1
2
3
4
5
G

Vorname:
Familienname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Note:

Prüfung zu

Partielle Differentialgleichungen

Sommersemester 2010, Roland Steinbauer

2. Termin, 30.9.2010

1. *Laplacegleichung.*

   (a) *Mittelwertformeln.*
   Formuliere und beweise die Mittelwertformeln für harmonische Funktionen. (4 Punkte)

   (b) *Eigenschaften harmonischer Funktionen.*
   Gib drei wichtige Eigenschaften harmonischer Funktionen an. (genaue/exakte Formulierung) (3 Punkte)

   (c) *Energiemethoden.*
   Formuliere und beweise das Eindeutigkeitsresultat für die Poissongleichung mit Energiemethoden. (3 Punkte)

2. *Wellengleichung*

   (a) *Huygensprinzip.*
   Diskutiere die unterschiedlichen Eigenschaften der Lösungen der Wellengleichung in geraden und ungeraden Raumdimensionen. Was ist die mathematische Ursache für dieses Phänomen, was die physikalische Interpretation? (3 Punkte)

   (b) *Kirchhoff-Formel.*
   Leite die Kirchhoff-Formel mit der Methode der sphärischen Mittel her. Die Euler-Poisson-Darboux Gleichung und die Reflexionsmethode nimm dabei als gegeben an. (4 Punkte)

   (c) *Wellengleichung vs. Wärmeleitungsgleichung.*
   Diskutiere die unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten für Lösungen der Wellen- bzw. Wärmeleitungsgleichung (3 Punkte)

3. *Methode der Charakteristiken.*

   (a) *Der lineare Fall.*
   Formuliere und beweise das Resultat, das die Lösungen linearer PDG 1. Ordnung über ihre Konstanz längs der projizierten Charakteristiken charakterisiert.
   (4 Punkte)

   (b) *Der allgemeine Fall.*
   Wie sieht im Fall einer allgemeinen PDG erster Ordnung

$$F(Du, u, x) = 0 \qquad (x \in U \subseteq \mathbb{R}^n)$$

   das Charakteristikensystem aus. (3 Punkte)

4. *Erhaltungssätze.*
   Was versteht man unter einem skalaren Erhaltungssatz in einer Raumdimension? Wie lauten die Rankine-Hugoniot Bedingungen? (3 Punkte)

5. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung. (Je 2 Punkte)

   (a) Eine harmonische Funktion, die beschränkt ist, ist schon konstant.

   (b) Die d'Alembert-Formel für die eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ auf } \mathbb{R} \times (0, \infty) \qquad u = g,\ u_t = h \text{ auf } \mathbb{R} \times \{0\}$$

   lautet

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(g(x+t) + g(x-t)\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\, dy.$$

   (c) Die Methode der Charakteristiken liefert (auch) im allgemeinen Fall globale Lösungen für PDG erster Ordnung.

   (d) Eine lineare PDG zweiter Ordnung ist hyperbolisch in x falls die Koeffizientenmatrix $A(x)$ mindestens einen verschwindenden Eigenwert besitzt.

   (e) Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist (global) $\mathcal{C}^\infty$.