Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1
2
3
4
G

Note:

Einführung in das mathematische Arbeiten

Roland Steinbauer, Sommersemester 2007

1. Prüfungstermin (30.3.2007)

1. *(Kurvendiskussion)*

   (a) Ermittle die Koeffizienten der Polynomfunktion 3. Grades, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

   $$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

   deren Graph in $E_1 = (3, y_1)$ einen Extrempunkt und in $W = (2, y_w)$ den Wendepunkt hat. Die Gleichung der Wendetangente lautet $t_w :\ 3x + y = 4$.
   (5 Punkte)

   (b) Bestimme Nullstellen und Hoch- sowie Tiefpunkte von p. (4 Punkte)

   (c) Skizziere den Funktionsgraphen im Intervall $[0, 4]$ und berechne das Flächenstück, das vom Funktionsgraphen und der x-Achse zwischen den Nullstellen eingeschlossen wird. (3 Punkte)

2. (a) *(Gleichung)* Löse das folgende Gleichungssystem (5 Punkte)

   $$5^{y-x} = 25, \quad 5^y 25^x = 625.$$

   (b) *(Analytische Geometrie)* Gegeben sei die Kugel k mit Mittelpunkt $(1, 3, 5)$ und Radius 6. Ermittle die Gleichung der Kugel und bestimme die Lage der Geraden

   $$g : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   und der Ebene

   $$\varepsilon_1 : -3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 5$$

   in Bezug auf k. (*Hinweis:* Berechne den Abstand der Ebene vom Kugelmittelpunkt.) (4 Punkte)

3. *(Relationen, Abbildungen)*

   (a) Sei M eine Menge. Definiere den Begriff einer Äquivalenzrelation auf M. (3 Punkte)

   (b) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Zeige, dass die Äquaivalenzklassen C_a von $a \in M$ entweder disjunkt oder gleich sind. (3 Punkte)

   (c) Definiere den Begriff einer Abbildung zwischen den Mengen A und B (mind. eine der Definitionen aus der Vorlesung). Wie verhalten sich die Begriffe Abbildung und Relation zueinander? (4 Punkte)

4. *(Algebraische Strukturen)*

   (a) Zeige, dass das neutrale Element in einer Gruppe eindeutig bestimmt ist. (3 Punkte)

   (b) Wir betrachten den Ring $M_2(\mathbb{R})$ der 2×2 Matrizen mit reellen Einträgen.

   - Ist $M_2(\mathbb{R})$ ein Ring mit Eins? (Begründung; 1 Punkt)
   - Ist $M_2(\mathbb{R})$ kommutativer Ring? (Beweis oder Gegenbeispiel; 2 Punkte)
   - Ist $M_2(\mathbb{R})$ nullteilerfrei? (Beweis oder Gegenbeispiel; 2 Punkte)

   (c) Beweise, dass in einem Körper $(K, +, \cdot)$ für $a, b \in K$ gilt: $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. (2 Punkte)