1	
2	
3	
4	
5	
G	

Vorname:
Familienname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Note:

Prüfung zu

Partielle Differentialgleichungen

Sommersemester 2010, Roland Steinbauer

1. Termin, 30.6.2010

1. *Grundlegendes.*
   (a) Gib eine informelle und eine exakte Definition des Begriffs partielle Differentialgleichung. (3 Punkte)
   (b) Was versteht man unter einem wohlgestellten (well-posed) PDG-Problem? Was versteht man unter einer klassischen Lösung einer PDG? (2 Punkte)
2. Laplacegleichung.
   (a) *Fundamentallösung.*
   Leite die Fundamentallösung der Laplacegleichung her. (4 Punkte)
   (b) *Satz von Liouville.*
   Formuliere und beweise den Satz von Liouville über beschränkte harmonische Funktionen. (Die dazu gegebenenfalls benötigte lokale Abschätzung für Ableitungen harmonischer Funktionen nimm dabei als gegeben an.) (4 Punkte)
   (c) *Greenfunktion.*
   Skizziere die Methode der Greenfunktion für die Laplacegleichung. Insbesondere gehe auf die Rolle der Korrektorfunktion ein und gib die resultierende Darstellungsformel für die Lösung des Randwertproblems für die Poissongleichung an. (5 Punkte)
3. Wellengleichung
   (a) *D'Alembertformel.*
   Gib die d'Alembertformel an und skizziere ihre Herleitung. (Setze dabei die Lösungsformel für die Transportgleichung voraus.) (5 Punkte)
   (b) *Energiemethode und Eindeutigkeit.*
   Formuliere und beweise die Eindeutigkeitsaussage für die Wellengleichung auf beschränkten Gebieten mittels der Energiemethode. (4 Punkte)

4. *Methode der Charakteristiken—Explizite Rechung.*
Löse mittels der Methode der Charakteristiken das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} 7u_{x_1} + 4\,u_{x_2} &= 0 \text{ auf } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(\,.\,, 0) &= g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

(3 Punkte)

5. *Richtig oder falsch?*
Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung. (Je 2 Punkte)

   (a) Eine auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ harmonische Funktion ist dort glatt ($\mathcal{C}^\infty$) aber nicht analytisch.

   (b) Lösungen der Wärmeleitungsgleichung haben eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

   (c) Eindeutigkeitsaussagen für Lösungen der Poissongleichung (auf offenen beschränkten Gebieten mit $\mathcal{C}^1$-Rand) können mittels des Maximumsprinzip oder mittels Energiemethoden bewiesen werden. Im allgemeinen müssen beim Verwenden der Energiemethoden stärkere Voraussetzungen an die Regularität der Lösung gefordert werden.

   (d) Die Methode der Charakteristiken funktioniert nur für lineare und quasilineare PDG erster Ordnung.

   (e) Für skalare Erhaltungssätze in einer Raumdimension liefert die Methode der Charakteristiken im allgemeinen Lösungen für alle Zeiten (d.h. global in t).