Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1
2
3
4
G

Note:

Einführung in das mathematische Arbeiten

Roland Steinbauer, Sommersemester 2007

2. Prüfungstermin (17.4.2007)

1. *(Kurvendiskussion)* Eine rationale Funktion r der Form

$$r(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$$

hat ihren einzigen Pol, der erster Ordnung ist, bei $x = 1$. Der Punkt $P = (4, 33)$ ist ein Extremwert von r, und die Steigung von r bei $x = 0$ beträgt -24.

   (a) Bestimme die Funktionsgleichung von r. (4 Punkte)

   (b) Ermittle alle Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte von r. (2 Punkte)

   (c) Bestimme die schräge Asymptote von r und fertige eine Skizze an. (2 Punkte)

   (d) Ermittle den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das von r und der $x - Achse$ eingeschlossen wird. (2 Punkte)

2. *(Analytische Geometrie)*

   (a) Eine Ellipse und eine Parabel in erster Hauptlage haben einen gemeinsamen Brennpunkt und schneiden einander im Punkt $P = (3, 2\sqrt{6})$. Fertige eine Skizze an und bestimme die Gleichung von Parabel und Ellipse. Gibt es weitere Schnittpunkte? Wenn ja gib ihre Koordinaten an. (6 Punkte)

   (b) Eine Ebene ε im $\mathbb{R}^3$ hat die Gleichung $3x - 6y + 2z = 10$. Für den Punkt $P(-1|6|0)$ bestimme:

      (a) Die Gleichung der durch P gehenden Normale n auf ε.

      (b) Den Schnittpunkt von n und ε.

      (4 Punkte)

3. *(Ordnungsrelationen)*

   (a) Sei M eine Menge und $\mathbb{P}M$ ihre Potenzmenge. Zeige, dass folgende Relation auf $\mathbb{P}M$ eine Halbordnung ist

   $$A \preceq B \;:\Leftrightarrow A \subset B.$$

   Handelt es sich sogar um eine Totalordnung? (5 Punkte)

   (b) Definiere den Begriff geordneter Körper. (2 Punkte)

   (c) Zeige, dass in einem geordneten Körper $1 > 0$ gilt. (3 Punkte)

4. (a) *(Abbildungen)* Sei $f: \; A \to B$ eine Funktion.

      i. Für Teilmengen $M \subseteq A$ und $N \subseteq B$ definiere das Bild $f(M)$ sowie das Urbild $f^{-1}(N)$. (2 Punkte)

      ii. Zeige dass f genau dann surjektiv ist, falls $f(A) = B$ gilt. (3 Punkte)

   (b) *(Gruppen)* Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe.

      i. Definiere den Begriff einer Untergruppe von $(G, \circ)$. (1 Punkt)

      ii. Sei $H \subseteq G$. Zeige, dass die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind.

         - $\forall g, h \in H: \; g \circ h^{-1} \in H$
         - $\forall g, h \in H: \; g \circ h \in H \wedge h^{-1} \in H$

         (4 Punkte)