

**Vorname:**  
**Familienname:**  
**Matrikelnummer:**  
**Studienkennzahl(en):**

1
2
3
4
G

**Note:**

Prüfung zu  
**Gewöhnliche Differentialgleichungen 1**  
Sommersemester 2005, Roland Steinbauer  
3. Termin, 25.11.2005

1. *Explizites Lösen von ODEs.*

Löse die folgenden (Systeme von) ODEs resp. AWP. (jeweils 4 Punkte)

(a)  $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$

(b)  $x' = \cos(t)(1+x)$

(c)  $y' = \frac{y}{t} - e^{-\frac{y}{t}} - 1, \quad y(1) = 0$

2. *Existenztheorie.*

- (a) Definiere den Begriff Lipschitz-stetig. Wie verhalten sich die Begriffe gleichmäßig stetig, Lipschitz-stetig und stetig zueinander? (ohne Beweise) (4 Punkte)
- (b) Diskutiere ein Beispiel einer ODE mit nicht Lipschitz-stetiger rechter Seite, wo die Eindeutigkeit von Lösungen nicht gegeben ist. Ist Lipschitz-stetigkeit notwendig für eindeutige Lösbarkeit einer ODE? Warum (nicht)? (4 Punkte)
- (c) Setze den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf voraus, um die folgenden Aussagen zu beweisen.
  - i. Die Lösung aus dem Satz von Picard-Lindelöf ist auf dem vom Satz garantierten Existenzintervall stetig differenzierbar.
  - ii. Ist die rechte Seite der ODE stetig differenzierbar, dann existiert eine eindeutige lokale Lösung des AWP und diese ist zweimal stetig differenzierbar.

3. *Lineare ODEs.*

- (a) Sei  $T \in L(\mathbb{R}^n)$ . Definiere das Exponential  $e^T$  (via Exponentialreihe) und untersuche das Konvergenzverhalten. (3 Punkte)
- (b) Diskutiere das Spur-Determinanten Diagramm für ebenen linearen Systeme. (Welche Typen von Gleichgewichten treten auf? Diskutiere die jeweilige Eigenwertkonstellation und fertige die Phasenportraits an.) (9 Punkte)

4. *Dynamische Systeme.*

- (a) Was wird unter der Variationsgleichung verstanden? In welchem Zusammenhang ist sie wichtig? (6 Punkte)
- (b) Was sind die Grundeigenschaften des Flusses einer (autonomen) ODE? (4 Punkte)
- (c) Was wird unter einem dynamischen System verstanden? (2 Punkte)