $x \neq y$ in einem topologischen Raum

$$C(x) = C(y) \text{ oder } C(x) \cap C(y) = \emptyset$$

gilt.

29. *Zusammenhängend vs. wegzusammenhängend.*

Mache Beispiel 2.9(ii) explizit. Genauer zeige, dass der Graph $G = \{(x, \sin(1/x)) : x \in]0, 1]\}$ der Funktion $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(1/x)$ zusammenhängend und wegzusammenhängend ist. Zeige ebenso, dass $\overline{G} = G \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.

3 Konvergenz

30. *Topologie der punktweisen Konvergenz.*

Wir betrachten den Raum

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

aller reellwertigen Funktionen auf \mathbb{R} aus Beispiel 1.49 mit der Produkttopologie, die laut Bsp. 3.2.(3) auch die Topologie der punktweisen Konvergenz ist. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Details von Bsp. 3.7 zu diskutieren. Genauer zeige, dass die konstante Funktion $f(x) \equiv 1$ ein Häufungspunkt der Menge

$$E := \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : g(x) \neq 0 \text{ für nur endlich viele } x\}$$

ist, aber dass es *keine Folge* $(f_n)_n$ in E gibt, die gegen f konvergiert.

31. *Konvergenz von Teilnetzen.*

Beweise Bemerkung 3.14(i), d.h., dass falls ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ im topologischen Raum X gegen einen Punkt x konvergiert, so konvergiert auch jedes Teilnetz $(x_{i_h})_{h \in H}$ von $(x_i)_i$ gegen x .

32. *Topologie der punktweisen Konvergenz 2.*

Vervollständige das Bild, dass du aus Aufgabe 30 von der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ hast, indem du ein *Netz* in E konstruierst, dass gegen f konvergiert.

Hinweis: Ein solches muss es ja wegen Prop. 3.15 geben! Betrachte $I = \{M \subseteq \mathbb{R} : M \text{ endlich}\}$ und für $M \in I$ die charakteristische Funktion f_M von M .

33. *Konvergenz im Ordinalzahlraum.*

Wir betrachten den Ordinalzahlraum $(\Omega = [0, \omega_1], \tau_{\leq})$ aus Bsp. 1.37. Dort wurde gezeigt, dass ω_1 Häufungspunkt von $\Omega_0 = [0, \omega_1[$ ist. In Bsp. 3.7(2) wurde weiters gezeigt, dass es keine *Folge* in Ω_0 gibt, die in Ω gegen ω_1 konvergiert. Wegen Prop. 3.15 gibt es aber ein *Netz* in Ω_0 , das in Ω gegen ω_1 konvergiert. Konstruiere ein solches!

4 Trennungs- und Abzählbarkeitseigenschaften

34. *Die kofinite Topologie.*

Sie X eine unendliche Menge. Zeige, dass das System

$$\mathcal{O}_{\text{co}} := \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$$

eine T_1 - aber nicht Hausdorff-Topologie auf X definiert.

35. *Metrische Räume sind normal.*

Liefere die Details von Bsp. 4.8.(1) nach. Genauer, zeige, dass jeder metrische Raum (M, d) die Trennungseigenschaft T_4 besitzt. (Als T_2 -Raum (4.4.(2)) erfüllt X auch T_1 (4.1) und ist somit per definitionem normal, falls er T_4 erfüllt.)

Hinweis: Betrachte zwei disjunkte Teilmengen A und B von M und die Funktion

$$f(x) := \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Zeige, dass $f : M \rightarrow [0, 1]$ stetig ist, $f(A) \subseteq \{0\}$, $f(B) \subseteq \{1\}$ gilt und dass A und B durch die Urbilder geeignet gewählter Intervalle in $[0, 1]$ getrennt werden können.

36. *Tychonoff-Planke.*

Liefere die Details zu Bsp. 4.8.(1) nach. Genauer, sei $\bar{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit der Ordnungstopologie und sei $(\Omega = [0, \omega_1], \tau_{\leq})$ der Ordinalzahlraum (Bsp. 1.37). Zeige, dass

$$X := \Omega \times \bar{\mathbb{N}} \setminus \{(\omega_1, \infty)\}$$

mit der Spurtopologie der Produkttopologie von $\Omega \times \bar{\mathbb{N}}$ nicht normal ist.

Hinweis: Betrachte die disjunkten Mengen $A := \{\omega_1\} \times [0, \infty[$ und $B := [0, \omega_1[\times \{\infty\}$. Zeige nun, dass A und B abgeschlossen sind und jede offene Umgebung U von A nichtleeren Schnitt mit jeder offenen Umgebung V von B hat, also T_4 nicht erfüllt ist.

37. *Teilräume und Produkte von Hausdorff Räumen.*

- (i) Zeige, dass Teilräume von Hausdorff Räumen wieder Hausdorffsch sind.
- (ii) Zeige, dass für eine Familie $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ von nicht-leeren topologischen Räumen gilt:

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ ist Hausdorff} \Leftrightarrow X_i \text{ ist Hausdorff für alle } i.$$

38. *Die Sorgenfrey-Gerade ist Hausdorff.*

Zeige, dass in topologischen Räumen die Hausdorff-Eigenschaft erhalten bleibt, wenn die Topologie verfeinert wird. Schließe daraus, dass die Sorgenfrey-Gerade die Hausdorff-Eigenschaft besitzt.

39. *Zur Separabilität metrischer Räume.*

Beweise 4.14(iii) aus der Vorlesung, also, dass für metrische Räume (M, d) gilt

$$M \text{ ist separabel} \Leftrightarrow M \text{ ist AA2-Raum.}$$

40. *Abzählbarkeitsaxiome und der Niemytzki Raum.*

Ergänze 4.14(iv),(v) und verwende den Niemytzki Raum (Moore Ebene) aus Aufgabe 16 als Gegenbeispiel, um zu zeigen dass:

- (i) separabel und AA1 $\not\Rightarrow$ AA2
- (ii) Teilräume separabler Räume sind i.a. nicht separabel. *Hinweis:* Betrachte die x -Achse.

5 Kompaktheit

41. *Intervalle in \mathbb{R} .*

Zeige Beispiel 5.2(1),(2) also, dass für \mathbb{R} mit der Euklidischen Topologie und $a < b$ folgende Aussagen gelten. Verwende dabei direkt die Definition der Kompaktheit!

- (i) Die Intervalle $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, sowie $] - \infty, a]$ und $[b, \infty[$ sind nicht kompakt.
- (ii) Die Intervalle $[a, b]$ sind kompakt. *Hinweis:* Für eine beliebige offene Überdeckung \mathcal{U} von $[a, b]$ betrachte

$$K := \{c \in [a, b] : \text{eine endliche Teilüberdeckung von } \mathcal{U} \text{ überdeckt } [a, c]\}$$

und zeige, dass K abgeschlossenes Teilintervall von $[a, b]$ ist, das a enthält und offen in $[a, b]$ ist.

42. *Kompaktheit und endliche Durchschnittseigenschaft.*

Zeige (i) \Leftrightarrow (ii) in Thm. 5.3, also die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen topologischen Raum X :

- (i) X ist kompakt
- (ii) X hat die endliche Durchschnittseigenschaft, d.h. sind $F_i \subseteq X$ ($i \in I$) abgeschlossen mit $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, dann gibt es einer endlichen Teilmenge $J \subseteq I$, sodass schon $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.

43. *Absgeschlossene Teilmengen kompakter Räume.*

Zeige Prop. 5.5.(i), also dass für einen topologischen Raum X und $A \subseteq X$ gilt

$$X \text{ kompakt und } A \text{ abgeschlossen} \Rightarrow A \text{ kompakt.}$$

Hinweis. Verwende die endliche Durchschnittseigenschaft.

6 Vollständige metrische Räume

44. *Banachscher Fixpunktsatz.*

Formuliere und beweise den Banachschen Fixpunktsatz in vollständigen metrischen Räumen.

45. *Kompakte metrische Räume.*

Sei (M, d) ein kompakter metrischer Raum, d.h. M ist kompakt in der von der Metrik induzierten Topologie τ_d . Zeige, dass M vollständig ist.