

Roland Steinbauer

Analysis für das Lehramt

Eine Einladung

Sommersemester 2024
(Version 24-Mar-2024)

Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Oskar-Morgenstern-Platz 1
A-1090 Wien, Österreich
roland.steinbauer@univie.ac.at
<http://www.mat.univie.ac.at/stein>

Vorwort

Das vorliegende Skriptum begleitet die Vorlesung

„Analysis in einer Variable für das Lehramt“

vom Sommersemester 2024 an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien. Es ist eine leichte Weiterentwicklung meines gleichnamigen Skriptums aus den Sommersemestern 2022 bzw. 2020 und beruht auf meinen früheren handschriftlichen Vorlesungsausarbeitungen zur *“Einführung in die Analysis“* vom Sommersemester 2012 und zur *“Analysis in einer Variable für LAK“* vom Wintersemester 2012/13.

Viel Inspiration verdanke ich den Analysis-Skripten von Günther Hörmann, die wiederum Anleihen an den feinen Lehrbüchern von Otto Forster nehmen. Neben ihm haben mich in meiner Art Vorlesungen & Skripten zu gestalten vor allem mein Doktorvater Michael Grosser und Michael Kunzinger beeinflusst. Viel verdanke ich auch den Vorlesungen meines frühen akademischen Lehrers Karl Sigmund und natürlich meinem „partner in crime“ Hermann Schichl. Viel gelernt habe ich von Josef Hofbauer und Andreas Kriegl, deren Vorlesungszyklen zur Analysis ich als Übungsleiter begleitet habe.

Meine Begeisterung für die Anfänger*innen-Lehre hat Hans-Christian Reichel geweckt und für die Lehre im Lehramtsstudium Stefan Götz. Von ihm und von Christoph Ableitinger habe ich ganz Wesentliches über Fachdidaktik gelernt und von Evelyn Süss-Stepancik und Sonja Kramer viel über die Mathematik in der Schule.

Die LaTeX-nische Umsetzung dieses Skriptums haben Argam Ohanyan und Liam Urban übernommen und danach Carina Aschauer und Lisa Paradeisz jeweils einen Korrekturdurchgang. Allen vier bin ich für ihre sorgfältige Arbeit zu großem Dank verpflichtet, ebenso wie den vielen Student*innen, die mich über die Jahre auf Fehler und Ungereimtheiten aufmerksam gemacht haben oder mich mit ihren Fragen herausgefordert, noch mehr nach Klarheit der Darstellung zu streben. Diesbezüglich habe ich natürlich auch viel von der Zusammenarbeit mit „meinen“ Übungsleiter*innen profitiert.

Klarerweise liegt die Verantwortung für alle verbliebenen Fehler und Schwächen des Texts bei mir alleine und ich freue mich über dementsprechende Hinweise.

Wien, Februar 2024

Roland Steinbauer

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
0.0	Was will und was soll die Analysis?	1
0.1	Die reellen und die komplexen Zahlen—Eine Zusammenfassung ...	4
1	Folgen und Reihen — Konvergenz	15
1.1	\mathbb{N} als Teilmenge von \mathbb{R} und einige Konsequenzen aus der Archimedischen Eigenschaft	15
1.2	Folgen und Grenzwerte	19
1.3	Vollständigkeit von \mathbb{R} , Konvergenzprinzipien	42
1.4	Reihen und Konvergenz	59
2	Stetige Funktionen	83
2.1	Stetigkeit	83
2.2	Sätze über stetige Funktionen	104
2.3	Elementare Transzendente Funktionen	119
2.3.1	Exkurs: Grundlagen der Analysis in \mathbb{C}	125
3	Differentiation	143
3.1	Differenzierbarkeit und Ableitung	144
3.2	Eigenschaften Differenzierbarer Funktionen	167
4	Integration	187
4.1	Das Riemann-Integral	187
4.2	Integral und Ableitung	203
4.3	Der Satz von Taylor	212
4.4	Uneigentliche Integrale	221
	Literaturverzeichnis	229
	Sachverzeichnis	231

Kapitel 2

Stetige Funktionen

Zusammenfassung. In diesem Kapitel befassen wir uns erstmals ausführlich mit *Funktionen* und zwar zunächst mit solchen von $D \subseteq \mathbb{R}$ nach \mathbb{R} , die folgende „schöne“ Eigenschaft haben:

Kleine Änderungen der Argumente verursachen nur kleine Änderungen der Funktionswerte.

Diese sogenannten *stetigen Funktionen* haben einige hervorragende Eigenschaften. Zwei wichtige davon sind, dass jede stetige Funktion auf abgeschlossenen Intervallen, d.h. jedes stetige $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt (Zwischenwertsatz) und
- Maximum und Minimum annimmt (Satz vom Maximum).

Nach einem gründlichen Studium des *Stetigkeitsbegriffs* lernen wir eine wichtige Klasse „einfacher“ Funktionen kennen: die *elementaren transzendenten* Funktionen. Dazu gehört insbesondere die *Logarithmusfunktion*, die die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist. Ebenfalls mittels der Exponentialfunktion gelangen wir zur Definition der allgemeinen *Potenz* r^α ($r > 0, \alpha \in \mathbb{R}$).

Danach erweitern wir die Konvergenztheorie von Folgen und Reihen auf den Fall komplexer Zahlen und gelangen über die komplexe Exponentialfunktion zu den *Winkelfunktionen* Sinus und Cosinus.

2.1 Stetigkeit


In diesem Abschnitt lernen wir den essentiellen Begriff der Stetigkeit für Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ kennen, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen ist. Wir verwenden dafür auch oft die Kurzschreibweise $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$. Zuvor wiederholen wir Grundlegendes über solche Funktionen.


Wiederholung 2.1.1 (Funktionen).

Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ zwischen (beliebigen) Mengen A und B ordnet *jedem* $a \in A$ *genau ein* $f(a) \in B$ zu, siehe [7, 3.4.1]. Das bedeutet, dass einerseits kein $a \in A$ von f „verschont“ bleibt — jedem a wird etwas zugeordnet — und andererseits jedem solchen a genau ein Bild $f(a)$ zugeordnet wird.

Warnung: Die Definition lässt dabei völlig offen, wie oft jedes $b \in B$ von f „getroffen“ wird, also wie viele a es in A gibt mit $f(a) = b$.

Gibt es für jedes b *zumindest ein* solches a , dann heißt f *surjektiv*, gibt es *höchstens ein* solches a , dann heißt f *injektiv*. Funktionen, die sowohl injektiv als auch surjektiv sind, heißen *bijektiv*, vgl. [7, Def. 4.3.17] bzw. die beiden folgenden Erklärvideos

► **Video**  Injektiv, surjektiv, bijektiv, Teil I

► **Video**  Injektiv, surjektiv, bijektiv, Teil II

Wir betrachten in diesem Skriptum (meist) reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$, die also auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind und Werte in \mathbb{R} annehmen. Für solche Funktionen ist der Graph [7, S. 163f]

$$G(f) = \{(x, f(x)) | x \in D\}$$

Teilmenge von \mathbb{R}^2 und kann in der „üblichen Weise“ in der (x, y) -Ebene dargestellt werden. Wir beginnen mit einer langen Liste von Beispielen.

Beispiel 2.1.2 (reelle Funktionen).

- (i) **Konstante Funktionen:** Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix gewählt, dann definiert

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

eine konstante Funktion, vgl. Abb. 2.1.

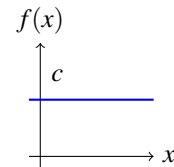


Abb. 2.1 Konstante Funktion

- (ii) **Die identische Abbildung** (vgl. Abb.2.2) auf \mathbb{R} (vgl. [7, S. 165]) ist gegeben durch

$$id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x.$$

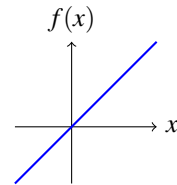


Abb. 2.2 Identische Abbildung

- (iii) **Lineare Funktionen** sind etwas allgemeiner: Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig, dann setzen wir

$$l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, l(x) = ax.$$

(Wir nennen dabei a den Anstieg von f , vgl. Abb. 2.3.)

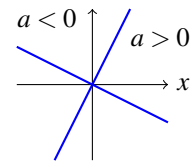


Abb. 2.3 Lineare Funktionen

- (iv) **Die Betragsfunktion:** vgl. 0.1.8, siehe Abb. 2.4,

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|.$$

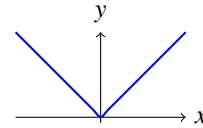


Abb. 2.4 Betragsfunktion

- (v) **Die Gaußklammer:** siehe Abb. 2.5,

$$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

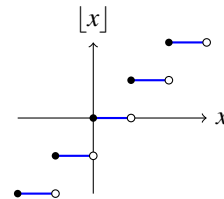


Abb. 2.5 Gaußklammer

- (vi) **Die Wurzelfunktion:** vgl. 0.1.12(iii), siehe Abb. 2.6,

$$\sqrt{\cdot} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}.$$

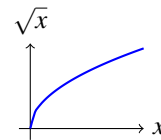


Abb. 2.6 Wurzelfunktion

- (vii) **Die Exponentialfunktion:** vgl. Def. 1.4.38, siehe Abb. 2.7,

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x).$$

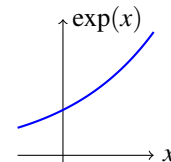


Abb. 2.7 Exponentialfunktion

- (viii) **Polynomfunktionen:** vgl. [7, S. 30], siehe Abb. 2.8. Seien $m \in \mathbb{N}$ und Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ gegeben, dann definieren wir $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Dabei nennen wir die höchste vorkommende Potenz den *Grad* von p . Ein einfaches Beispiel ist $p(x) = x^2 - x$ ($m = 2, a_0 = 0, a_1 = -1 = -a_2$)

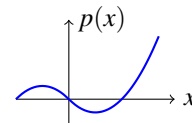


Abb. 2.8 Polynomfunktion

- (ix) **Rationale Funktionen:** Eine rationale Funktion ist Quotient zweier Polynomfunktionen, siehe Abb. 2.9. Sei also

$$p(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0.$$

und sei $D := \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. Dann definieren wir

$$r : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Ein Beispiel einer rationalen Funktion ist etwa

$$r_1 : \mathbb{R} \setminus \{1\} := D \ni x \mapsto \frac{x^2}{x-1} \in \mathbb{R},$$

oder etwas einfacher, mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $r_2(x) = \frac{1}{x}$, siehe Abb. 2.10.

Bemerke, dass Polynome rationale Funktionen mit Nenner $q(x) = 1$ sind.

- (x) **Treppenfunktionen:** Eine Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion (siehe Abb. 2.11), falls

- es eine endliche *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$ gibt $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$
- und Konstanten c_1, c_2, \dots, c_n , sodass $\varphi(x_k) = c_k$ für $x \in (t_{k-1}, t_k)$ ($1 \leq k \leq n$).

D.h. φ hat auf den offenen Teilintervallen (t_{k-1}, t_k) die Werte c_k , die endlich vielen Werte $\varphi(t_k)$ ($0 \leq k \leq n$) können beliebig sein.

Einfache Spezialfälle sind die Gaußklammer (v) und die Sprungfunktion H auf $[-1, 1]$, siehe Abb. 2.12, mit

$$H(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases},$$

d.h.

$t_0 = -1, t_1 = 0, t_2 = 1, c_1 = 0, c_2 = 1$ und $H(0) = \frac{1}{2}$.

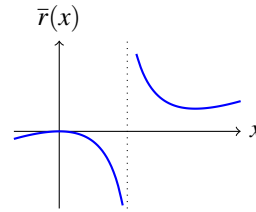


Abb. 2.9 Rationale Funktion

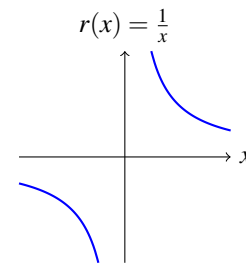


Abb. 2.10 Die rationale Funktion $r(x) = \frac{1}{x}$

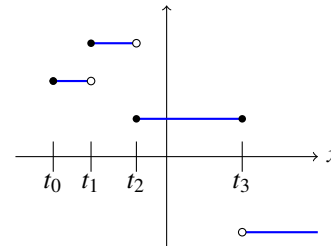


Abb. 2.11 Eine Treppenfunkt.

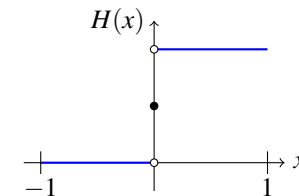
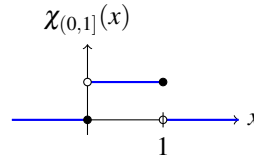


Abb. 2.12 Die Sprungfunktion H

(xi) **Charakteristische Funktionen einer Menge:**

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ dann definieren wir

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Für $M = (0, 1]$ sieht die charakteristische Funktion $\chi_{(0,1]}$ wie in Abb. 2.13 aus.

Abb. 2.13 Charakteristische Funktion $\chi_{(0,1]}$

So einfach das klingt, für „hässliche“ M kann das ganz schön unanschaulich werden, z.B. die sogenannte *Dirichlet-Funktion* $\chi_{\mathbb{Q}}$ mit ihren Graphen

$$G(\chi_{\mathbb{Q}}) = \{(q, 1) \mid q \in \mathbb{Q}\} \cup \{(r, 0) \mid r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\},$$

den wir gar nicht zeichnen können.

Faktensammlung 2.1.3 (Grundoperationen für Funktionen).

Wir werden hier einige Operationen besprechen, die es erlauben, komplizierte Funktionen aus einfachen Bausteinen zu basteln – diese Operationen sind nicht schwierig zu verstehen bzw. oft schon bekannt, der neue, aber wesentliche Gesichtspunkt ist, dass hier die Operationen in \mathbb{R} (Zielraum der Funktionen) verwendet werden, um Operationen für die Funktion *selbst* zu definieren – letzteres Konzept werden wir bald als wesentliches Werkzeug schätzen lernen.

Seien also $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen auf $D \subseteq \mathbb{R}$, und seien $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (i) Die Funktionen $f \pm g, \lambda \cdot f, f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$ sind in Termen der punktweisen Operationen in \mathbb{R} definiert, d.h.

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x), & (f - g)(x) &:= f(x) - g(x), \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda \cdot f(x), & (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

Annotations: "neues" + zw. Funkt. (pointing to the plus sign in the first equation), „altes“ + in \mathbb{R} (pointing to the plus sign in the second equation).

Nebenbemerkung: Die Menge der Funktionen auf D , d.h.

$$\mathfrak{F}(D) := \{f : D \rightarrow \mathbb{R}\}$$

ist mit $+$ und $\lambda \cdot$ ein \mathbb{R} -Vektorraum.

- (ii) Sei $D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$. Die *Quotientenfunktion* von f und g ist definiert durch

$$\frac{f}{g} : D' \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Das Bild von D unter f
 $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq \mathbb{R}$,
 vgl. [7, 4.3.11]

- (iii) Sei $E \subseteq \mathbb{R}$, sodass $f(D) \subseteq E$ und $h : E \rightarrow \mathbb{R}$. Dann können wir die *Verknüpfung* (Zusammensetzung, Komposition) von f mit h definieren als (vgl. [7, 4.3.23])

$$h \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (h \circ f)(x) = h(f(x))$$

Hier muss $f(x) \in E$ sein; sonst kann h nicht „zupacken“

Beispiel 2.1.4 (Operationen für Funktionen).

- (i) Für $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $q(x) = x^2$ gilt $q(x) = (id \cdot id)(x)$ (mit $id(x) = x$, vgl. 2.1.2(ii)).
 (ii) Allgemeiner lassen sich alle Polynome auf diese Art zusammensetzen:

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ also}$$

$$p = a_m \cdot (id \cdot id \cdot \dots \cdot id) + \dots + a_1 \cdot id + a_0 \cdot \chi_{\mathbb{R}}$$

konstante Fkt. 1

- (iii) Mit q wie in (i) gilt $\sqrt{\cdot} \circ q = |\cdot|$, denn

$$(\sqrt{\cdot} \circ q)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$$

Motivation 2.1.5 (Stetigkeit von Funktionen).

- (i) Dem Begriff der Stetigkeit einer Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in D$ liegt folgende intuitive Idee zugrunde:

Eine kleine Änderung der Argument-Stelle soll(te) nur eine kleine Änderung der Funktionswerte zur Folge haben.

Genauer gesagt, falls x nahe x_0 liegt, dann sollte $f(x)$ nahe bei $f(x_0)$ sein.

- (ii) Diese Eigenschaft ist natürlich in Anwendungen wichtig. Am Beispiel des Fahrradfahrens 0.0.3 bedeutet das:

Der Bremsweg sollte nur wenig länger werden,
wenn ich nur ein bisschen schneller fahre.

Generell zu Anwendungen im Kontext der Stetigkeit siehe etwa [3, S. 199].

Andererseits gibt es auch Fälle, wo diese Eigenschaft klar *nicht* erfüllt ist, z.B. Die Farbe der Ampel als Funktion der Zeit. Genauer, sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls die Ampel zum Zeitpunkt } t \text{ rot ist, und} \\ 1 & \text{falls die Ampel zum Zeitpunkt } t \text{ grün ist.} \end{cases}$$

Betrachten wir nun den Zeitpunkt t_0 , an dem die Ampel umschaltet: Hier kann nicht garantiert werden, dass eine kleine Änderung in der Zeit nur eine kleine Änderung der Funktionswerte ergibt.

- (iii) Wir beginnen nun, die intuitive Idee der Stetigkeit von $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in D$ zu formalisieren:

Es scheint wünschenswert, zuerst eine „Toleranzgrenze“ für die Funktionswerte vorzugeben, also eine beliebige ε Umgebung von $f(x_0)$ und dann zu fordern, dass es ein „Sicherheitsintervall“ $U_\delta(x_0)$ um x_0 geben soll, sodass

x im Sicherheitsintervall um x_0

$|x - x_0| < \delta$ ergibt, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$f(x)$ innerhalb der Toleranzgrenze um $f(x_0)$

Graphisch können wir die Bedingung etwa wie in Abb. 2.14 darstellen:

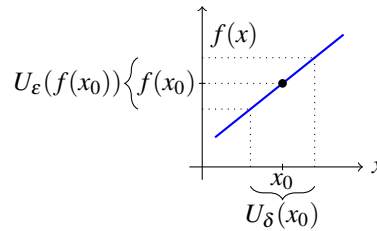


Abb. 2.14 $\varepsilon - \delta$ -Stetigkeit

Der Witz der Formulierung ist, dass für jede (noch so kleine) Toleranz ε es ein δ -Sicherheitsintervall gibt. Offiziell definieren wir nun wie folgt:

Definition 2.1.6 (Stetigkeit).

Sei $f: \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und sei $x_0 \in D$ eine Stelle im Definitionsbereich.

(i) f heißt stetig in x_0 , falls

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.} \quad (2.1)$$

(ii) f heißt stetig (auf D), falls f stetig in jedem $x_0 \in D$ ist.

Bemerkung 2.1.7 (Zur Stetigkeit).

(i) Offensichtliche Umformulierung der Stetigkeit im Punkt x_0 sind

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: x \in U_\delta(x_0) \cap D \implies f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

und

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(U_\delta(x_0) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0)).$$

(ii) Will ich konkret für $x_0 \in D$ zeigen, dass f dort stetig ist, dann muss ich für jede noch so kleine Toleranz ε um $f(x_0)$ ein entsprechendes Sicherheitsintervall $U_\delta(x_0)$ finden (können) sodass sich

$$\text{aus } |x - x_0| < \delta \text{ die Abschätzung } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ ergibt.}$$

Im Allgemeinen wird die Größe des Sicherheitsintervalls δ von der (zuvor festgelegten) Toleranz ε abhängen, also ist δ ein $\delta(\varepsilon)$. Beachte auch hier¹ die

GROSSE FETTE WARNUNG:

Niemals darf umgekehrt ε von δ abhängen. Die Reihenfolge der Quantoren ist also auch hier essentiell.

Beispiel 2.1.8 (Stetige Funktionen).

(i) *Konstante Funktionen sind stetig* (in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs). Sei also

¹ Vergleiche die Definition des Grenzwerts 1.2.6 bzw. 1.2.9.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = c \quad \text{für ein fixes } c \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt $\forall x_0 \in D$ und $\forall x \in D$ dass $|f(x) - f(x_0)| = 0$, also gilt (2.1) $\forall \varepsilon > 0$ mit jedem beliebigen $\delta > 0$.

f so banal, dass δ unabhängig von ε und x_0 gewählt werden kann

(ii) *Lineare Funktionen sind stetig* (in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs). Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = ax \quad \text{für ein } a \in \mathbb{R}.$$

Vorüberlegung: Falls $a = 0$, liegt die konstante Funktion $f(x) = 0$ vor und diese ist nach (i) stetig. Sei also $a \neq 0$. Wir müssen $|f(x) - f(x_0)|$ abschätzen und es gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |a||x - x_0|.$$

Wir müssen also nur $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ wählen.

f so banal, dass δ unabhängig von x_0 gewählt werden kann

Nun zum *Beweis:* Sei also $\varepsilon > 0$. Wähle² $\delta = \varepsilon/|a|$ ($> 0!$), dann gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x_0 - x| \leq \delta$

$$|f(x_0) - f(x)| = |a||x - x_0| \leq |a|\delta = |a|\frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon.$$

(iii) *Die Exponentialfunktion ist stetig* (in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$).

Vorüberlegung: Für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} |\exp(x) - \exp(x_0)| &= | \underbrace{\exp(x - x_0 + x_0)}_{\exp(x-x_0) \cdot \exp(x_0) \text{ (1.4.40)}} - \exp(x_0) | \\ &\stackrel{1.4.41(i)}{=} \exp(x_0) |\exp(x - x_0) - 1|. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Um den Abstand $|\exp(x) - \exp(x_0)|$ abzuschätzen müssen wir also nur $|\exp(x - x_0) - 1|$ für x nahe x_0 abschätzen, also $|\exp(y) - 1|$ für y nahe 0. Das erledigt aber Prop. 1.4.43 mit $N = 0$ für uns³, denn

$$\begin{aligned} \exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} + R_1(y) = 1 + R_1(y) \\ \Rightarrow |\exp(y) - 1| &= |R_1(y)| \leq 2|y|, \quad \text{falls } |y| < 1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nun also zum *Beweis* der Stetigkeit von \exp : Sei wie üblich $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta := \min(1, \varepsilon/2\exp(x_0))$, dann gilt für alle $|x - x_0| \leq \delta$

² Hier und in den kommenden Beweisen unterwollen wir die entscheidenden Abschätzungen, die für den Nachweis der Stetigkeit lt. Def. 2.1.6 benötigt werden.

³ Diese durchaus technische Proposition war ja als wichtig angekündigt!

$$\begin{aligned} |\exp(x) - \exp(x_0)| &\stackrel{(2.2)}{=} \exp(x_0) \cdot |\exp(x - x_0) - 1| \\ &\stackrel{(2.3)}{\leq} \exp(x_0) \cdot 2|x - x_0| \lesssim 2 \exp(x_0) \cdot \delta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(iv) *Der Betrag ist stetig* (in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$). Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, setze $\delta = \varepsilon$ (weil der Anstieg $a = \pm 1$, vgl. (ii)), dann gilt für alle $|x - x_0| < \delta$

$$\underbrace{|x - x_0|}_{\substack{\leq \\ \uparrow \\ \text{verkehrte Dreiecksungleichung}}} \leq |x - x_0| \lesssim \delta = \varepsilon.$$

(v) *Sprünge sind nicht stetig. Das ist das Erzbeispiel unstetiger Funktionen!* Sei

$$f(x) = \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist f unstetig bei $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$.

Vorüberlegung: Es gilt $f(0) = 1$, aber beliebig nahe „links“ von $x_0 = 0$ gilt $f = 0$, das muss schiefgehen, und ebenso bei $x_1 = 1$! Überall sonst ist χ als konstante Funktion stetig.

Beweis: Sei also $\varepsilon = \frac{1}{2}$, dann gilt für alle $\delta > 0$ (egal wie klein!) $\exists x \in U_\delta(0)$ mit $x < 0$ und somit

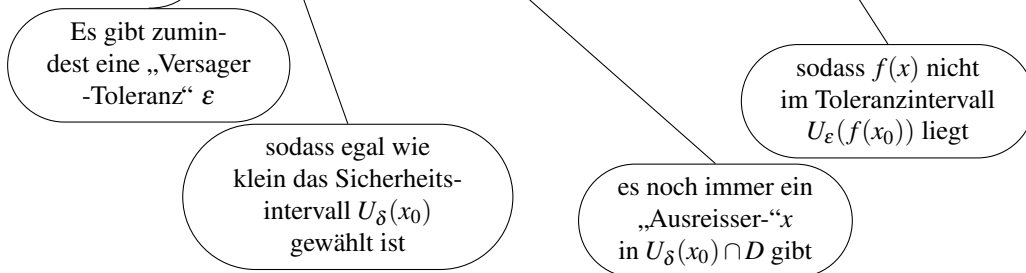
$$|f(x) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Bemerkung 2.1.9 (Stetige und unstetige Funktionen).

(i) Wie wir es in 2.1.8(v) gesehen haben, muss für einen Beweis der Unstetigkeit einer Funktion f an einer Stelle $x_0 \in D$ nur ein „Versager- ε “ angegeben werden (vgl. 1.2.9(iii)). Genauer lautet die Verneinung der Bedingung (2.1)

$$\neg \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right) =$$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in D : |x - x_0| < \delta : \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$



(ii) Wie schon in 2.1.7(iii) gesagt, ist es entscheidend, dass in der Stetigkeitsbedingung 2.1 *zuerst die Toleranz ε vorgegeben* wird und erst *dann das Sicherheitsintervall* gefunden werden muss.

Kehrt man dies *fälschlicherweise* um zu

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

Ergibt sich auch, falls in (2.1) im hinteren Teil ε mit δ vertauscht wird.

dann wäre z.B. der Sprung in 2.1.8(v) stetig. Tatsächlich brauche ich nur $\varepsilon > 1$ zu wählen, damit es sich ausieht, wie in Abbildung 2.15 zu sehen ist:

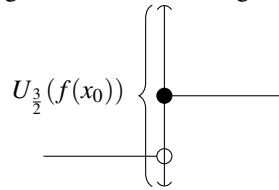


Abb. 2.15 Sprungfunktion mit $\varepsilon = \frac{3}{2}$

- (iii) Die Funktionswerte $f(x)$ einer bei x_0 stetigen Funktion f bleiben also für x nahe bei x_0 in der Nähe von $f(x_0)$. Anders ausgedrückt falls $f(x_0) \neq C$, dann bleibt $f(x)$ nahe bei x_0 auch weg von C . Diese Überlegung präzisieren wir im folgenden – oft sehr brauchbaren – Lemma für $C = 0$; der allgemeine Fall folgt sofort durch Verschieben des Graphen.

Lemma 2.1.10 (Nichtverschwinden auf Umgebung).

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und sei $f(x_0) \neq 0$. Dann $\exists \delta > 0$, sodass auch $\forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$ gilt, dass $f(x) \neq 0$.

Beweis. Weil $f(x_0) \neq 0$ ist, gilt

$$\varepsilon := \frac{|f(x_0)|}{2} > 0.$$

Nach Gleichung (2.1) gilt daher

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \\ \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}. \end{aligned}$$

Also gilt $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap D$ mit der verkehrten Δ -Ungleichung

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \\ &\geq |f(x_0)| - |f(x) - f(x_0)| \\ &> |f(x_0)| - \varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0. \quad \square \end{aligned}$$

Die Beweisidee lässt sich graphisch sehr schön darstellen, vgl. Abb. 2.16. Dazu nehmen wir o.B.d.A. an, dass $f(x_0) > 0$ gilt.

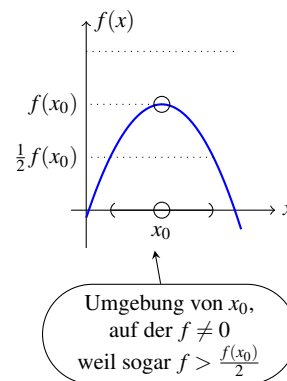


Abb. 2.16 graphische Beweisidee

Motivation 2.1.11 (Stetigkeit und Folgen).

Die intuitive Idee der Stetigkeit von f in einem Punkt $a \in D$ lässt sich wie folgt umformulieren:

Wenn sich x an a annähert, dann nähert sich auch $f(x)$ an $f(a)$ an.

Wir können diese Idee auch graphisch darstellen, wie in Abb. 2.17 und 2.18:

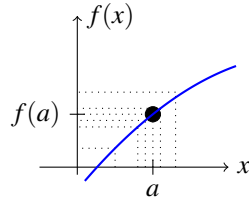


Abb. 2.17 x nähert sich an a an, und ebenso $f(x)$ an $f(a)$

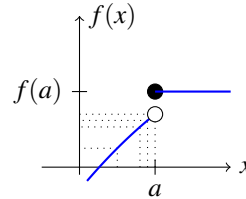


Abb. 2.18 x nähert sich an a an, aber *nicht* $f(x)$ an $f(a)$

Diese Idee lässt sich nun mittels Folgen präzisieren als:

Für alle Folgen $x_n \rightarrow a$ gilt $f(x_n) \rightarrow f(a)$, bzw.,

Für alle Folgen $x_n \rightarrow a$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$. ← f vertauscht mit Limiten

und sie funktioniert auch formal, wie das folgende essentielle Theorem lehrt:

Theorem 2.1.12 (Stetigkeit via Folgen).

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $a \in D$. Dann gilt

f ist stetig in $a \iff$ Für jede Folge (x_n) in D gilt $x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Beweis. \Rightarrow : (Im Wesentlichen müssen wir nur die entsprechenden Definitionen aneinander reihen.)

Sei (x_n) eine Folge in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ gilt. Sei also $\varepsilon > 0$, dann gilt wegen (2.1), dass

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(a) \cap D : |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{2.4}$$

und weil $x_n \rightarrow a$ haben wir

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : |x_n - a| < \delta. \tag{2.5}$$

Daher

$$\forall n \geq N \stackrel{(2.5)}{\Rightarrow} |x_n - a| < \delta \stackrel{(2.4)}{\Rightarrow} |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon,$$

also gilt $\lim(f(x_n)) = f(a)$.

\Leftarrow : (Dieser Teil ist schwieriger. Wir gehen indirekt vor und benutzen die Unstetig-

keit von f um eine „Ausnahmenfolge“ zu konstruieren, die der Bedingung auf der rechten Seite widerspricht.)

Indirekt angenommen, f ist unstetig in $a \in D$. Wir konstruieren eine Folge (x_n) in D mit $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$. Da f in a unstetig ist gilt (vgl. 2.1.9(i))

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in U_\delta(a) \cap D : f(x) \notin U_\varepsilon(f(a)).$$

Wir fixieren dieses ε und wählen sukzessive $\delta = \frac{1}{n}$ ($\mathbb{N} \ni n \geq 1$). Damit erhalten wir eine Folge (x_n) in D mit

- $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a)$, d.h. $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, also $x_n \rightarrow a$, aber
- $f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(a))$, d.h. $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$, also $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$. \square

Bemerkung 2.1.13 (Umgebungsstetigkeit vs. Folgenstetigkeit).

- (i) Zur Terminologie: Bedingung (2.1) benutzt Umgebungen, um die Stetigkeit zu definieren, man spricht daher von *Umgebungsstetigkeit*. Die rechte Seite in Theorem 2.1.12 hingegen verwendet Folgen und man spricht von *Folgenstetigkeit*.
- (ii) Die Folgenstetigkeit lässt sich abgekürzt besonders schön so ausdrücken:

$$f \text{ vertauscht mit Limiten, d.h. } f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n))$$

- (iii) Theorem 2.1.12 besagt in dieser Terminologie, dass (für Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$) Folgenstetigkeit und Umgebungsstetigkeit dasselbe sind [Für Funktionen auf (viel) allgemeineren (aber wichtigen) Mengen ist das nicht der Fall. „ \Rightarrow “ gilt immer, „ \Leftarrow “ ist im Allgemeinen falsch!]
- (iv) Mittels Folgenstetigkeit lassen sich Sprungstellen besonders elegant finden und als Unstetigkeitsstellen entlarven.

Beispiel 2.1.14 (Sprünge).

- (i) Die Gaußklammer (vgl. 2.1.2(v)) ist stetig in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und unstetig in jedem $a \in \mathbb{Z}$.
- Sei $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor a \rfloor = a$ und die Folge $x_n = a - \frac{1}{n}$ erfüllt $x_n \rightarrow a$, aber $\lfloor x_n \rfloor = \lfloor a - \frac{1}{n} \rfloor = a - 1$, daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor x_n \rfloor = \lim_{n \rightarrow \infty} a - 1 = a - 1 \neq a = \lfloor a \rfloor = \left\lfloor \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right\rfloor.$$

- Für $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ gilt $\lfloor a \rfloor < a < \lfloor a \rfloor + 1$. Daher gilt für jede Folge $x_n \rightarrow a$:

$$\exists N_0 \quad \forall n \geq N_0 : \lfloor a \rfloor < x_n < \lfloor a \rfloor + 1,$$

$$\text{also } \lfloor x_n \rfloor = \lfloor a \rfloor \quad \forall n \geq N_0 \text{ und somit } \lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor x_n \rfloor = \lfloor a \rfloor = \left\lfloor \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right\rfloor.$$

- (ii) Die Dirichlet-Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ (vgl. 2.1.2(xi)) ist unstetig in jedem $x \in \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Wir unterscheiden die Fälle:

- $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Dann ist $\chi_{\mathbb{Q}}(a) = 0$. Wegen der Dichtheit von \mathbb{Q} in \mathbb{R} (vgl. 0.1.12(ii)) können wir in jedem Intervall $U_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$ eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ finden, d.h. $\forall \delta > 0 \exists q \in \mathbb{Q} : |q - a| < \delta$, aber klarerweise

gilt

$$|\chi_{\mathbb{Q}}(q) - \chi_{\mathbb{Q}}(a)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

- $a \in \mathbb{Q}$. Dann ist $\chi_{\mathbb{Q}}(a) = 1$. Wegen der Dichtheit von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in \mathbb{R} (vgl. 0.1.12(ii)) gilt völlig analog zu Fall (i): $\forall \delta > 0 \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : |r - a| < \delta$ und daher

$$|\chi_{\mathbb{Q}}(r) - \chi_{\mathbb{Q}}(a)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Warnung 2.1.15 (Zur (Un-)Stetigkeit—Oszillation).

- (i) *Sprünge sind nicht die einzige Ursache der Unstetigkeit.* Auch „wilde Oszillation“ führt zu Unstetigkeit, denn sei z.B. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(0) = 0$ und sonst durch die in Abb. 2.19 dargestellten immer schmäler werdenden „Zacken“

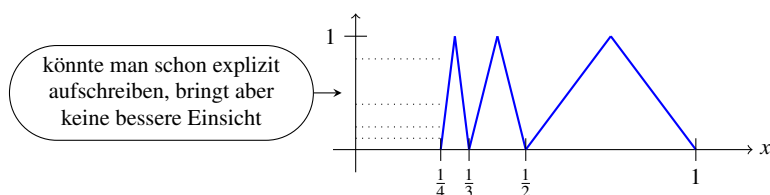


Abb. 2.19 Unstetige „Zackenfunktion“

Zunächst gilt für alle $x_0 > 0$, dass f stetig in x_0 ist, denn dort ist f eine sogenannte stückweise lineare Funktion, vgl. 2.1.8(ii) und 2.1.8(iv).

Aber f ist in $x_0 = 0$ nicht stetig, denn es gibt für jedes $c \in [0, 1]$ eine Folge (x_n) mit $x_n \rightarrow 0$ und $f(x_n) = c \forall n \in \mathbb{N}$, siehe Abbildung.

Also ist f in 0 *unstetig*, obwohl die Funktion dort nicht springt, sondern eher wie eine sich verdichtende Welle aussieht.

- (ii) Folgende „Merkregel“, die auch in Schulbüchern zu finden ist und oft als „Bleistiftstetigkeit“ bezeichnet wird, ist *sehr problematisch*:

? Eine reelle Funktion ist stetig, ?
? wenn man sie ohne Absetzen zeichnen kann. ?

Erstens ist nicht *genau* klar, was das heißen soll — außer dass offensichtlich Sprünge ausgeschlossen werden sollen.

Und zweitens ist etwa folgende Modifikation \tilde{f} von f aus (i),

$$\tilde{f}(x) = x \cdot f(x) \quad \text{siehe Abbildung 2.20}$$

stetig auf $[0, 1]$.

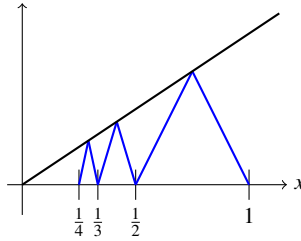


Abb. 2.20 Stetige „Zackenfunktion“

Die Stetigkeit bei $x_0 = 0$ folgt, da offensichtlich $\tilde{f}(x) \leq x$ für alle x gilt. Daher gilt auch für alle Nullfolgen $x_n \rightarrow 0$

$$0 \leq \tilde{f}(x_n) \leq x_n \rightarrow 0,$$

womit nach dem Sandwich-Lemma 1.2.28 $\tilde{f}(x_n) \rightarrow 0$ und daher \tilde{f} mit 2.1.12 stetig in $x_0 = 0$ ist.

Anschaulich können wir also sagen, dass die „wilde Oszillation“ von f hier durch Multiplikation mit x „gedämpft“ wird, also „gezähmte Oszillationen“ nicht unbedingt zur Unstetigkeit führen.

Nun ergibt sich aber beim Zeichnen des Graphen von \tilde{f} das folgende Problem: Die Länge des Graphen auf dem endlichen Intervall $[0, 1]$ ist nicht endlich⁴. Genauer gilt nämlich für die Länge des Graphen von $x = 1$ (nach links) bis $x = \frac{1}{n}$, die wir hier als $l(1/n)$ bezeichnen

$$l\left(\frac{1}{n}\right) \geq 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}, \quad \text{was nach 1.4.8(ii) für } n \rightarrow \infty \text{ divergiert.}$$

Die Länge des Graphen von $\frac{1}{k-1}$ bis $\frac{1}{k}$ ist sicher größer als 2-mal die niedrigste Höhe der begrenzenden Funktion x , also $2 \cdot \frac{1}{k}$

- (iii) *Es gibt Monster.* So anschaulich die Definition der Stetigkeit auch sein mag – es gibt völlig unanschauliche Funktion mit sehr eigenartigem Stetigkeitsverhalten. So gibt es zum Beispiel eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die in allen irrationalen Punkten stetig ist, in allen rationalen Punkten aber unstetig.

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben als

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit minimalem } q \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

⁴ Daher könnte man einwenden, dass alle Bleistifte dieser Welt verbraucht worden sind, bevor man $x_0 = 0$ erreicht, also man vernünftigerweise nicht davon sprechen kann, den Graphen zeichnen zu können — mit oder ohne Absetzen.

Dann gilt:

- f ist unstetig in allen $x_0 \in \mathbb{Q}$: Sei $x_0 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ vollständig gekürzt, dann setze $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{q}$. Weil $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in \mathbb{R} dicht liegt (vgl. 0.1.12(ii)) gilt $\forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $|x - x_0| < \delta$, aber

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| 0 - \frac{1}{q} \right| = \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \frac{1}{q} = \varepsilon.$$

- f ist stetig in allen $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Sei $\varepsilon > 0$ gewählt. Von allen Zahlen $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $q < \frac{1}{\varepsilon}$ liegen in jedem Intervall nur endlich viele und keines davon ist gleich x_0 weil $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegt!

Also gibt es ein $\frac{p_0}{q_0}$, das x_0 am nächsten liegt. Definiere $\delta = \left| x_0 - \frac{p_0}{q_0} \right|$. Nun gilt $\forall x$ mit $|x - x_0| < \delta$, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, denn falls

– $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| < \varepsilon$ und falls

– $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \frac{p'}{q'}$ (gekürzt) mit $q' > \frac{1}{\varepsilon}$, denn in $U_\delta(x_0)$ liegt nach Wahl von δ keine Zahl $\frac{p'}{q'}$ mit $q' \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Also gilt $f(x) = \frac{1}{q'} < \varepsilon$ und daher

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| 0 - \frac{1}{q'} \right| = \frac{1}{q'} < \varepsilon.$$

- (iv) *Offensichtlicher Unfug*: Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$, vgl. 2.1.2(ix) und betrachten die folgende Frage (die auch im Schulkontext gelegentlich auftritt):

Ist $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $x_0 = 0$ stetig?

Diese Frage ist Unfug, weil $x_0 = 0 \notin D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, daher ist f in x_0 gar nicht definiert (vgl. Abb. 2.21) und die Frage nach der Stetigkeit kann gar nicht gestellt werden! Tatsächlich werden wir gleich sehen, dass alle rationalen Funktionen auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig sind.

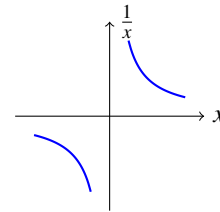


Abb. 2.21 Graph der Funktion $\frac{1}{x}$

Allerdings werden wir in Bemerkung 2.1.28 in einem gewissen Sinn zu obiger Frage zurückkehren, und diskutieren, ob man $1/x$ nicht wenigstens zu einer auf ganz \mathbb{R} stetigen Funktion ausdehnen kann — in dem Sinne, dass $1/x$ außerhalb von $x_0 = 0$ erhalten bleibt. Die Antwort wird aber negativ ausfallen.

Motivation 2.1.16 (Grundoperationen und Stetigkeit).

Im Folgenden werden wir auf elegante Weise sehen, dass viele (Klassen von) Funktionen stetig sind. Dazu werden wir uns der Grundoperationen für Funktionen aus 2.1.3 bedienen ($\pm, \lambda, \cdot, -$) und zeigen, dass diese aus stetigen Funktionen wieder-

um stetige Funktionen machen. Anders formuliert: Anwenden der Grundoperationen führt nicht aus der Klasse der stetigen Funktionen hinaus und ist daher eine sehr elegante Methode zum „Basteln“ vieler *neuer stetiger* Funktionen.

Proposition 2.1.17 (Grundoperationen für stetige Funktionen).

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Falls $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$ sind, dann sind auch

$$f \pm g : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad fg : D \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig in a . Falls $a \in D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$, dann ist auch

$$\frac{f}{g} : D' \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig in a .

(ii) Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$ und $h : E \rightarrow \mathbb{R}$. Falls f stetig in $a \in D$ und h stetig in $b := f(a) \in E$ sind, dann ist auch die Zusammensetzung (vgl. 2.1.3(iii))

$$h \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

Genauer:
 $D \xrightarrow{f} f(D) \subseteq E \xrightarrow{h} h(E) \subseteq \mathbb{R}$

stetig in a .

Beweis. (Folgenstetigkeit und Grenzwertsätze greifen hier optimal ineinander und liefern den Beweis frei Haus.)

(i) Wir beweisen nur die Aussage für die Summe, die anderen Fälle sind völlig analog. Sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \rightarrow a$. Wir zeigen $(f+g)(x_n) \rightarrow (f+g)(a)$, woraus mit 2.1.12 die Stetigkeit von $f+g$ in a folgt.

$$(f+g)(x_n) \stackrel{2.1.3(i)}{=} f(x_n) + g(x_n) \stackrel{\substack{f,g \text{ stetig} \\ 1.2.22}}{\rightarrow} f(a) + g(a) \stackrel{2.1.3(i)}{=} (f+g)(a) \quad (n \rightarrow \infty)$$

(ii) Wir verwenden so wie oben 2.1.12. Sei also (x_n) eine Folge in D mit $x_n \rightarrow a$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f \text{ stetig in } a &\stackrel{2.1.12}{\Rightarrow} f(x_n) \rightarrow f(a) = b \\ &\Rightarrow (y_n) := (f(x_n)) \text{ ist Folge in } E \text{ mit } y_n \rightarrow b \\ h \text{ stetig in } b &\stackrel{2.1.12}{\Rightarrow} h(y_n) \rightarrow h(b). \end{aligned}$$

Also gilt insgesamt

$$(h \circ f)(x_n) = h(f(x_n)) = h(y_n) \rightarrow h(b) = h(f(a)) = (h \circ f)(a)$$

und damit ist $h \circ f$ stetig in a . \square

Korollar 2.1.18 (Stetigkeit von Polynomen und rationalen Funktionen).

Polynome und rationale Funktionen sind stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich.

Beweis. (Jetzt nutzen wir unser Werkzeugkasten zum „Basteln“, vgl. 2.1.16)

Polynome sind endliche Summen endlicher Produkte konstanter Funktionen mit id , vgl. 2.1.4(ii). Alle *Bausteine* sind stetig (2.1.8(i), 2.1.8(ii) mit $a = 1$), daher folgt aus 2.1.17(i) $[+, \cdot]$ die Stetigkeit von Polynomen in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs.

Rationale Funktionen sind Quotienten von Polynomen, definiert in allen Punkten, in denen der Nenner nicht verschwindet, vgl. 2.1.2(ii). Polynome sind nach Obigem stetig auf ihrem Definitionsbereich, also nach 2.1.17(i) auch rationale Funktionen in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs. \square

Beispiel 2.1.19 (Stetige Funktionen mittels Prop. 2.1.17).

- (i) $p(x) = -x^2$ ist als Polynom stetig auf ganz \mathbb{R} wegen 2.1.18. \exp ist stetig auf \mathbb{R} (Bsp. 2.1.8(iii)). Also gilt wegen Prop. 2.1.17(ii), dass die sogenannte Gaußglockenfunktion (siehe Abbildung 2.22)

$$\exp \circ p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(-x^2)$$

stetig auf \mathbb{R} ist.

- (ii) Der *hyperbolische Sinus* und *Cosinus* (vgl. Abb. 2.23) sind stetig.

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$$

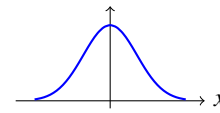


Abb. 2.22 Gaußglocke

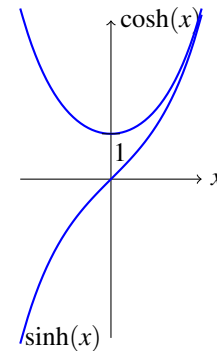


Abb. 2.23 Hyperbolischer Sinus und Cosinus

Anmerkung: Diese beiden Funktionen werden auch Hyperbelfunktionen oder *Sinus hyperbolicus* und *Cosinus hyperbolicus* genannt. Sie parametrisieren die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ gemäß

$$\begin{pmatrix} x = \cosh(t) \\ y = \sinh(t) \end{pmatrix}$$

in völliger Analogie zur Parametrisierung des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ durch die „normalen“ Winkelfunktionen

$$\begin{pmatrix} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Motivation 2.1.20 (Grenzwerte von Funktionen).

Als nächstes verbinden wir den Grenzwertbegriff mit dem Funktionsbegriff. Das wird uns unter anderem auf eine weitere Charakterisierung des Stetigkeitsbegriffs führen. Genauer wollen wir eine Funktion f entlang beliebiger konvergenter Folgen $(x_n)_n$ in D auswerten, also $(f(x_n))_n$ betrachten. Diese Idee liegt sehr nahe an der Folgenstetigkeit, vgl. 2.1.11, 2.1.12.

Als neuer technischer Punkt ergibt sich allerdings, dass eine Folge $(x_n)_n$ in D , die (als Folge in \mathbb{R}) konvergiert, ihren Limes nicht notwendigerweise in D haben muss (vgl. Abb.2.24), z.B.

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} \in (0, 1] \quad \text{aber} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \notin (0, 1].$$

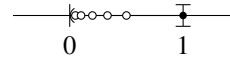


Abb. 2.24 Nullfolge

Grenzwerte von Folgen in D , die (in \mathbb{R}) konvergieren, sind aber genau die *Berührungspunkte* (vgl. 1.2.37) von D , siehe Prop. 1.3.31(i). Die grundlegende Definition ist daher:

Definition 2.1.21 (Grenzwert einer Funktion).

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und sei a ein Berührungspunkt von D . Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c, \quad \text{falls für jede Folge } (x_n)_n \text{ in } D \\ \text{mit } x_n \rightarrow a \text{ gilt, dass } f(x_n) \rightarrow c,$$

wobei hier sowohl $c \in \mathbb{R}$ als auch $c = \pm\infty$ (also uneigentliche Konvergenz) erlaubt sind.

Beobachtung 2.1.22 (Zum Grenzwert von Funktionen).

- (i) Wie in 2.1.20 wiederholt, gibt es wegen 1.3.31(i) für jeden Berührungspunkt a von D mindestens eine Folge (x_n) in D mit $x_n \rightarrow a$, i.A. wird es aber viele solcher Folgen geben.
- (ii) Wie oben gesagt, muss a nicht in D liegen. Falls dem aber so ist, dann ist die konstante Folge $x_n = a$ für alle n eine gemäß Definition 2.1.21 erlaubte Folge. Falls dann $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ überhaupt existiert, muss er schon $f(a)$ sein, denn

$$\lim f(x_n) = \lim f(a) = f(a).$$

Wir werden unten in 2.1.27 außerdem sehen, dass f genau dann stetig in $a \in D$ ist, falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ gilt.

Beispiel 2.1.23 (Limes rationaler Funktionen).

(i) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, vgl. Abb. 2.25.

Es gilt $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, denn sei $x_n \in D$, dann muss $x_n \neq 1$ für alle n gelten und daher

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

(Das ist natürlich nicht verwunderlich, da f ja gar keine „echte“ rationale Funktion ist — durch Kürzen ergibt sich ein Polynom. Nun zu einem „echten“ Beispiel.)

(ii) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$, vgl. Abb. 2.26

Hier gilt, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ nicht existiert,}$$

weil z.B. $f(\frac{1}{n}) \rightarrow \infty$, aber $f(-\frac{1}{n}) \rightarrow -\infty$ gilt.

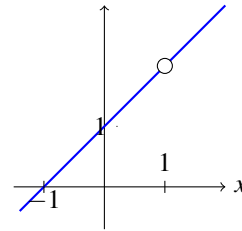


Abb. 2.25 Graph der Funktion $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$

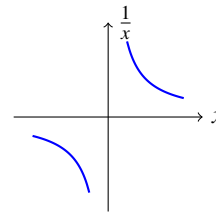


Abb. 2.26 Graph der Funktion $\frac{1}{x}$

Motivation 2.1.24.

Das letzte Beispiel drängt uns richtiggehend dazu, unseren Begriffsapparat zu erweitern. Genauer gesagt:

- (1) Wir brauchen einen Begriff, der auch „einseitiges“ Annähern erlaubt, also Folgen $x_n \rightarrow a, x_n > 0$ bzw. $x_n \rightarrow a, x_n < 0$
- (2) Wir sollten auch Grenzwerte für f längs Folgen x_n mit $x_n \rightarrow +\infty$ und $x_n \rightarrow -\infty$ zulassen.

Also formalisieren wir wie folgt:

Definition 2.1.25 (Einseitige und uneigentliche Grenzwerte von Funktionen).

Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Sei a ein Berührungspunkt von $D \cap (a, \infty)$. Wir schreiben

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = c \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c$$

Stellt sicher, dass wir von rechts gegen a „laufen“ können.

und sagen c ist der *rechtsseitige Grenzwert* von f gegen a , falls für alle Folgen (x_n) in D , mit $x_n > a$ und $x_n \rightarrow a$ gilt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$. Dabei ist wieder sowohl $c \in \mathbb{R}$ als auch $c = \pm\infty$ (also uneigentliche Konvergenz) erlaubt.

(ii) Analog dazu definieren wir den *linksseitigen Limes*

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

(iii) Falls D nach oben unbeschränkt ist und für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \rightarrow \infty$ gilt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$, dann schreiben wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c,$$

wobei wieder $c \in \mathbb{R}$ oder $c = \pm\infty$ (also uneigentliche Konvergenz) erlaubt ist.
 (iv) Analog definieren wir $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ für nach unten unbeschränkte Definitionsbereiche D .

Beispiel 2.1.26 (Nochmals Grenzwerte von Funktionen).

(i) Für die Gaußklammer $[x] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vgl. Abb.2.27, gilt:

$$\begin{aligned} 1 < x_n < 2 &\Rightarrow [x] = 1 && \lim_{x \rightarrow 1+} [x] = 1, \\ 0 < x_n < 1 &\Rightarrow [x] = 0 && \lim_{x \rightarrow 1-} [x] = 0. \end{aligned}$$

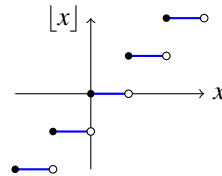


Abb. 2.27 Graph der Gaußklammer

(ii) Für $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{x}$, vgl. Abb.2.28, gilt

$$\begin{aligned} 0 > x_n \rightarrow 0 &\xrightarrow{1.2.47(ii)} f(x_n) = \frac{1}{x_n} \rightarrow -\infty && \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty, \\ \text{ditto 1.2.47(ii)} &&& \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

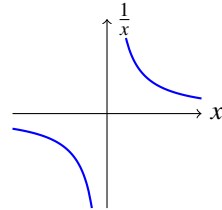


Abb. 2.28 Graph von $\frac{1}{x}$

$$\forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |x_n| > K \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{K}$$

(iii) Sei $m \geq 1$ und $p(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$ ein Polynom. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{p(x)} = 0$$

Tatsächlich gilt:

$$p(x) = x^m \left(1 + \frac{a_{m-1}}{x} + \frac{a_{m-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^m} \right) \geq x^m \left(1 - \frac{|a_{m-1}|}{|x|} - \dots - \frac{|a_0|}{|x|^m} \right)$$

Sei $x \geq M := 2m \cdot \max\{1, |a_{m-1}|, \dots, |a_0|\}$, dann gilt

$$p(x) \geq x^m \left(1 - m \cdot \frac{1}{2m} \right) = \frac{x^m}{2}. \tag{2.6}$$

Sei nun (x_n) eine Folge in \mathbb{R} mit $x_n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n \geq M \forall n \geq N$ und somit

$$p(x_n) \geq \frac{x_n^m}{2} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

also tatsächlich $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$.

Um die zweite Behauptung zu zeigen, bemerke, dass (2.6) impliziert, dass $p(x) \geq \frac{1}{2} \forall x \geq M$, daher ist $\frac{1}{p(x)}$ für alle $x \geq M$ definiert und das Resultat folgt aus 1.2.47(i).

Proposition 2.1.27 (Grenzwert und Stetigkeit).

Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Dann gilt:

$$f \text{ ist stetig in } a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Beweis. (Wir setzen ganz einfach Definition 2.1.21 mit Theorem 2.1.12 zusammen.)
Da f stetig in a ist, folgt mit Thm. 2.1.12

$$\forall (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \rightarrow a \text{ gilt } f(x_n) \rightarrow f(a),$$

was wiederum nach Def. 2.1.21 bedeutet, dass $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. \square

Bemerkung 2.1.28 (Nochmals $\frac{1}{x}$ – Zur Ehrenrettung von 2.1.15(iv)).

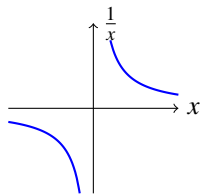


Abb. 2.29 Graph von $\frac{1}{x}$

Wir betrachten nochmals $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, vgl. Abb. 2.29. In 2.1.15(iv) haben wir bemerkt, dass es unsinnig ist, nach der Stetigkeit von f in $x_0 = 0 \notin D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zu fragen. Tatsächlich hat es aber etwas mit dem „unstetigen Aussehen“ von $\frac{1}{x}$ bei $x_0 = 0$ auf sich, und zwar:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ kann nicht stetig von } \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ auf ganz } \mathbb{R} \text{ fortgesetzt werden.}$$

Genauer bedeutet das, dass es keine Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die die beiden Eigenschaften

- $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \neq 0$ (man sagt: \tilde{f} setzt f auf ganz \mathbb{R} fort) und
- \tilde{f} ist stetig auf ganz \mathbb{R} erfüllt.

Denn angenommen, es gäbe so ein \tilde{f} , so müsste wegen 2.1.27 $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}(x)$ existieren (und gleich $\tilde{f}(0)$ sein). Dieser Limes existiert aber *nicht*, da (vgl. 2.1.26(ii)) es Nullfolgen $(x_n), (y_n)$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(x_n) \stackrel{x_n \neq 0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty, \text{ aber}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(y_n) \stackrel{y_n \neq 0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = -\infty.$$

2.2 Sätze über stetige Funktionen

Nach der Diskussion des Stetigkeitsbegriffs und den eher praktischen Ausführungen zum Schluss des vorigen Abschnitts 2.1 lernen wir nun die *wesentlichen theoretischen Aussagen* über stetige Funktionen kennen

- den Zwischenwertsatz,
- den Satz vom Minimum und Maximum und
- den Umkehrsatz für stetige, streng monotone Funktionen.

Während die ersten beiden Resultate uns Aufschluss darüber geben, wie stetige Funktionen aussehen („schön“) ist das dritte ein wichtiges Werkzeug, das wir später z.B. zur Definition der Logarithmusfunktion verwenden werden. Schließlich lernen wir auch eine Verschärfung des Stetigkeitsbegriffs kennen, die *gleichmäßige Stetigkeit*, also eine Bedingung, die Funktionen noch „schöner“ macht.

Bei den Hauptresultaten dieses Abschnitts spielen abgeschlossene, beschränkte Intervalle als Definitionsbereich von stetigen Funktionen oft die entscheidende Rolle. Wir befassen uns zu Beginn mit ihnen.

Motivation 2.2.1 (Die Sonderrolle abgeschlossener, beschränkter Intervalle).

Bisher haben wir stetige Funktionen auf beliebigen Teilmengen $D \subseteq \mathbb{R}$ betrachtet. Im Folgenden wird sich zeigen, dass den abgeschlossenen und beschränkten Intervallen $[a, b]$ eine Sonderrolle zukommt. Solche Intervalle heißen auch *kompakt*.

Ein einfacher aber wesentlicher Unterschied wird offensichtlich, wenn wir stetige Funktionen, die auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ definiert sind mit solchen vergleichen, die (nur) auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ definiert sind: Etwa nimmt $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0, 1)$ beliebig große positive Werte an, vgl. 2.1.2(ii). Für eine stetige Funktion auf $[0, 1]$ ist ein solches Verhalten nicht möglich, siehe Abbildung 2.30 und wir werden zeigen, dass tatsächlich jede stetige Funktion auf $[0, 1]$ nur beschränkte Werte annehmen kann und insbesondere ihr Maximum und Minimum annimmt.

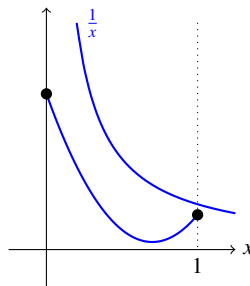


Abb. 2.30 Während $1/x$ auf $(0, 1)$ unbeschränkt ist, sind stetige Funktionen auf $[0, 1]$ beschränkt.

Wir beginnen unsere theoretischen Untersuchungen mit einer Aussage, die anschaulich klar scheint, die aber — wieder einmal — essentiell die *Vollständigkeit* von \mathbb{R} verwendet!

Motivation 2.2.2 (Der Nullstellensatz).

Wir betrachten eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die am linken Randpunkt des abgeschlossenen Definitionsbereichs negativ, am rechten Randpunkt aber positiv ist, d.h. für die $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gilt. Es scheint klar zu sein, dass f eine Nullstelle haben muss: Aufgrund der Stetigkeit kann f nicht einfach den Wert 0 „überspringen“, siehe Abbildung 2.31.

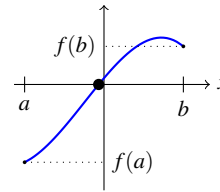


Abb. 2.31 Nullstelle einer stetigen Funktion

Tatsächlich ist das auf \mathbb{R} richtig — wie wir gleich sehen werden — aber etwa auf \mathbb{Q} falsch! Das liegt natürlich daran, dass die Nullstelle gerade in einem irrationalen Punkt (also einem „Loch“ von \mathbb{Q}) auftreten kann. Ein explizites Beispiel dafür ist etwa, siehe auch Abbildung 2.32

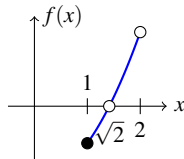


Abb. 2.32 Stetige Fkt. ohne Nullst. in \mathbb{Q} !

$$f : D = \{q \in \mathbb{Q} : 1 \leq q \leq 2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 2.$$

Es gilt nämlich, dass f als Polynom stetig ist⁵ $f(1) = -1$, $f(2) = 2$ aber es gibt kein $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = 0$: Ein solches x_0 müsste nämlich die Gleichung

$$f(x_0) = x_0^2 - 2 = 0 \quad \text{also} \quad x_0^2 = 2$$

erfüllen, was in \mathbb{Q} aber nicht möglich ist (vgl. 0.1.10)!

Ein Hauptresultat der Vorlesung

Theorem 2.2.3 (Nullstellensatz).

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann $\exists x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = 0$.

Eine analoge Version gilt natürlich auch für $f(a) > 0 > f(b)$.

d.h. f hat eine Nullstelle in x_0

Vor dem Beweis geben wir eine wichtige Anwendung dieses Resultats.

Korollar 2.2.4 (Nullstellen von Polynomen mit ungeradem Grad).

Jedes Polynom von ungeradem Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Beweis. Sei $p(x) = b_{2n+1}x^{2n+1} + \dots + b_0$ mit $b_{2n+1} \neq 0$. Nun können wir p umschreiben als

$$p(x) = b_{2n+1} \left(x^{2n+1} + x^{2n} \frac{b_{2n}}{b_{2n+1}} + \dots + \frac{b_0}{b_{2n+1}} \right) =: b_{2n+1} q(x).$$

⁵ Polynome sind nach 2.1.18 stetig auf \mathbb{R} und daher erst recht auf der Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Also gilt für q

$$q(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x + a_0 \quad \text{mit } (a_j = \frac{b_j}{b_{2n+1}}, j = 0, \dots, 2n)$$

und damit ist q von der Form wie p in 2.1.26(iii). Daher gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = \infty \quad \text{und damit gibt es ein } x_+ > 0 \text{ mit } q(x_+) > 0.$$

Andererseits gilt

$$q(-x) = -x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} - \dots = -(x^{2n+1} - a_{2n}x^{2n} + \dots - a_0)$$

und damit gilt wiederum wegen 2.1.26(iii)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = -\infty \quad \text{und damit gibt es ein } x_- < 0 \text{ mit } q(x_-) < 0.$$

Betrachten wir nun die Einschränkung⁶ $q|_{[x_-, x_+]}$ von q auf das Intervall $[x_-, x_+]$, so können wir den Nullstellensatz 2.2.3 anwenden und erhalten

$$\exists x_0 \in [x_-, x_+] \text{ mit } q(x_0) = 0$$

und damit auch $p(x_0) = 0$. \square

Beweis des Nullstellensatzes 2.2.3. Wir benutzen das Intervallschachtelungsprinzip 1.3.36, um mittels Intervallhalbierung eine Nullstelle x_0 zu „fangen“, siehe Abbildung 2.33.

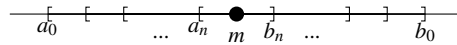


Abb. 2.33 Grundkonstruktion des Beweises.

Sei also $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < 0 < f(b)$.

(1) Wir konstruieren induktiv eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $[a_n, b_n]$ ($n \in \mathbb{N}$) mit den Eigenschaften

(a) $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}] \quad \forall n \geq 1$ \longleftarrow Schachtelung der Intervalle

(b) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$ \longleftarrow Durchmesser in jedem Schritt halbiert

(c) $f(a_n) < 0 \leq f(b_n) \quad (n \in \mathbb{N})$ \longleftarrow „Fangen“ der Nullstelle

Induktionsanfang: $n = 0$: Setze $a_0 = a, b_0 = b$, dann sind (a)–(c) offensichtlich erfüllt.

⁶ Salopp kann man sagen: Die Einschränkung „vergisst“ einfach alles außerhalb von $[x_-, x_+]$, vgl. [7, 4.3.23].

Induktionsschritt: $n \mapsto n+1$: Angenommen, wir haben $[a_0, b_0], \dots, [a_n, b_n]$ bereits konstruiert, sodass (a)–(c) gelten. Wir müssen a_{n+1}, b_{n+1} finden, sodass (a)–(c) auch für $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ gelten.

Dazu setzen wir

$$m = \frac{b_n + a_n}{2} \quad \leftarrow \text{Mittelpunkt von } [a_n, b_n]$$

und machen eine Fallunterscheidung, vgl. Abbildung 2.33.

• Ist $f(m) \geq 0$, dann setze $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = m$. \leftarrow Nst. links von m

• Ist $f(m) < 0$, dann setze $a_{n+1} = m$, $b_{n+1} = b_n$. \leftarrow Nst. rechts von m

Offensichtlich gelten damit (a)–(c) für $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

(2) Das Intervallschachtelungsprinzip 1.3.36 impliziert

$$\exists! x_0 \in \bigcap_{n \geq 0} [a_n, b_n]$$

und lt. Konstruktion ist $x_0 \in [a, b]$ und $\lim a_n = x_0 = \lim b_n$.

(3) Weil f stetig auf $[a, b]$ ist, gilt mit 2.1.12

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n).$$

(4) Aus der Eigenschaft (c) in (1) folgt mit 1.2.27

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \stackrel{1.2.27}{\leq} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x_0).$$

Damit müssen die \leq -s in obiger Gleichung alle $=$ -s sein, also gilt $f(x_0) = 0$ und wir haben eine Nullstelle gefunden. \square

Nun bringen wir den Nullstellensatz noch in eine etwas allgemeinere Form und beweisen den sogenannten *Zwischenwertsatz*, der besagt, dass eine stetige Funktion f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ alle Werte zwischen den „Randwerten“ $f(a)$ und $f(b)$ annimmt.

Korollar 2.2.5 (Zwischenwertsatz).

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und liegt $c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$, d.h. $f(a) \leq c \leq f(b)$ oder $f(a) \geq c \geq f(b)$, dann

$$\exists x_0 \in [a, b] \text{ mit } f(x_0) = c. \quad \leftarrow \text{Jeder Wert zwischen } f(a) \text{ und } f(b) \text{ wird angenommen}$$

Beweis. (Reine Buchhaltung, denn alles Wesentliche ist schon in 2.2.3 passiert.)

Wir wenden 2.2.3 auf $g(x) := f(x) - c$ an. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $f(a) < c < f(b)$ gilt. Tatsächlich, falls $c = f(a)$ oder $c = f(b)$ gilt, ist nichts zu zeigen und falls $f(a) > c > f(b)$ gilt, verläuft der Beweis völlig analog.

Sei also $g(x) = f(x) - c$, dann ist $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$$g(a) = f(a) - c < 0 < f(b) - c = g(b).$$

Mit Theorem 2.2.3 folgt nun

$$\exists x_0 \in [a, b] : g(x_0) = 0$$

und daher $f(x_0) = g(x_0) + c = c$. \square

Eine weitere wichtige Konsequenz aus dem Zwischenwert- bzw. Nullstellensatz ist, dass stetige Funktionen Intervalle auf Intervalle abbilden, d.h. insbesondere, dass stetige Bilder von Intervallen keine „Löcher“ haben bzw. nicht „zerreissen“. Offiziell:

Korollar 2.2.6 (Stetige Bilder von Intervallen).

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein möglicherweise unbeschränktes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ wieder ein Intervall oder enthält nur einen Punkt.

Beweis. (Wiederum hauptsächlich Anwenden des Zwischenwertsatzes, diesmal mit etwas mehr Buchhaltung.)

- (1) Wir setzen $A = \inf(f(I))$ und $B = \sup(f(I))$, bzw. $A = -\infty$, falls $f(I)$ nicht nach unten beschränkt ist und $B = \infty$, falls $f(I)$ nicht nach oben beschränkt ist.

Falls $A = B$ (was überhaupt nur im Fall A, B endlich möglich ist), enthält $f(I)$ nur einen Punkt und wir sind fertig. Sei ab jetzt also $A < B$.

- (2) Wir zeigen

$$(A, B) \subseteq f(I).$$

Sei $y \in (A, B)$, dann $\exists r, s \in I$ mit $f(r) < y < f(s)$ (da A, B entweder \inf, \sup oder $\pm\infty$) und wir können o.B.d.A. annehmen, dass $r < s$ gilt. (Der Fall $r = s$ ist unmöglich und $r > s$ ist analog zu behandeln.) Wegen dem Zwischenwertsatz 2.2.5 gilt nun

$$\exists x_0 \in [r, s] \subseteq I \text{ mit } f(x_0) = y$$

und damit ist $y \in f(I)$ und da y beliebig war gilt $(A, B) \subseteq f(I)$.

- (3) Zusammengefasst gilt also

$$(A, B) \subseteq f(I) \subseteq [A, B] \text{ bzw. } (-\infty, B] \text{ oder } [A, \infty).$$

Daher ist $f(I)$ eines der Intervalle (A, B) , $[A, B)$, $(A, B]$ oder $[A, B]$, bzw. $(-\infty, B)$, $(-\infty, B]$ oder (A, ∞) , $[A, \infty)$, jedenfalls ein Intervall. \square

Motivation 2.2.7 (Das Lösen von Gleichungen, „Existenzmaschinen“ & Fixpunktsätze).

- (i) Eine der Hauptaufgaben der Mathematik ist es natürlich Gleichungen aller Art zu lösen. Zum Beispiel ist es eine der Hauptaufgaben der Linearen Algebra, lineare Gleichungssysteme zu lösen bzw. Sätze über ihre Lösbarkeit bereitzustellen.

Auch die Analysis trägt wesentlich zum Lösen von (nicht-linearen) Gleichungen bei, indem sie die Existenz von Lösungen garantiert—vor allem in Situationen, wo man diese Gleichungen nicht explizit, etwa durch eine Rechnung, lösen kann. Wir haben in Abschnitt 1.3 schon angedeutet, dass die Vollständigkeit von \mathbb{R} eine „Existenzmaschine“ bereitstellt, z.B. in Form des Cauchy-Prinzips oder des Satzes von Bolzano-Weierstraß. Beide garantieren unter bestimmten Voraussetzungen, dass ein bestimmtes Objekt, nämlich eine Zahl mit bestimmten Eigenschaften *existiert*—und zwar als Limes einer Folge, den man i.A. aber nicht explizit ausrechnen kann.

Natürlich ist auch der Zwischenwertsatz von dieser Bauart und daher ebenfalls eine „Existenzmaschine“: Er garantiert die *Existenz* eines Arguments x_0 mit $f(x_0) = c$ für jedes c zwischen den Funktionswerten am Rand $f(a)$ und $f(b)$ —ohne freilich zu sagen, *wo* genau dieses $x_0 \in [a, b]$ liegt. Wir werden diese „Maschine“ jetzt so umgestalten, dass sie in besonders anschaulicher Weise formuliert und dazu verwendet werden kann, Gleichungen zu lösen—in dem Sinn, dass sie die Existenz von Lösungen sicherstellt. Diese besonders anschauliche Form ist die eines sogenannten *Fixpunktsatzes*.

(ii) Betrachten wir als Beispiel die Gleichung

$$g(x) = a, \tag{2.7}$$

wo etwa g ein Ausdruck in der gesuchten Variablen x , also eine Funktion ist und a eine vorgegebene Zahl. Diese Gleichung lässt sich nun gewinnbringend in ein sogenanntes *Fixpunktproblem* verwandeln. Setzen wir dazu $f(x) = g(x) - a + x$, dann löst nämlich ein Fixpunkt x_0 von f , d.h. ein Punkt mit

$$f(x_0) = x_0$$

unser Problem. Tatsächlich gilt für so einen Fixpunkt x_0 von f

$$x_0 = f(x_0) = g(x_0) - a + x_0 \implies g(x_0) = a,$$

und wir haben eine Lösung x_0 für die ursprüngliche Gleichung (2.7) gefunden.

(iii) Daraus ergibt sich also, dass Sätze, die die Existenz von Fixpunkten garantieren, sogenannte *Fixpunktsätze*, nützliche Werkzeuge zum Lösen von Gleichungen sind. Wir diskutieren jetzt einen einfachen Fixpunktsatz für stetige Funktionen, der sich direkt aus dem Zwischenwertsatz ergibt.

Korollar 2.2.8 (Fixpunktsatz).

Sei $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ eine stetige Funktion. Dann besitzt f einen Fixpunkt.

Explizit heißt das

$$\exists x_0 \in [a, b] \quad \text{mit} \quad f(x_0) = x_0.$$

Bemerkung 2.2.9 (Zum Fixpunktsatz).

- (i) Die Aussage von 2.2.8 kann besonders eindringlich am Quadrat $[a, b] \times [a, b]$ in \mathbb{R}^2 veranschaulicht werden, siehe Abbildung 2.34. Der Graph von f beginnt bei $x = a$, also an der linken Kante des Quadrats, und endet bei $x = b$ an der rechten Kante, daher *muss* er die Diagonale schneiden und dort gilt dann $f(x_0) = x_0$.

Dieses einfache Bild zeigt auch, warum wir in 2.2.7 Fixpunktsätze als besonders anschaulich bezeichnet haben!

- (ii) Die Tatsache, dass 2.2.8 im Wesentlichen eine Umschreibung von 2.2.3 ist, sieht man auch daran, dass das Kippen der Skizze 2.34 in (i) um 45° die Skizze 2.31 in 2.2.2 liefert.

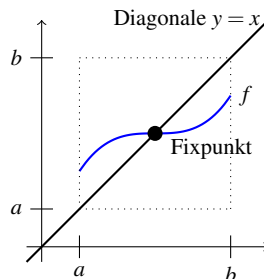


Abb. 2.34 f hat einen Fixpunkt in $[a, b]$.

Beweis (Fixpunktsatz). (Wir wenden einfach 2.2.3 auf die Funktion $g(x) = f(x) - x$ an.)

Wir definieren $g(x) := f(x) - x$, dann ist g stetig auf $[a, b]$ und es gilt

$$\left. \begin{array}{l} g(a) = f(a) - a \geq 0, \text{ und falls „} = 0\text{“} \Rightarrow f(a) = a \\ g(b) = f(b) - b \leq 0, \text{ und falls „} = 0\text{“} \Rightarrow f(b) = b \end{array} \right\} \text{ und wir sind fertig.}$$

Sei also $g(a) > 0$ und $g(b) < 0$, dann folgt aus dem Nullstellensatz 2.2.3

$$\exists x_0 \in [a, b] \text{ mit } g(x_0) = 0$$

und daher $0 = g(x_0) = f(x_0) - x_0$, also $f(x_0) = x_0$. \square

Motivation 2.2.10 (Annahme von Minimum und Maximum).

Der Zwischenwertsatz lehrt uns, dass eine stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt, also der Graph von f keine Lücken lässt.

Jetzt werden wir sehen, dass der Graph auch *nicht* beliebig große oder kleine Werte beinhalten kann und außerdem $f([a, b])$ ein Maximum und ein Minimum hat, wie in Abbildung 2.35 veranschaulicht.

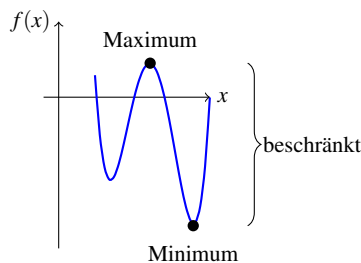


Abb. 2.35 Eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall nimmt Min. und Max. an.

Wir benötigen zur exakten Formulierung etwas Terminologie.

Definition 2.2.11 (Beschränkte Funktion).

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls ihr Bild $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, d.h. falls

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in D : |f(x)| \leq M. \quad (2.8)$$

Theorem 2.2.12 (Satz vom Minimum und Maximum).

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt Min. und Max. an.

Genauer gilt

$$\exists y \in [a, b] : f(y) = \min_{x \in [a, b]} f(x) = \min^7 f[a, b],$$

$$\exists z \in [a, b] : f(z) = \max_{x \in [a, b]} f(x) = \max f[a, b].$$

natürlich auch
 $f(y) = \inf f[a, b]$

natürlich auch
 $f(z) = \sup f[a, b]$

Warnung 2.2.13 (Das Intervall muss beschränkt und abgeschlossen sein).

- (i) Für den Satz vom Minimum und Maximum 2.2.12 ist es essentiell, dass das Intervall auf dem f stetig ist,

abgeschlossen und beschränkt ist.

Sonst muss f nämlich *nicht beschränkt* sein, denn für

- $f_1 : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ ist das Intervall nicht abgeschlossen und f nicht (nach oben) beschränkt und für
- $f_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ ist das Intervall unbeschränkt und f nicht (nach oben) beschränkt.

Ebenfalls muss f dann weder *Minimum noch Maximum annehmen*, denn

- $f_3 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ ist zwar beschränkt, hat aber weder Maximum noch Minimum.

- (ii) Die Punkte y, z in 2.2.12 sind i.A. nicht eindeutig, z.B. wenn f konstant ist.

Beweis von Theorem 2.2.12. Wir beweisen nur, dass f nach oben beschränkt ist und dass das Maximum angenommen wird. Dazu „basteln“ wir jeweils geschickt eine Folge und verwenden die Vollständigkeit von \mathbb{R} sowie die Folgenstetigkeit von f . Der Beweis für „nach unten beschränkt“ und Minimum ist analog und kann durch Übergang von f zu $-f$ gezeigt werden.

- (1) Wir zeigen zunächst, dass $f[a, b]$ nach oben beschränkt ist.

Wäre dem nämlich nicht so, dann ergibt die Verneinung von (2.8)

⁷ Hier ist das Minimum des Bilds von $[a, b]$ unter der Funktion f als Menge gemeint. Die volle Schreibweise wäre daher $\min(f([a, b]))$, sie wird aber meistens wie oben abgekürzt.

$$\forall C > 0 \exists x \in [a, b] : f(x) > C. \quad (2.9)$$

Nun wählen wir in (2.9) sukzessive $C = n$ für $n \in \mathbb{N}$ und erhalten so eine Folge⁸

$$(x_n)_n \in [a, b] \quad \text{mit } f(x_n) > n, \text{ also } f(x_n) \rightarrow \infty.$$

Andererseits ist $x_n \in [a, b]$, also beschränkt und daher hat (x_n) laut Bolzano-Weierstraß 1.3.11 eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Sei also $z' := \lim_k x_{n_k}$, dann gilt

$$a \leq a_{n_k} \leq b \text{ und mit 1.2.27 } a \leq z' \leq b, \text{ also } z' \in [a, b].$$

Weil f stetig auf $[a, b]$ ist, gilt weiters mit 2.1.12

$$f(z') = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty,$$

was der Definition von f als Funktion von $[a, b]$ nach \mathbb{R} widerspricht. Also ist f nach oben beschränkt.

(2) Wir zeigen, dass das f sein Maximum annimmt.

Da $f[a, b]$ nach oben beschränkt ist existiert wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R} $A := \sup f[a, b]$. Mittels der Definition des Supremums konstruieren wir eine Folge (a_n) wie folgt⁹: $A - 1/n$ ist für jedes $n \geq 1$ nicht obere Schranke für $f[a, b]$ und daher

$$\exists a_n \in [a, b] : f(a_n) > A - \frac{1}{n}.$$

Also gilt

$$A - \frac{1}{n} < f(a_n) \leq A, \text{ daher mit dem Sandwich-Lemma 1.2.28 } f(a_n) \rightarrow A.$$

Nun führen wir die Schritte aus (1) für $(a_n)_n$ statt $(x_n)_n$ durch. Nach Bolzano-Weierstraß existiert $z := \lim_k a_{n_k}$ für eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ mit $z \in [a, b]$. Und wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f(z) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_{n_k}) = A = \sup f[a, b],$$

also ist $f(z) = A = \max f[a, b]$. \square

Motivierendes Beispiel 2.2.14 (Die Abhängigkeit δ 's von x_0).

- (i) Wir haben bereits diskutiert, dass $f(x) = 1/x$ auf $D = (0, 1]$ unbeschränkt ist, vgl. 2.2.1. Tatsächlich hängt diese missliche Eigenschaft von f damit zusammen, dass die Stetigkeit von f in x_0 im folgenden Sinne immer „schwieriger zu erreichen“ ist, falls x_0 näher an 0 rückt: Für eine vorgegebene Toleranz ε um $f(x_0)$ müssen immer kleinere Sicherheitsintervalle $U_\delta(x_0)$ gewählt werden um die Stetigkeitsabschätzung hinzubekommen vgl. Abb. 2.36.

⁸ Das Konstruieren einer solchen „Ausnahmenfolge“ ist ein Standardtrick, den wir in sehr ähnlicher Weise schon im Beweis von Theorem 2.1.12, „ \Leftarrow “ verwendet haben.

⁹ Eine weitere Variante desselben Standardtricks.

- (ii) Bevor wir dieses Phänomen genauer diskutieren erinnern wir uns, dass die Stetigkeit einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf ganz D nach 2.1

$$\forall x_0 \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

lautet. Das bedeutet, dass δ hier nicht nur (und klarerweise nach 2.1.7(iii)) von ε abhängt, sondern *auch von* x_0 .

- (iii) Diese Abhängigkeit wollen wir, wie oben angedeutet im Beispiel $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0, 1)$ genauer untersuchen. Dazu fixieren wir $\varepsilon > 0$. Wie oben festgestellt ist anschaulich klar, dass für ein x_0 näher bei 0 das entsprechende Sicherheitsintervall $U_\delta(x_0)$ kleiner gewählt werden muss, siehe Abbildung 2.36.

Rechnerisch können wir das wie folgt explizit machen: Zunächst brauchen wir nur jeweils $x < x_0$ zu betrachten, da dort der Anstieg steiler und δ daher kleiner gewählt werden muss. Setze also $x_\delta = x_0 - \delta$ und betrachte

$$|f(x_\delta) - f(x_0)| = \frac{1}{x_\delta} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_\delta}{x_\delta x_0} = \frac{\delta}{x_0(x_0 - \delta)}$$

Soll nun $|f(x_\delta) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle x mit $|x_0 - x| < \delta$ sein, so muss gelten

$$\frac{\delta}{x_0(x_0 - \delta)} < \varepsilon \Leftrightarrow \delta < \varepsilon x_0^2 - \varepsilon x_0 \delta \Leftrightarrow \delta < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}.$$

Also $\delta < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0} < \varepsilon x_0^2$ und das bedeutet, dass bei kleinerem x_0 auch δ kleiner werden muss.

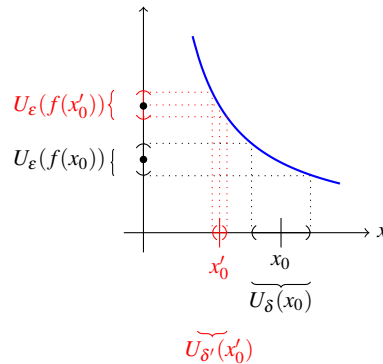


Abb. 2.36 Das Sicherheitsintervall $U_\delta(x_0)$ muss für x_0 näher bei 0 immer kleiner gewählt werden.

- (iv) Wenn wir nun für eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fordern, dass δ unabhängig vom Punkt $x_0 \in D$ sein soll, so erhalten wir eine stärkere „Stetigkeitseigenschaft“: Für je zwei Punkte $x, x' \in D$ soll, wenn sie nur δ -nahe beieinander liegen, also

wenn $|x - x'| < \delta$ gilt — und zwar *egal wo die beiden Punkte liegen* — schon die Abschätzung $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ gelten. Offiziell:

Definition 2.2.15 (Gleichmäßige Stetigkeit).

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x, x' \in D \text{ mit } |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

gilt.

Wieder einmal Achtung auf Reihenfolge der Quantoren!

Bemerkung 2.2.16 (Stetigkeit vs. gleichmäßige Stetigkeit).

(i) Unmittelbar aus den Definitionen ergibt sich für $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \text{ gleichmäßig stetig} \implies f \text{ stetig auf } D.$$

(ii) Die Umkehrung ist falsch, wie 2.2.14 zeigt, also

$$f \text{ gleichmäßig stetig} \not\Leftarrow f \text{ stetig in } D.$$

Ganz explizit: $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Falls $x_n = \frac{1}{n}$ und $x'_n = \frac{1}{2n}$ ($n \geq 1$), dann gilt

$$|x_n - x'_n| = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}, \text{ aber}$$

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = 2n - n = n$$

der Abstand der Punkte x_n, x'_n geht gegen 0, wenn die Punkte nach links rutschen

ist unbeschränkt und daher sicher nicht unterhalb einer fixen ε -Toleranz.

(iii) Essentiell am Gegenbeispiel ist, dass $D = (0, 1]$ bei 0 ein offenes Intervall ist: Für jedes Intervall der Form $[\eta, 1]$ mit $0 < \eta < 1$ kann obiger Effekt nicht auftreten, denn $\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}$ könnten nie kleiner als η werden — nach links ausweichen ist unmöglich.

Und tatsächlich sind auf abgeschlossen und beschränkten Intervallen beide Begriffe äquivalent, wie das nächste Theorem lehrt.

Theorem 2.2.17 (Gleichmäßige Stetigkeit auf kompakten Intervallen).

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist f (dort) auch gleichmäßig stetig.

Beweis. (Wir konstruieren indirekt wieder eine „Ausnahmefolge“, verwedenden den Satz v. Bolzano-Weierstraß und erzwingen einen Widerspruch zur Stetigkeit.)

(1) Indirekt angenommen, f ist nicht gleichmäßig stetig, d.h.

$$\neg \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in [a, b], |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon \right) = \\ \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 : \exists x, x' \in [a, b], |x - x'| < \delta \text{ mit } |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon. \quad (2.10)$$

(2) Wir fixieren das ε aus (2.10) und konstruieren $(x_n), (x'_n)$, indem wir sukzessive $\delta = \frac{1}{n}$ ($n \geq 1$) setzen¹⁰. So erhalten wir für jedes $n \geq 1$

$$(x_n), (x'_n) \text{ in } [a, b] \text{ mit } |x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, \text{ aber } |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon. \quad (2.11)$$

(3) Weil (x_n) beschränkt ist gibt es nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Weiters gilt wegen 1.2.27

$$\tilde{x} := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in [a, b].$$

(Genauer $x_n \in [a, b] \forall n \Rightarrow a \leq x_n \leq b \Rightarrow a \leq \tilde{x} \leq b$.)

(4) Die Teilfolge $(x'_{n_k})_k$ von (x'_n) (mit den Indices n_k wie oben) konvergiert auch gegen \tilde{x} , denn

$$|x_{n_k} - x'_{n_k}| \stackrel{(2.11)}{\leq} \frac{1}{n_k} \rightarrow 0.$$

(5) Die Stetigkeit von f in \tilde{x} liefert nun einen Widerspruch, denn

$$0 < \varepsilon \stackrel{(2.11)}{\leq} |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |f(x_{n_k}) - f(\tilde{x})| + |f(\tilde{x}) - f(x'_{n_k})| \stackrel{(4) \& 2.1.12}{\xrightarrow{}} 0 + 0 = 0. \quad \square$$

Motivation 2.2.18 (Stetige inverse Funktion).

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : A \rightarrow B$ bijektiv. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \rightarrow A$, $f(x) \mapsto x$, vgl. [7, 4.3.29]. Wir stellen uns nun die Frage:

Falls f stetig ist, ist dann auch f^{-1} stetig?

Analoge Lin.-Algebra-Situation funktioniert:
 $f : V \rightarrow W$ lin. & bij.
 $\Rightarrow f^{-1} : W \rightarrow V$ lin.

Die Antwort ist im Allgemeinen

NEIN!

Ein Gegenbeispiel ist etwa, siehe Abbildung 2.37

$$f : D := [-2, -1) \cup [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x + 1, & x \in [-2, -1) \\ x - 1, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Die Funktion f ist als lineare Funktion stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich D , der allerdings etwas ungewohnt aus der Vereinigung zweier Intervalle besteht. Die Umkehrfunktion ist aber unstetig in $x_0 = 0$, für Details siehe Übungen.

¹⁰ Wieder der Trick mit der „Ausnahmenfolge“, vgl. die Fußnoten im Beweis von 2.2.12 bzw. den Beweis von 2.1.12. „ \Leftarrow “.

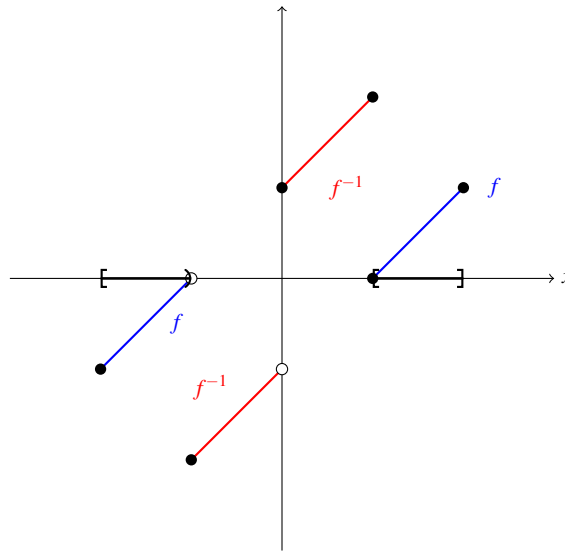


Abb. 2.37 f ist bijektiv und stetig von D nach $f(D) = [-1, 1]$, hat aber eine unstetige Inverse.

Warnung: (Sprung vs. Nicht-Sprung) Die Umkehrfunktion f^{-1} in Abbildung 2.37 hat einen Sprung, was ihre Unstetigkeit begründet. Die Funktion f selbst hat *keinen Sprung*, nur einen etwas „seltsam-zerrissenen“ Definitionsbereich!

Durch die Annahme, dass der Definitionsbereich von f ein *Intervall* ist, können wir aber ein *JA* erreichen. Aus Gründen der besseren Anwendbarkeit setzen wir die Bijektivität von f aber nicht direkt voraus, sondern „erzwingen“ sie durch die Annahme, dass f streng monoton ist, d.h.

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \text{ bzw. } f(x) > f(y) \text{ vgl. [7, 4.3.39f].}$$

Wie das im Detail funktioniert, zeigt das nächste Resultat.

Theorem 2.2.19 (Umkehrsatz f streng monotone und stetige Funktionen).

Sei I ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Dann gilt

- (i) $J := f(I)$ ist ein Intervall
- (ii) $f : I \rightarrow J$ ist bijektiv
- (iii) $f^{-1} : J \rightarrow I$ ist stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Bemerkung 2.2.20 (Notationelle Spitzfindigkeit).

Ganz streng genommen müssten wir für die Abbildung f mit eingeschränktem Zielbereich $f(I)$ eine eigene Notation verwenden, nämlich z.B.

$$\tilde{f} : I \rightarrow J := f(I), \quad x \mapsto f(x)$$

und für die Umkehrfunktion müssten wir dann \tilde{f}^{-1} schreiben. Gemäß einem allgemeinen üblichen Missbrauch der Notation schreiben wir aber wiederum f und f^{-1} [7, graue Box, p. 174].

Beweis des Umkehrsatz 2.2.19.

Wir beweisen nur den Fall „streng monoton wachsend“ und müssen im Wesentlichen nur bekannte Tatsachen zusammensetzen. Der fallende Fall ergibt sich, wenn man f durch $-f$ ersetzt.

- (i) Nach Korollar 2.2.6 ist $J = f(I)$ ein Intervall, da der „einpunktige Fall“ wegen der strengen Monotonie ausgeschlossen ist.
- (ii) f ist streng monoton wachsend und deswegen injektiv. Daher ist f als Funktion $f : I \rightarrow J$ bijektiv. Jede Fkt. ist surjektiv auf ihr Bild!

- (iii) Sei $f(x) < f(y)$ dann muss schon $x < y$ gelten, denn $x = y$ würde der Injektivität widersprechen und $x > y$ dem monotonen Wachstum. Daher ist f^{-1} streng monoton wachsend.

Es bleibt also nur zu zeigen, dass f^{-1} stetig ist in allen Punkten $b \in J$. Dazu unterscheiden wir drei Fälle

- Fall 1: b ist kein Randpunkt von J .

Dann ist auch $a := f^{-1}(b)$ kein Randpunkt von I , denn sonst wäre wegen der strengen Monotonie b ein Randpunkt von J . Also gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $a - \varepsilon, a + \varepsilon \in I$ gilt und daher wegen der strengen Monotonie

$$f(a - \varepsilon) < f(a) = b < f(a + \varepsilon).$$

Daher gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$f(a - \varepsilon) < b - \delta < b + \delta < f(a + \varepsilon),$$

was aber nichts anderes bedeutet als

$$f^{-1}(U_\delta(b)) \subseteq U_\varepsilon(f^{-1}(b)),$$

also das f^{-1} stetig in b ist, vgl. 2.1.7(i).

- Fall 2: b ist linker Randpunkt von J . Daher ist wegen der Monotonie $a = f^{-1}(b)$ linker Randpunkt von I und wir können den Beweis wie in Fall 1 führen, aber mit „einseitigen Umgebungen“ $U_\delta(b) \cap J$, $U_\varepsilon(f^{-1}(b)) \cap I$ und $f(a) = b < b + \delta < f(a + \varepsilon)$.
- Fall 3 mit b ist rechter Randpunkt von J ist völlig analog zu Fall 2. \square

Bemerkung 2.2.21 (Umkehrsatz für streng monotone Funktionen).

Im Beweis von 2.2.19 haben wir die Stetigkeit von f nur in (i) verwendet. Daher gilt die folgende Variante des Theorems:

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ streng monoton auf dem Intervall } I \text{ (aber nicht notwendigerweise stetig)} \\ \implies f^{-1} : f(I) \rightarrow I \text{ stetig und streng monoton}$$

Bemerke aber, dass falls f tatsächlich unstetig ist, $f(I)$ im Allgemeinen kein Intervall mehr ist, siehe Abbildung 2.38.

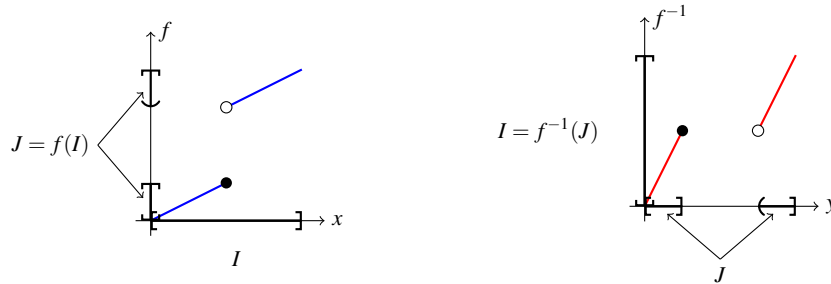


Abb. 2.38 Stetige Umkehrfunktion einer unstetigen Funktion.

Die Umkehrabbildung ist trotzdem stetig — auf dem etwas ungewohnten Definitionsbereich J der aus der Vereinigung zweier Intervalle besteht. Bemerke, dass hier dasselbe Phänomen auftritt wie im Beispiel in 2.2.18.

Beispiel 2.2.22 (Stetigkeit der Wurzel).

(i) Als Anwendung von 2.2.19 betrachten wir die Funktionen

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3,$$

die beide auf einem Intervall nämlich $[0, \infty)$ bzw. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ definiert sind, streng monoton wachsend und bijektiv, vgl. Abbildung 2.39. Daher sind wegen Theorem 2.2.19 die Umkehrfunktionen

$$f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \text{und} \quad g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

(vgl. 0.1.12(iii)) stetig und streng monoton wachsend.

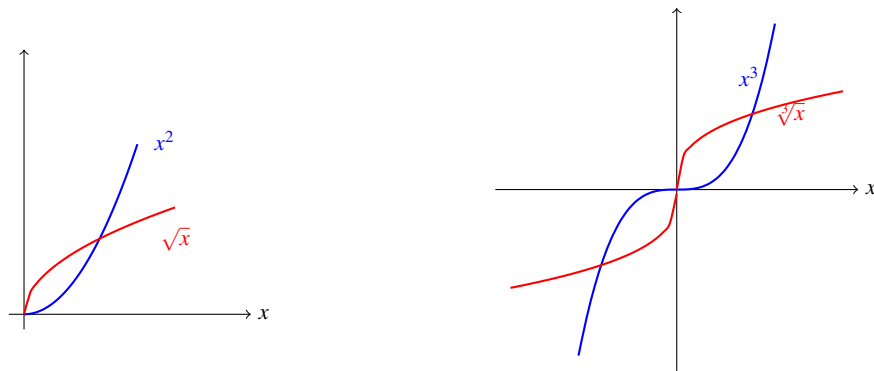


Abb. 2.39 Die Wurzelfunktionen \sqrt{x} und $\sqrt[3]{x}$ sind stetig als Umkehrfunktionen von x^2 und x^3 .

(ii) Etwas allgemeiner betrachten wir für $k \geq 1$ die Polynome

$$\begin{array}{ll} f_{2k} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) & f_{2k+1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{2k} & x \mapsto x^{2k+1} \end{array}$$

Die Funktionen sind auf denselben Intervallen ($[0, \infty)$, bzw. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$) definiert, stetig wegen 2.1.18, streng monoton wachsend und bijektiv auf $[0, \infty)$ bzw. \mathbb{R} . Daher sind wieder mit Theorem 2.2.19 die Umkehrfunktionen

$$f_{2k}^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \quad f_{2k+1}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig und streng monoton wachsend. Klarerweise sind $f_{2k}^{-1}, f_{2k+1}^{-1}$ gerade die Wurzelfunktionen $\sqrt[2k]{\cdot}$ bzw. $\sqrt[2k+1]{\cdot}$, vgl. 0.1.12(iii).

2.3 Elementare Transzendente Funktionen

In diesem Abschnitt definieren wir einige der wichtigsten Funktionen der gesamten Analysis und untersuchen ihre grundlegenden Eigenschaften. Zuerst gewinnen wir die *Logarithmusfunktion* als Umkehrung der Exponentialfunktion. Mit ihrer Hilfe können wir *allgemeine Potenzen* x^α ($x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$) definieren.

Dann machen wir einen kurzen Ausflug in die Grundlagen der Analysis in \mathbb{C} – gerade soweit, dass wir die *komplexe Exponentialfunktion*, $\exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$ analog zu \mathbb{R} über die Reihendarstellung definieren können, vgl. 1.4.38. Diese verwenden wir, um die *Winkelfunktionen Sinus und Cosinus* zu definieren. Deren Grundeigenschaften studieren wir gründlich, um die Kreiszahl π zu definieren und um schließlich die Tangensfunktion und Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen, die Arcus-Funktionen, betrachten zu können.

Proposition und Definition 2.3.1 (Logarithmus).

(i) Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist

stetig, streng monoton wachsend und es gilt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

(ii) Ihre *Umkehrfunktion* bezeichnen wir mit

Existiert wegen 2.2.19!

$$\begin{array}{l} \log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \log(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{d.h. } \exp(x) = a \\ \Leftrightarrow x = \log(a) \end{array}$$

und nennen sie den (*natürlichen*) *Logarithmus*. Sie ist stetig und streng monoton wachsend.

(iii) Die Logarithmusfunktion erfüllt die Funktionalgleichung ($x, y \in (0, \infty)$)

$$\boxed{\log(xy) = \log(x) + \log(y)}. \quad (2.12)$$

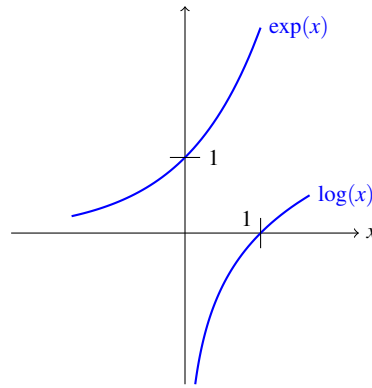


Abb. 2.40 Der (natürliche) Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Beweis. (Mittels Reihendarstellung, Funktionalgleichung und Zwischenwertsatz schaffen wir die Voraussetzungen zur Anwendung des Umkehrsatzes.)

- (i) Nach 2.1.8(iii) ist \exp stetig. Wir zeigen die *Monotonie*. Sei $\xi > 0$ dann gilt nach Def. 1.4.38

$$\exp(\xi) = 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2} + \dots > 1. \quad (2.13)$$

Sei nun $x_1 < x_2$ und setze $\xi = x_2 - x_1$, dann gilt

$$\exp(x_2) = \exp(x_1 + \xi) \stackrel{(1.44)}{=} \exp(x_1) \exp(\xi) \stackrel{(2.13)}{>} \exp(x_1)$$

und damit ist \exp *streng monoton wachsend*.

Wir zeigen $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

Wegen 1.4.41(i) ist $\exp(x) > 0$ auf \mathbb{R} und daher $\exp(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$.

Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-n) = 0 \quad (2.14)$$

gilt. Denn dann werden wegen des Zwischenwertsatzes 2.2.3 alle Werte in $(0, \infty)$ angenommen. (Genauer sei $y \in (0, \infty) \stackrel{(2.14)}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N}$ mit $\exp(-n) < y < \exp(n) \stackrel{\text{ZWS}}{\Rightarrow} \exists x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = y$.)

Die Grenzwerte in (2.14) sind aber leicht zu kriegen. Zunächst gilt für $n \in \mathbb{N}$ wegen 1.4.41(iii), dass $\exp(n) = e^n$ und daher mit 1.4.45

$$e > 2 > 1 \stackrel{1.1.5(i)}{\Rightarrow} e^n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

und schließlich

$$\exp(-n) \stackrel{1.4.41(ii)}{=} \frac{1}{\exp(n)} \stackrel{1.4.41(iii)}{=} \frac{1}{e^n} \stackrel{1.2.47(i)}{\rightarrow} 0.$$

- (ii) Wegen (i) sind die Voraussetzungen des Umkehrsatzes 2.2.19 erfüllt und daher ist $\exp^{-1} := \log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.

(iii) (Die Funktionalgleichung für \log folgt aus der für \exp , genauer:) Seien $x, y \in (0, \infty)$, dann setze $\xi := \log(x)$, $\eta := \log(y)$. Nun gilt mit 1.4.40

$$\exp(\xi + \eta) = \exp(\xi) \cdot \exp(\eta) = x \cdot y$$

eta

und damit

$$\log(xy) = \xi + \eta = \log(x) + \log(y). \quad \square$$

Bemerkung 2.3.2 (Logarithmus von Potenzen).

Als unmittelbare Konsequenz von 2.3.1(iii) ergibt sich

$$\log(x^k) = k \log(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}). \quad (2.15)$$

Motivation 2.3.3 (allgemeine Potenzen).

Bisher haben wir nur Potenzen mit rationalem Exponenten definiert, d.h. x^q für $\mathbb{R} \ni x > 0$, $q \in \mathbb{Q}$. Genauer haben wir folgende Definitionen für $n \in \mathbb{N}$, vgl. 0.1.12(iii)

$$x^n := x \cdots x, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad \text{und} \quad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

und damit für $\mathbb{Q} \ni q = \frac{m}{n}$

$$x^q := \sqrt[n]{x^m}$$

Wir werden nun die *allgemeine Potenz*, also

$$x^\alpha \quad \text{für } x > 0 \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}$$

definieren, also x^q ($q \in \mathbb{Q}$) zu x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) *verallgemeinern*. Als Leitidee werden wir dabei die Eigenschaft von x^n aus 2.3.2 benutzen, genauer

$$x^n = \exp(\log(x^n)) \stackrel{2.3.2}{=} \exp(n \log(x)).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung „funktioniert“ auch für $\alpha \in \mathbb{R}$ statt für $n \in \mathbb{N}$, soll heißen, $\exp(\alpha \log(x))$ ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$ definiert. Das verwenden wir jetzt!

Definition 2.3.4 (Allgemeine Potenz, Potenzfunktion & Exponentialfunktion).

(i) Sei $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir definieren die *allgemeine Potenz* durch

$$x^\alpha := \exp(\alpha \log(x)).$$

(ii) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die *allgemeine Potenzfunktion*

$$\omega_\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha (= \exp(\alpha \log(x))).$$

(iii) Die *Exponentialfunktion* mit Basis $a \in (0, \infty)$ definieren wir als

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp_a(x) := a^x (= \exp(x \log(a))).$$

Bemerkung 2.3.5 (Zur allgemeinen Potenz- und Exponentialfunktion).

(i) Eine unmittelbare Konsequenz aus 2.3.4(i) ist $(x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$

$$\log(x^\alpha) = \log(\exp(\alpha \log(x))) = \alpha \log(x),$$

also eine Verallgemeinerung von (2.15) von $k \in \mathbb{N}$ zu $a \in \mathbb{R}$.

Ab jetzt können wir e^x statt $\exp(x)$ schreiben!

(ii) Bemerke, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ $\exp(x) = \exp_e(x) = e^x$ gilt, denn

$$e \stackrel{1.4.38}{=} \exp(1) \stackrel{2.3.1(ii)}{\implies} \log(e) = 1 \implies e^x \stackrel{2.3.4}{=} \exp(x \log e) = \exp(x).$$

Damit „passen“ auch die Definitionen von \exp und \exp_a „zusammen“.

(iii) Als nächstes fassen wir die Grundeigenschaften der allgemeinen Exponentialfunktion in einer Proposition zusammen. Die Beweise ergeben sich jeweils leicht aus den Definitionen (bzw. siehe teilweise auch Übungen).

Proposition 2.3.6 (Die allgemeine Exponentialfunktion).

Sei $a > 0$. Die allgemeine Exponentialfunktion $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig (auf ganz \mathbb{R}) und es gelten die Eigenschaften

(i) Falls $a > 1$ ($a < 1$) gilt, dann ist \exp_a streng monoton wachsend (fallend).

(ii) Es gilt die Funktionalgleichung $a^{x+y} = a^x a^y$.

(iii) Für $m \in \mathbb{N}$ gilt $\exp_a(m) = a^m = \underbrace{a \dots a}_{m\text{-mal}}$ Konsistenz mit natürlichen Potenzen

(iv) Für $p \in \mathbb{Z}, \mathbb{N} \ni q \geq 1$ gilt $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (a^p)^{\frac{1}{q}}$. Konsistenz mit rationalen Potenzen

(v) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$.

(vi) Für alle $b > 0, x \in \mathbb{R}$ gilt $a^x b^x = (ab)^x$.

(vii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$.

Beispiel 2.3.7 (Nützliche Grenzwerte).

Hier versammeln wir eine Menge nützlicher Grenzwerte, die viel über das (Wachstums-)Verhalten der entsprechenden Funktionen aussagen und auf die wir später zurückgreifen werden¹¹.

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty.$$

exp wächst stärker als jede Potenz

Denn sei $x > 0$, dann gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \implies \frac{e^x}{x^k} > \frac{x}{(k+1)!} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty).$$

¹¹ Achtung: gefährliche Drohung!

(ii) Daraus folgt mit Prop. 1.2.47(i) sofort für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0.$$

(iii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x \searrow 0} x^k e^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

denn setze $y = \frac{1}{x}$, dann gilt $\lim_{x \searrow 0} x^k e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y^k} \stackrel{(i)}{=} \infty$.

(iv) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} \log(x) = -\infty,$$

denn wegen Prop. 2.3.1(ii) ist $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv und streng monoton wachsend.

(v) Für alle $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x \searrow 0} x^\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} x^{-\alpha} = \infty.$$

Wieder folgt wegen Prop. 1.2.47 die zweite Aussage aus der ersten. Um diese zu beweisen, schreiben wir $x = e^{-\frac{y}{\alpha}}$ (d.h. $y = -\alpha \log(x)$) und rechnen

$$\lim_{x \searrow 0} x^\alpha = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{e^y} \stackrel{1.2.47}{=} 0.$$

(vi) Für alle $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0.$$

$\log(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$), vgl. (iv) aber langsamer als jede Potenz!

Denn sei $x > 0$ und setze $x^\alpha = e^y$ (d.h. $y = \alpha \log(x)$), dann erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^y} \stackrel{(ii)}{=} 0.$$

(vii) Für $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x \searrow 0} x^\alpha \log(x) = 0.$$

x^α geht stärker gegen 0 als \log gegen $-\infty$.

Wir beobachten zuerst, dass

$$0 = \log(1) = \log\left(x \frac{1}{x}\right) = \log(x) + \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

und daher

$$\log(x) = -\log\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nun setzen wir $x = \frac{1}{y}$ und erhalten

$$\lim_{x \searrow 0} x^\alpha \log(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\log(y)}{y^\alpha} \stackrel{(vi)}{=} 0.$$

(viii) Schließlich gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Wir verwenden die Restgliedabschätzung aus Prop. 1.4.43 für $N = 1$

$$|e^x - 1 - x| = |R_2(x)| \leq 2 \frac{|x|^2}{2!} = |x|^2 \text{ für } 0 < |x| < \frac{3}{2}$$

und erhalten daher

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = \frac{|e^x - 1 - x|}{|x|} \leq |x| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0).$$

Motivation 2.3.8 (Die komplexe Exponentialfunktion – Konvergenz und Stetigkeit in \mathbb{C}).

Wir wollen nun die Exponentialfunktion nicht nur $\forall x \in \mathbb{R}$, sondern sogar $\forall z \in \mathbb{C}$ definieren. Dazu werden wir wieder die Exponentialreihe heranziehen, vgl. Bem. 1.4.37. Um deren (absolute) Konvergenz und dann die Stetigkeit von \exp besprechen zu können, müssen wir zuerst diese Begriffe in \mathbb{C} definieren.

Eine Betrachtung der respektiven Begriffe in \mathbb{R} zeigt, dass wir im Wesentlichen alles gleich lassen können und nur den Betrag bzw. die ε -Umgebungen in \mathbb{R} durch ihr Analogon in \mathbb{C} ersetzen müssen. Daher stellt der folgende Exkurs über die Grundlagen der Analysis in \mathbb{C} auch eine Wiederholung derselben in \mathbb{R} dar – wobei wir ihre Verallgemeinerungsfähigkeit schamlos ausnutzen werden!

2.3.1 Exkurs: Grundlagen der Analysis in \mathbb{C}

(E 1) Wiederholung (\mathbb{C}).

Die Menge der komplexen Zahlen ist

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

und wir verwenden die Schreibweisen, vgl. 0.1.4

$$\mathbb{C} \ni z = (x, y), \quad z = x + iy = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z).$$

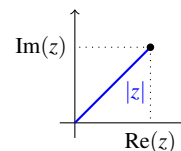


Abb. 2.41 \mathbb{C}

Die *komplex Konjugierte* \bar{z} von $z = x + iy$ ist gegeben durch

$$\bar{z} = x - iy$$

und das Produkt $z\bar{z}$ erfüllt

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

Außerdem gilt $z \pm \bar{z} = x + iy \pm (x - iy)$ und daher

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad \text{und} \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z).$$

(E 2) Definition (Betrag in \mathbb{C}).

Der (*Absolut-*)*Betrag* $|z|$ von $z \in \mathbb{C}$ ist definiert als

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$$

Nach 0.1.4(iv) identifizieren wir $x \in \mathbb{R}$ mit $x + i0 \in \mathbb{C}$ und daher ist der Betrag von x als komplexe Zahl gleich seinem Betrag als reelle Zahl,

$$|x + i0| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|.$$

(E 3) Lemma (Grundeigenschaften des Betrags).

Die Abbildung $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ hat dieselben Eigenschaften wie der Betrag in \mathbb{R} , d.h. für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

(N1) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \iff z = 0$ (positiv definit),

(N2) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ (multiplikativ),

(N3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Δ -Ungl.).

Weiters gilt:

(i) $|\bar{z}| = |z|$,

$$(ii) |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \text{ und } |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

Beweis. (Wie im reellen Fall folgen alle Eigenschaften mehr oder weniger leicht aus den Definitionen.) Sei $z = x + iy$ und $z_j = x_j + iy_j$ ($j = 1, 2$).

(N1) $|z| \geq 0$ und $|0| = 0$ sind klar. Falls $|z| = 0$, dann gilt

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 = 0 \text{ und } 0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2 = 0,$$

also $x = 0 = y$.

$$(N2) |z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

(i) Klar aus der Definition.

$$(ii) |\operatorname{Re}(z)|^2 = |x|^2 = x^2 \leq x^2 + y^2 = |z|^2 \text{ und ebenso für } \operatorname{Im}(z).$$

$$(N3) |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) + |z_2|^2 \stackrel{(ii)}{\leq} |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2. \quad \square$$

(E 4) Definition (Konvergenz von Folgen in \mathbb{C}).

(i) Eine komplexe Folge bzw. eine *Folge in \mathbb{C}* ist eine Abbildung $c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Analog zum reellen Fall schreiben wir $c_n = c(n)$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für die Folge.

(ii) Eine komplexe Folge (c_n) *konvergiert* gegen $c \in \mathbb{C}$, $c_n \rightarrow c$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : |c_n - c| < \varepsilon,$$

bzw. äquivalent dazu mit der ε -Umgebung von $c \in \mathbb{C}$ (siehe Abbildung 2.42) definiert als

$$U_\varepsilon(c) := \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < \varepsilon\},$$

falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : c_n \in U_\varepsilon(c).$$

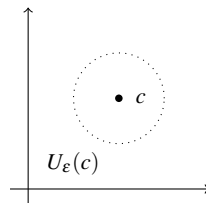


Abb. 2.42 ε -Umgebung in \mathbb{C} .

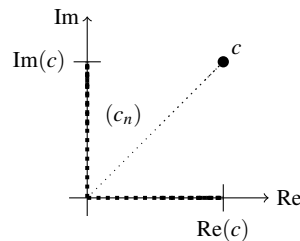


Abb. 2.43 Konvergenz in \mathbb{C} ist Konvergenz von Real- und Imaginärteil.

(E 5) Proposition (Konvergenz in \mathbb{C} ist Konvergenz von Re und Im).

Sei (c_n) eine Folge in \mathbb{C} , dann gilt

2.3 Elementare Transzendente Funktionen

Nichts Neues — nur doppelt so viel Arbeit!

$$c_n \rightarrow c \text{ in } \mathbb{C} \iff \operatorname{Re}(c_n) \rightarrow \operatorname{Re}(c) \text{ und } \operatorname{Im}(c_n) \rightarrow \operatorname{Im}(c) \text{ in } \mathbb{R}.$$

Beweis. (Reine Buchhaltung.)

Wir setzen $a_n = \operatorname{Re}(c_n)$, $b_n = \operatorname{Im}(c_n)$ und $a = \operatorname{Re}(c)$, $b = \operatorname{Im}(c)$.

\Rightarrow : Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt mit (E 4) (ii) $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |c_n - c| < \varepsilon$ und daher $\forall n \geq N$

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |\operatorname{Re}(c_n - c)| \stackrel{\text{(E 3)(ii)}}{\leq} |c_n - c| < \varepsilon \\ |b_n - b| &= |\operatorname{Im}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon, \end{aligned}$$

also $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$.

\Leftarrow : Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ und daher $\forall n \geq N$

$$\begin{aligned} |c_n - c| &= |(a_n + ib_n) - (a + ib)| = |(a_n - a) + i(b_n - b)| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ugl}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

(E 6) Korollar (Limes und Komplexkonjugation).

Sei (c_n) eine Folge in \mathbb{C} , dann folgt aus $c_n \rightarrow c$, dass $\overline{c_n} \rightarrow \overline{c}$.

Beweis. (Detto.) Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n} &= \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{Re}(c_n) + i \operatorname{Im}(c_n))} \stackrel{\text{(E 5)}}{=} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(c_n) + i \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(c_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(c_n) - i \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(\overline{c_n}) \stackrel{\text{(E 5)}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{Re}(c_n) - i \operatorname{Im}(c_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{c_n}. \quad \square \end{aligned}$$

(E 7) Korollar (Grenzwertsätze).

Seien $(c_n), (d_n)$ konvergente komplexe Folgen und sei $\lambda \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n + d_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} c_n + \lim_{n \rightarrow \infty} d_n & \text{(iii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n d_n) &= (\lim_{n \rightarrow \infty} c_n) (\lim_{n \rightarrow \infty} d_n) \\ \text{(ii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda c_n) &= \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} c_n & \text{(iv)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{d_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} d_n}, \text{ falls } d_n \not\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Beweis. Wieder reine Buchhaltung: Aufspalten in Real- und Imaginärteil und Verwenden der reelle Grenzwertsätze 1.2.22 und 1.2.25. \square

(E 8) Theorem (Vollständigkeit von \mathbb{C}).

Sei (c_n) eine Folge in \mathbb{C} , dann gilt

$$\begin{aligned} (c_n) \text{ konvergiert} &\iff (c_n) \text{ ist Cauchy-Folge, d.h.} \\ &\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N : |c_n - c_m| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Beweis. (Schon wieder nur Buchhaltung.) Es gilt

$$\begin{aligned} (c_n) \text{ konv.} &\stackrel{\text{(E5)}}{\Leftrightarrow} (\operatorname{Re}(c_n)) \text{ und } (\operatorname{Im}(c_n)) \text{ konvergiert in } \mathbb{R} \\ &\stackrel{\text{Vollst. f\u00fcr } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} (\operatorname{Re}(c_n)) \text{ und } (\operatorname{Im}(c_n)) \text{ Cauchy-Folgen in } \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow (c_n) \text{ ist Cauchy-Folge in } \mathbb{C} \quad \square \end{aligned}$$

wie im Beweis von **(E 5)** : „ \Rightarrow “ mit $\frac{\varepsilon}{2}$, „ \Leftarrow “ mit **(E 3)** (ii)

(E 9) Definition (Konvergenz komplexer Reihen).

Sei (c_n) eine Folge in \mathbb{C} . Die *komplexe Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ hei\u00dft

(i) *konvergent*, falls die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^n c_k$ in \mathbb{C} konvergiert.

(ii) *absolut konvergent*, falls die reelle(!) Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$ in \mathbb{R} konvergiert.

(E 10) Proposition (Konvergenztests und Cauchy-Produkt f\u00fcr komplexe Reihen).

(i) *Majorantenkriterium:* Sei (a_n) eine Folge mit $a_n > 0$ f\u00fcr alle n ¹² und sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent. Ist (c_n) eine komplexe Folge und

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : |c_n| \leq a_n,$$

dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent.

(ii) Der *Wurzeltest* und der *Quotiententest* gelten wortw\u00f6rtlich wie f\u00fcr reelle Reihen. Insbesondere sei (c_n) komplexe Folge mit $c_n \neq 0$ f\u00fcr alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\text{Theta} \quad \exists \theta \in (0, 1) \quad \text{mit} \quad \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \leq \theta,$$

dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent.

(iii) Proposition 1.4.36 zum *Cauchy-Produkt* f\u00fcr Reihen gilt wortw\u00f6rtlich f\u00fcr komplexe Reihen.

Beweis. (Wieder keine \u00dcberraschung, sondern nur Buchhaltung.) Eine Inspektion der Beweise im Reellen zeigt, dass sie wortw\u00f6rtlich auch in \mathbb{C} gelten. \square

(E 11) Definition (Stetigkeit in \mathbb{C}).

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ und sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann hei\u00dft f

(i) *stetig in z_0* , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in D \text{ mit } |z - z_0| < \delta \quad \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

¹² Daher ist a_n automatisch in \mathbb{R} !

(ii) *stetig auf D* , falls f stetig in jedem $z_0 \in D$ ist.

(E 12) Bemerkung (Zur Stetigkeit).

(i) (Umgebungsstetigkeit) Die Bedingung in **(E 11)** (i) kann wie im reellen Fall umgeschrieben werden zu

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad f(U_\delta(z_0) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(z_0)).$$

(ii) (Stetigkeit ist Folgenstetigkeit). Wie in \mathbb{R} kann die Stetigkeit in \mathbb{C} via Folgen charakterisiert werden. Wortwörtlich mit demselben Beweis erhalten wir

$$f \text{ stetig in } z_0 \in D \iff \forall \text{ Folgen } (c_n) \text{ in } D \text{ mit } c_n \rightarrow z_0 \text{ gilt} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = f(z_0) (= f(\lim_{n \rightarrow \infty} c_n)).$$

Daher gilt auch, vgl. 2.1.28

$$f \text{ stetig in } z_0 \in D \iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

wobei wir den Grenzwert für komplexe Funktionen wortwörtlich wie in \mathbb{R} , also wie in 2.1.21 definieren.

Bemerkung 2.3.9 (Komplexe Exponentialreihe).

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

absolut konvergent, denn für $z = 0$ ist die Aussage trivial und für $z \neq 0$ verwenden wir den Quotiententest (**E 9**) (ii): Für alle n mit $n > 2|z|$ gilt

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{z^{n+1} n!}{z^n (n+1)!} \right| = \left| \frac{|z|}{n+1} \right| \leq \frac{1}{2} < 1$$

Analog zum reellen Fall definieren wir nun die Exponentialfunktion.

Definition 2.3.10 (Komplexe Exponentialfunktion).

Die *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Bemerkung 2.3.11 (Komplexe und reelle Exponentialfunktion).

Wenn wir \exp aus 2.3.10 auf \mathbb{R} einschränken, so erhalten wir \exp aus Definition 1.4.38, denn es gilt

$$\exp(x + i0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + i0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Daher können wir gefahrlos dieselbe Notation verwenden — wir haben tatsächlich \exp von \mathbb{R} auf \mathbb{C} ausgedehnt.

Theorem 2.3.12 (Eigenschaften von \exp).

Die komplexe Exponentialfunktion hat die folgenden Eigenschaften:

(i) (Funktionalgleichung) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$$

(ii) (Fehlerabschätzung) Für alle $N \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} + R_{N+1}(z)$$

wobei für den „Restterm“ $R_{N+1}(z)$ für $|z| \leq 1 + \frac{N}{2}$ die Abschätzung

$$|R_{N+1}(z)| \leq 2 \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \text{gilt.}$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt weiters

$$(iii) \exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}, \quad (iv) \exp(z) \neq 0 \text{ und} \quad (v) \lim_{0 \neq z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

(vi) Schließlich ist $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Beweis. (i), (ii) Wortwörtlich wie in \mathbb{R} , d.h. wie in Thm. 1.4.40 bzw. Prop. 1.4.43.

(iii) folgt aus **(E 6)**, denn setze $s_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$, dann gilt

$$\exp(\bar{z}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\bar{z}) \stackrel{\text{endl. } \Sigma}{=} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z)} \stackrel{\text{(E 6)}}{=} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z)} = \overline{\exp(z)}.$$

(iv) Wegen der Funktionalgleichung gilt

$$\exp(z)\exp(-z) = \exp(z-z) = \exp(0) = 1$$

und daher ist $\exp(z) \neq 0$.

(v) Genau wie in 2.3.7(viii): Wegen (ii) mit $N = 1$ gilt $|e^z - 1 - z| = |R_2(z)| \leq 2 \frac{|z|^2}{2} = |z|^2$ für alle $|z| \leq \frac{3}{2}$ und daher

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| \leq |z| \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow 0).$$

Genau wie in 2.1.8(iii), nur anders herum aufgezo-

(vi) Die Stetigkeit bei 0 folgt aus (ii) mit $N = 0$, denn $\forall |z| \leq 1$

$$|e^z - 1| = |R_1(z)| \leq 2|z| \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow 0)$$

und daher $\lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1 = e^0$ und mit **(E 12)** (ii) ist \exp stetig bei 0.

Die Stetigkeit bei $w \in \mathbb{C}$ folgt nun mittels Funktionalgleichung. Sei (z_n) Folge in \mathbb{C} mit $z_n \rightarrow w$, dann $z_n - w \rightarrow 0$ und daher

$$1 = \exp(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(z_n - w) \stackrel{(i)}{=} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(z_n) \right) \exp(-w),$$

exp stetig bei 0

also nochmals mit (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(z_n) = \exp(w)$. \square

Motivation 2.3.13 (Winkelfunktionen). Jetzt (endlich!) sind wir in der Lage, die Winkelfunktionen mittels der komplexen Exponentialfunktion zu definieren. Sinus und Cosinus auf diese Weise zu definieren entspricht nicht gerade unserer Intuition oder Anschauung, hat aber den eindeutigen Vorteil innerhalb unseres deduktiven Vorgehens konsistent zu sein und keine bisher undefinierten Begriffe wie Bogenlänge und Winkel zu verwenden.

Kommt später basierend auf dem Integralbegriff.

Außerdem kommen wir so sehr „billig“ zu den wesentlichen Eigenschaften der Winkelfunktionen wie der Euler-Formel oder den Additionstheoremen. Wir werden aber rasch nach der Definition den Anschluss an unser Vorwissen bzw. unsere Intuition wiederfinden wenn wir die Grundeigenschaften der Winkelfunktionen herleiten.

Definition 2.3.14 (Sinus und Cosinus).

Wir definieren die Winkelfunktionen *Cosinus* und *Sinus* durch

$$\begin{array}{l} \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cos(x) := \operatorname{Re}(\exp(ix)) = \operatorname{Re}(e^{ix}), \\ \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sin(x) := \operatorname{Im}(\exp(ix)) = \operatorname{Im}(e^{ix}). \end{array}$$

Bemerkung 2.3.15 (Grundeigenschaften von sin und cos).

- (i) Wegen $e^{ix} = \operatorname{Re}(e^{ix}) + i\operatorname{Im}(e^{ix})$ erhalten wir unmittelbar aus der Definition die *Eulersche Formel*

$$\cos(x) + i \sin(x) = e^{ix}.$$

- (ii) Die Winkelfunktionen sin und cos sind *stetig auf ganz* \mathbb{R} , da für $x_n \rightarrow x$ in \mathbb{R} mit 2.3.12(vi) gilt, dass

$$e^{ix_n} \rightarrow e^{ix} \text{ also mit (E3) (ii) } \operatorname{Re}(e^{ix_n}) \rightarrow \operatorname{Re}(e^{ix}) \text{ und } \operatorname{Im}(e^{ix_n}) \rightarrow \operatorname{Im}(e^{ix}).$$

- (iii) *Geometrische Interpretation:* Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} \overline{e^{ix}} = e^{ix} e^{-ix} = e^0 = 1 \quad \text{und daher} \quad |e^{ix}| = 1.$$

Das bedeutet also, alle komplexen Zahlen der Form e^{ix} mit $x \in \mathbb{R}$ liegen auf dem Einheitskreis

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Darüber hinaus sind $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$ und $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$ genau die kartesischen Koordinaten von $z = e^{ix}$, siehe Abbildung 2.44. Insbesondere ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

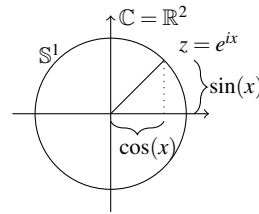


Abb. 2.44 sin & cos am Einheitskreis

- (iv) *Cosinus ist gerade, Sinus ungerade.* Genauer gilt

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(-x) = -\sin(x),$$

also ist der Graph von \cos symmetrisch bezüglich der y -Achse und der von \sin punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs.

Tatsächlich gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$, vgl. **(E 1)** $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. Daher folgt aus der Definition der Winkelfunktionen

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

also

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

(v) Es gelten die *Additionstheoreme*. Genauer für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \quad (2.16)$$

$$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) \quad (2.17)$$

und

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad (2.18)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right). \quad (2.19)$$

Tatsächlich ergeben sich die beiden Formeln (2.16), (2.17) als Real- bzw. Imaginärteil der Gleichung

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}.$$

Die Formeln (2.18), (2.19) ergeben sich dann aus (2.16) bzw. (2.17) mittels der Substitution $u = \frac{1}{2}(x+y)$, $v = \frac{1}{2}(x-y)$.

(vi) *Reihendarstellung für \sin und \cos* : Die natürlichen Potenzen von i folgen einem einfachen Muster: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, usw., also

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0, 4, 8, \dots \text{ also } n = 4m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}, \\ i & \text{falls } n = 1, 5, 9, \dots \text{ also } n = 4m + 1 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}, \\ -1 & \text{falls } n = 2, 6, 10, \dots \text{ also } n = 4m + 2 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}, \\ -i & \text{falls } n = 3, 7, 11, \dots \text{ also } n = 4m + 3 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Damit ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos(x) + i \sin(x) &\stackrel{(i)}{=} e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \left(1 + ix - \frac{x^2}{2} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \dots \right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\operatorname{Re}(e^{ix})} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\operatorname{Im}(e^{ix})} \end{aligned}$$

und daher

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

also explizit

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

- (vii) *Verhalten nahe $x = 0$.* Für kleine x ergibt sich aus den obigen Reihendarstellungen unter Vernachlässigung aller Terme der Ordnung x^2 oder höher, dass sich der Cosinus in etwa so verhält wie die Funktion 1 und der Sinus in etwa so wie x , also heuristisch

$$\cos(x) \approx 1, \quad \sin(x) \approx x \quad \text{für } |x| \text{ klein.}$$

Tatsächlich gelten sogar die folgenden Grenzwerte für $x \rightarrow 0$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Denn zunächst folgt aus 2.3.12(v)

$$1 = 1 + i0 \stackrel{2.3.12(v)}{=} \lim_{0 \neq x \rightarrow 0} \frac{e^{ix} - 1}{ix} \stackrel{(E.5)}{=} \lim_{0 \neq x \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{ix} - 1}{ix} \right) + i \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix} - 1}{ix} \right) \quad (2.20)$$

und daher

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} = -\operatorname{Im} \left(\frac{\cos(x) - 1 + i \sin(x)}{ix} \right) = -\operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix} - 1}{ix} \right) \stackrel{(2.20)}{\rightarrow} 0 \quad (x \rightarrow 0),$$

sowie $\frac{1}{i} = -i$

$$\frac{\sin(x)}{x} = \operatorname{Re} \left(\frac{\cos(x) - 1 + i \sin(x)}{ix} \right) \stackrel{(i)}{=} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{ix} - 1}{ix} \right) \stackrel{(2.20)}{\rightarrow} 1 \quad (x \rightarrow 0).$$

Motivation 2.3.16 (Die Kreiszahl π).

Wie schon den Winkelfunktionen werden wir uns der Kreiszahl π auf einem etwas verschlungenem aber deduktiv einwandfreiem Weg nähern. Wir werden π als das Doppelte der eindeutigen Nullstelle von \cos auf $[0, 2]$ definieren — erst später werden wir mittels des Integralbegriffs sehen, dass π der halbe Umfang des Einheitskreises ist.

Wir beginnen mit technischen Vorarbeiten.

Lemma 2.3.17 (Technisches zu sin und cos).

Es gilt

(i) $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) \leq -\frac{1}{3}$,

(ii) $\sin(x) > 0$ auf dem Intervall $(0, 2]$,

(iii) $\cos(x)$ ist streng monoton fallend auf $[0, 2]$.

Beweis. (Mühsames Rechnen mit der Reihendarstellung.)

(i) Zunächst ist einfach $\cos(0) = \operatorname{Re}(e^{i0}) = 1$.

Um $\cos(2)$ abzuschätzen, verwenden wir die Reihendarstellung aus 2.3.15(v):

$$\begin{aligned} \cos(2) &= \underbrace{1 - \frac{2^2}{2!}}_{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} \\ &= -1 + \frac{2^4}{4!} \underbrace{\left(1 - \frac{2^2}{5 \cdot 6} + \frac{2^4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} - \dots \right)}_{\leq 1} \leq -1 + \frac{16}{24} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

1. Term herausgehoben

$| \cdot | \leq 1$ $\leq \frac{2^2}{5 \cdot 6}$ usw.

(ii) Wir verwenden wieder 2.3.15(v). Sei $0 < x \leq 2$, dann gilt

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{4 \cdot 5} + \frac{x^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \dots \right)}_{\leq 1} \geq x - \frac{x^3}{3!} \geq x - \frac{2x}{3} = \frac{x}{3} > 0. \end{aligned}$$

$\frac{x^3}{3!} = x \frac{x^2}{6} \stackrel{x \leq 2}{\leq} x \frac{4}{6} = \frac{2x}{3}$

$| \cdot | \leq 1$ $\frac{x^2}{4 \cdot 5}$

(iii) Sei $0 \leq x_1 < x_2 \leq 2$, dann gilt

$$0 < \frac{x_1 + x_2}{2} \leq 2 \quad \text{und} \quad 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leq 2 \quad (2.21)$$

und daher

$$\cos(x_2) - \cos(x_1) \stackrel{2.3.15(\text{iv})}{=} -2 \underbrace{\sin\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)}_{\stackrel{(2.21)}{\geq 0}} \underbrace{\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)}_{\stackrel{(2.21)}{\geq 0}} < 0. \quad \square$$

Proposition 2.3.18 (1. Nullstelle des Cosinus).

Es gibt genau ein $x_0 \in [0, 2]$ mit $\cos(x_0) = 0$.

Beweis. (Zwischenwertsatz als „Existenzmaschine“; Injektivität gibt Eindeutigkeit.)
Wegen 2.3.17(i) gilt $\cos(0) > 0$, $\cos(2) < 0$ und da \cos nach 2.3.15(ii) stetig ist, liefert uns der Zwischenwertsatz

$$\exists x_0, 0 < x_0 < 2 \text{ mit } \cos(x_0) = 0.$$

Weiters ist \cos nach 2.3.17(iii) streng monoton fallend auf $[0, 2]$ und somit injektiv. Daher ist x_0 die einzige Nullstelle. \square

Definition 2.3.19 (Kreiszahl π).

Sei x_0 die eindeutige Nullstelle von \cos in $[0, 2]$ gemäß 2.3.18. Wir definieren die reelle Zahl π als

$$\pi = 2x_0.$$

Bemerkung 2.3.20 (Ein bisschen in Richtung Gewohntes).

Mit dieser Definition werden einige der obigen Aussagen vertrauter.

(i) Lemma 2.3.17(i),(iii) und Definition 2.3.19 liefern

$$\cos(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ = 0 & \text{für } x = \frac{\pi}{2} \\ < 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < x < 2 \end{cases}$$

Außerdem gilt $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und nach 2.3.17(ii) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, daher also

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{und} \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i. \quad (2.22)$$

(ii) (Extrema und Nullstellen für Sinus und Cosinus)

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ folgt mit 2.22 $e^{ik\frac{\pi}{2}} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^k = i^k$ und damit insbesondere

$$\begin{aligned} e^{i0} &= 1 = \cos(0) + i \sin(0), & e^{i\frac{\pi}{2}} &= i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ e^{i\pi} &= -1 = \cos(\pi) + i \sin(\pi), & e^{i\frac{3\pi}{2}} &= -i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right), \\ e^{i2\pi} &= 1 = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi). \end{aligned}$$

Fassen wir unsere Erkenntnisse in folgender Wertetabelle zusammen, so ergibt sich bereits einiges Vertrautes:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

Korollar 2.3.21 (Weitere Eigenschaften von sin und cos).

Die Winkelfunktionen haben die folgende Eigenschaften ($x \in \mathbb{R}$):

(i) (Periodizität mit Periodenlänge 2π)

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

(ii) (Verschiebung um halbe Periode)

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(x + \pi) = -\sin(x).$$

(iii) ($\frac{\pi}{2}$ -Verschiebung ergibt jeweils die andere Funktion)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x).$$

(iv) (Nullstellen)

$$\begin{aligned} \sin(x) = 0 &\iff x \in \pi\mathbb{Z} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \\ \cos(x) = 0 &\iff x \in \left\{\frac{\pi}{2}\right\} + \pi\mathbb{Z} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Beweis. ((i)-(iii) folgen unmittelbar aus den Additionstheoremen und der Wertetabelle, (iv) ist etwas technisch.)

(i) $\cos(x + 2\pi) \stackrel{2.3.15(iv)}{=} \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) \stackrel{2.3.20(ii)}{=} \cos(x)$ und analog für sin.

(ii) $\cos(x + \pi) \stackrel{2.3.15(iv)}{=} \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) \stackrel{2.3.20(ii)}{=} -\cos(x)$ und analog für sin.

(iii) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \stackrel{2.3.15}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-x) \stackrel{2.3.15(iii)}{=} \cos(x)$ und analog für cos.

(iv) Wegen der 2π -Periodizität (i) genügt es, die Aussage für $x \in [0, 2\pi)$ zu zeigen.

Wir beginnen mit sin. Die zwei behaupteten Nullstellen in $[0, 2\pi)$, nämlich $0, \pi$ haben wir schon in 2.3.20(ii) gefunden. Es genügt daher zu zeigen, dass es keine weiteren Nullstellen in $[0, 2\pi)$ gibt. Das tun wir, indem wir zeigen, dass $\sin(x)$ auf $(0, \pi)$ positiv und auf $(\pi, 2\pi)$ negativ ist.

Sei dazu $x \in (0, \pi) \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und daher

$$\sin(x) \stackrel{(iii)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > 0. \quad (2.23)$$

Wegen $(\pi, 2\pi) = \{x + \pi : 0 < x < \pi\}$ gilt

$$\sin(x + \pi) \stackrel{(ii)}{=} -\sin(x) \stackrel{(2.23)}{<} 0.$$

Die Aussage für den Cosinus folgt sofort aus $\cos(x) \stackrel{(iii)}{=} -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. \square

Bemerkung 2.3.22 (Der Graph von Sinus und Cosinus).

Aus den obigen Eigenschaften können wir ein gutes qualitatives Bild der Graphen der Funktionen sin und cos gewinnen, insbesondere gilt:

(i) Eine Verschiebung des Graphen von cos um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts ergibt den Graphen von sin, denn 2.3.21(iii) und 2.3.15(iv) ergeben $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$.

(ii) Neben den Nullstellen, vgl. 2.3.21(iv) kennen wir die Maxima und Minima. Sie sind wegen 2.3.15(iii) jeweils die Nullstellen der anderen Funktion. Dort ändern die Funktionen jeweils das Monotonieverhalten.

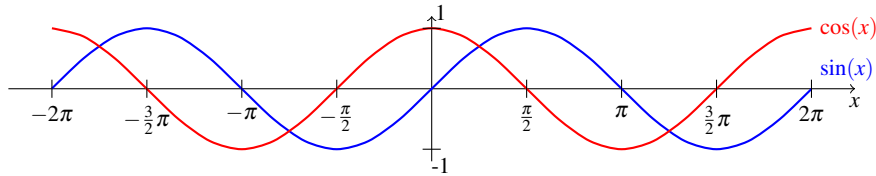


Abb. 2.45 Die Graphen von Sinus und Cosinus

Definition 2.3.23 (Tangens und Cotangens).

Wir definieren die Funktionen *Tangens* und *Cotangens* wie folgt:

(i) $\tan : \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}$

genau die Nst. von cos

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

(ii) $\cot : \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

genau die Nst. von sin

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Bemerkung 2.3.24 (Eigenschaften des Tangens).

(i) Eine geometrische Interpretation von $\tan(x)$, siehe Abb.2.46 für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ergibt sich mit dem Strahlensatz:

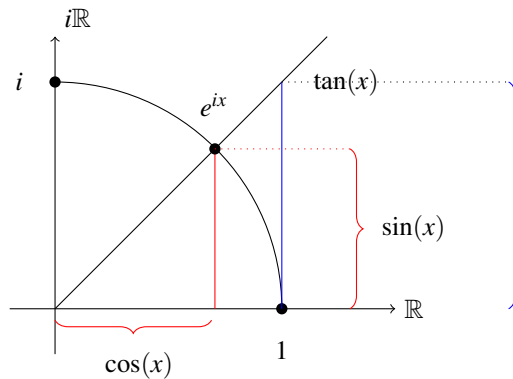


Abb. 2.46 Der Tangens konstruiert mithilfe des Strahlensatzes

(ii) Der Graph auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ergibt sich aus den Eigenschaften von sin und cos zu

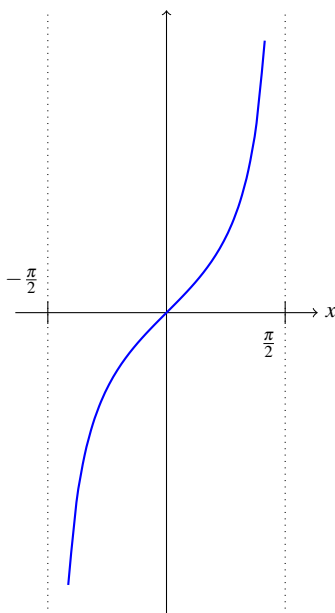


Abb. 2.47 Der Graph der Tangensfunktion auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(iii) (*Periodizität*) Es gilt

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} \stackrel{2.3.21(\text{ii})}{=} \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x),$$

also ist \tan periodisch mit Periode π . Der gesamte Graph ergibt sich durch horizontales Verschieben des Graphen in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ um $\pi\mathbb{Z}$.

Motivation 2.3.25 (Arcusfunktionen). Zu guter Letzt behandeln wir die Umkehrfunktionen von \cos , \sin und \tan . Sie geben also zu gegebenem Winkelfunktionswert den jeweiligen Winkel (im Bogenmaß) an, also die zugehörige Bogenlänge am Einheitskreis — daher die Namen Arcussinus /-cosinus /-tangens. Wesentliches Werkzeug ist hier – wie auch bei unserem Zugang zum Logarithmus – der Umkehrsatz 2.2.19.

Definition und Proposition 2.3.26 (Arcussinus /-cosinus /-tangens).

(i) Die Cosinusfunktion ist stetig, streng monoton fallend auf $[0, \pi]$ und $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

Existiert wegen 2.2.19! $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

und nennen sie *Arcuscosinus*. Sie ist stetig und streng monoton fallend.

- (ii) Die Sinusfunktion ist stetig, streng monoton wachsend auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $\sin(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = [-1, 1]$. Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

Existiert wegen 2.2.19! $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

und nennen sie *Arcussinus*. Sie ist stetig und streng monoton wachsend.

- (iii) Die Tangensfunktion ist stetig, streng monoton wachsend auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\tan(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit

Existiert wegen 2.2.19! $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

und nennen sie *Arcustangens*. Sie ist stetig und streng monoton wachsend.

Beweis. Wir zeigen jeweils die Voraussetzungen des Umkehrsatzes 2.2.19 — dieser besorgt dann den Rest.

- (i) Wegen 2.3.15(i) ist \cos stetig und wegen 2.3.17(ii) streng monoton fallend auf $[0, \frac{\pi}{2}]$. Weiters gilt wegen 2.3.21(ii) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ und daher ist \cos streng monoton fallend auch auf $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Insgesamt ist \cos daher streng monoton fallend auf $[0, \pi]$.

Aus 2.3.20(ii) wissen wir, dass $\cos(0) = 1 = -\cos(\pi)$ gilt und mit dem Zwischenwertsatz folgt $[-1, 1] \subseteq \cos([0, \pi])$. Wegen der strengen Monotonie gilt aber auch $\cos([0, 2\pi]) \subseteq [-1, 1]$. Also gilt insgesamt für das Bild, $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

Nun schlägt der Umkehrsatz 2.2.19 zu und liefert eine streng monoton fallende und stetige Inverse $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

- (ii) Mit $\sin(x) \stackrel{2.3.21(\text{iii})}{=} \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ erhalten wir die gewünschten Eigenschaften von \sin auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, der Umkehrsatz besorgt dann wieder den Rest.
- (iii) Der Tangens ist streng monoton wachsend auf $[0, \frac{\pi}{2})$, denn für $0 \leq x < x' < \frac{\pi}{2}$ gilt mit (i) bzw. (ii), dass

$$\cos(x) > \cos(x') \quad \text{und} \quad \sin(x) < \sin(x')$$

und damit

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} < \frac{\sin(x')}{\cos(x')} = \tan(x').$$

\tan ist auch streng monoton wachsend auf $(-\frac{\pi}{2}, 0]$, denn

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x). \quad (2.24)$$

Weiters ist \tan als Quotient stetiger Funktionen stetig, vgl. 2.1.17(i). Schließlich gilt

$$\tan\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathbb{R},$$

denn $\frac{\cos(x)}{\sin(x)} > 0$ auf $(0, \frac{\pi}{2})$ und

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \stackrel{2.1.27}{=} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \stackrel{2.3.20(ii)}{=} 0, \quad \text{daher mit 1.2.47(ii) } \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty.$$

Daher sagt der Zwischenwertsatz, dass $\tan\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [0, \infty)$. Mit (2.24) ist aber $\tan\left(\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]\right) = (-\infty, 0]$.

Nun schlägt der Umkehrsatz ein letztes Mal zu. \square

Bemerkung 2.3.27 (Zu den Arcusfunktionen).

(i) Natürlich hätten wir den „Umkehrprozess“ statt auf $[0, \pi]$ bzw. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ und $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ auf jedem Intervall durchführen können, wo die jeweilige Funktion streng monoton ist.

(ii) Die Graphen der Arcusfunktionen, wie in Abb. 2.48 zu sehen ist, haben die folgende Gestalt (Spiegelung an der 1. Mediane):

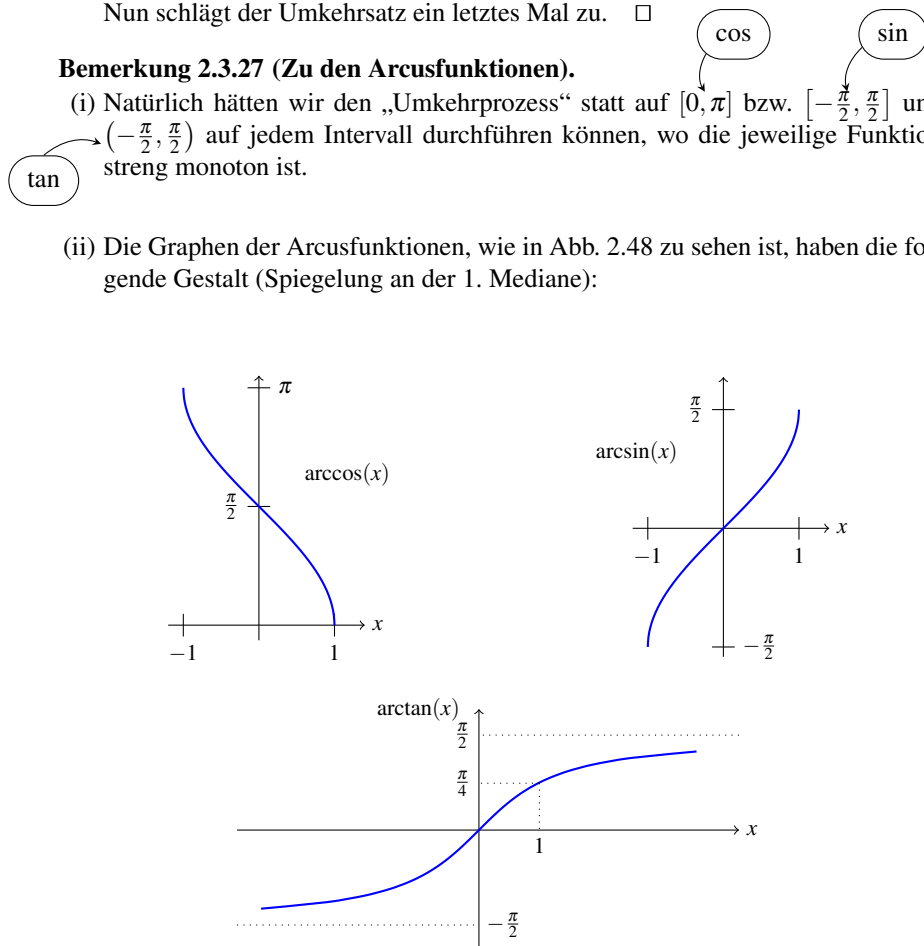


Abb. 2.48 Graphen der Arcusfunktionen

Kapitel 3

Differentiation

Zusammenfassung. In diesem Kapitel kommen wir nun endlich zum Hauptthema der Analysis, der *Differential- und Integralrechnung*. Wir beginnen mit dem Differenzieren, genauer mit dem Studium differenzierbarer Funktionen, also von Funktionen, die noch „schöner“ als die stetige Funktionen aus Kapitel 2 sind. Sie haben die Eigenschaft, dass sie (in den Nähe eines Punktes)

besonders gut durch eine Gerade angenähert werden können.

Zunächst werden wir in §3.1 die Begriffe *Differenzierbarkeit* und *Ableitung* von Funktionen gründlich untersuchen. Natürlich werden hier die „alten Bekannten“ *Differenzenquotient* und *Differentialquotient* eine wichtige Rolle spielen. *Neu* hinzu kommt ein anderer Gesichtspunkt, der viel allgemeiner gefasst werden kann und daher auch viel weiter trägt:

Die Ableitung als lineare Bestapproximation an die Funktion.

Wir klären das Verhältnis der Differenzierbarkeit zur Stetigkeit und leiten die „schulbekanntenen“¹ Ableitungsregeln her, um damit die wichtigsten Funktionen zu differenzieren.

Dann lernen wir in §3.2 die wichtigsten Sätze über differenzierbare Funktionen kennen: den *Mittelwertsatz* der Differentialrechnung — eines *der* Hauptresultate der Vorlesung, Kriterien für (lokale) Extremstellen, Monotonie und Konvexität. So verschaffen wir uns einen Überblick über die Eigenschaften differenzierbarer Funktionen, beleuchten also gründlich den theoretischen Hintergrund der berühmtesten „Kurvendiskussionen“ der Schulanalysis.

¹ in Analogie zu amtsbekannt.

3.1 Differenzierbarkeit und Ableitung

Bevor wir tatsächlich mit dem Thema Differentialrechnung starten, setzen wir dieses in Beziehung zum bisherigen Verlauf der Vorlesung.

Wiederholung 3.1.1 (Was will und was soll die Analysis).

- (i) Der inhaltliche Kern der Analysis ist (vgl. 0.0.2) die *Differential-* und *Integralrechnung*, genauer: das *Verstehen und Beschreiben des Änderungsverhaltens von Funktionen*. Noch genauer ist das Hauptthema der Analysis:

Welche Begriffe eignen sich am Besten dazu, die Änderung einer Funktion im Kleinen (d.h. lokal um einen Punkt im Definitionsbereich) zu verstehen und was kann man daraus über die Funktion im Großen (d.h. über ihren Gesamtverlauf) lernen bzw. aussagen!

- (ii) Der Begriff der Stetigkeit aus Kapitel 2 beschreibt zwar *genau* das lokale Änderungsverhalten von Funktionen, aber noch *nicht genau genug!* Bevor wir weiter überlegen, erinnern wir uns, dass die Stetigkeit zentral auf dem Grenzwertbegriff aus Kapitel 1 aufbaut. Dieser liefert via absoluter Konvergenz von Reihen auch das Hauptwerkzeug zur Konstruktion interessanter Funktionen(klassen), die über Polynome und rationale Funktionen hinausgehen.

$\exp, \log, \sin, \cos, \tan, \arcsin, \arccos, \arctan, x^\alpha, \sinh, \cosh, \tanh$

Mit der Stetigkeit und der Konvergenztheorie haben wir einen Grundstein gelegt, auf dem wir hoch hinaus aufbauen können.

- (iii) In diesem Kapitel nimmt unser Studium des Änderungsverhaltens von Funktionen die alles entscheidende Wendung, wobei wir mit der folgenden Idee weit über die Stetigkeit hinausgehen: Wir vergleichen die Änderung einer Funktion f nahe eines Punkts ξ im Definitionsbereich mit der einfachsten nicht-konstanten Funktion, nämlich einer Geraden. Wir werden sehen, dass diese Idee *enorm weit trägt!*

Motivation 3.1.2 (Änderungsverhalten von Funktionen).

- (i) Wir haben im Verlauf der Vorlesung schon öfters gesehen, dass es bei der Untersuchung von Funktionen weniger darauf ankommt, ihre Werte an vorgegebenen Stellen zu kennen, als vielmehr die

Veränderung der Funktionswerte bei Veränderungen des Arguments.

Zwei dieser „Änderungsmodi“ haben wir schon kennengelernt: *Monotonie* (siehe 2.2.18) und *Stetigkeit* (siehe Abschnitt 2.1).

- (ii) Erinnern wir uns an die Definition der Stetigkeit (vgl. 2.1.6) für eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $\xi \in D$:

ξ

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D \text{ mit} \\ |x - \xi| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Stark vereinfacht bedeutet das, dass sich f nahe ξ wie die konstante Funktion $x \mapsto f(\xi)$ verhält, in dem Sinne, dass die Funktionswerte $f(x)$ nicht zu weit von $f(\xi)$ abweichen, wenn x nahe ξ liegt, siehe Abb. 3.1.

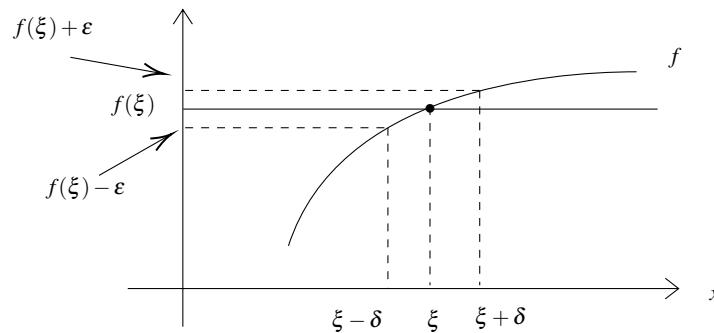


Abb. 3.1 Approximation von f durch die konstante Funktion $x \mapsto f(\xi)$

(iii) Dem Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ können wir uns (unter vielen alternativen Zugängen, siehe auch später) auf ähnliche Weise nähern.

Wir werden f bei $\xi \in D$ *differenzierbar* nennen, wenn f „in der Nähe“ von ξ „sehr gut“ durch eine (i.a. nicht waagrechte) Gerade approximiert werden kann. (3.1)

Diese Gerade wird sich dann natürlich als die Tangente (der Schulmathematik) herausstellen, siehe Abbildung 3.2

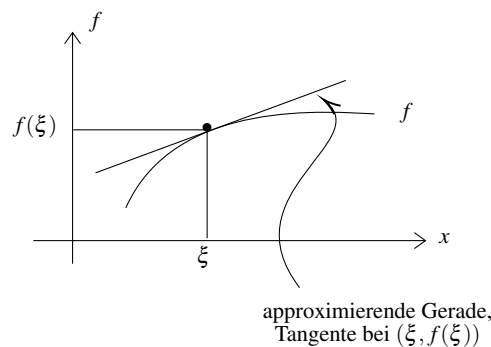


Abb. 3.2 Approximation von f durch eine Gerade

Um die Idee (3.1) zu präzisieren und in eine offizielle Definition gießen zu können, müssen wir sie zunächst etwas formaler ausdrücken:

Die approximierende Gerade hat — so wie jede Gerade — die Form

$$g(x) = \alpha x + \beta \quad (3.2)$$

Anstieg

„y-Abschnitt“

Außerdem passiert g den Punkt $(\xi, f(\xi))$, d.h.

$$f(\xi) = g(\xi) = \alpha\xi + \beta. \quad (3.3)$$

Daher ergibt sich in den Punkten $x = \xi + h$

$$g(x) = g(\xi + h) \stackrel{(3.2)}{=} \alpha(\xi + h) + \beta = \alpha\xi + \beta + \alpha h \stackrel{(3.3)}{=} f(\xi) + \alpha h.$$

Im Sinne unserer Approximationsidee (3.1) bedeutet das, dass für x „nahe bei“ ξ , d.h. für „kleine“ h

$$f(x) = f(\xi + h) \approx g(\xi + h) = f(\xi) + \alpha h \quad (3.4)$$

gilt.

Noch bevor wir (3.4) präziser fassen, können wir es verwenden, um den noch unbekanntes Anstieg α der approximierenden Geraden g zu bestimmen, nämlich

$$\alpha \approx \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Diesen Ausdruck werden wir als *Differenzenquotient* bezeichnen. Seine graphische Bedeutung ist, dass er die Steigung der Sekante zwischen den Punkten $(\xi, f(\xi))$ und $(\xi + h, f(\xi + h)) = (x, f(x))$ angibt, siehe Abbildung 3.3.

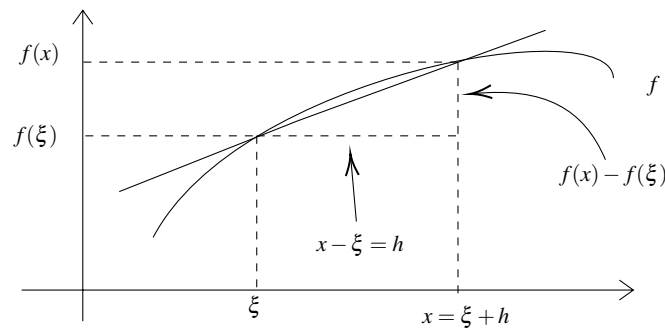


Abb. 3.3 Die Bedeutung des Differenzenquotienten

(iv) Der weitere Weg der Präzisierung von (3.1) ist nun vorgezeichnet. Um der Idee gerecht zu werden, müssen wir uns mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = \lim_{x \rightarrow \xi, x \neq \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

sonst sinnlos!

befassen, bzw. untersuchen, ob er überhaupt existiert.

Nun aber offiziell:

Definition 3.1.3 (Differenzenquotient).

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $\xi \in I$ fix. Für $I \ni x \neq \xi$ heißt der Ausdruck

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

Differenzenquotient von f bei ξ .

Bemerkung 3.1.4 (Zwei Variable).

Formal hat der Differenzenquotient den Nachteil, dass er von *zwei Variablen*, nämlich ξ und x , abhängt. Das sind die zwei Punkte, die die Sekante festlegen. Wie in 3.1.2(iv) angedeutet, wollen wir die Abhängigkeit von x durch Übergang zum Limes $x \rightarrow \xi$ loswerden. Um diesen Limes (von Funktionen!) sauber durchführen zu können, wiederholen wir:

Definition 3.1.5 (Limes von Funktionen auf Intervallen; Spezialfall von 2.1.21).

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $\xi \in I$.

Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = c,$$

damit automatisch BP, siehe 1.3.28(i)

$c \in \mathbb{R}$, oder auch $\pm\infty$

falls für jede Folge $(x_n)_n$ in I mit $x_n \rightarrow \xi$ gilt, dass $f(x_n) \rightarrow c$.

Bemerkung 3.1.6 (Technisches Detail).

Wir haben in 3.1.2(iv) gesehen, dass im Differenzenquotienten $x = \xi$ sinnlos ist und diesen Fall daher auch in 3.1.3 ausgeschlossen. Andererseits erlaubt Definition 3.1.5 explizit auch die Folge $x_n = \xi$ für alle n (konvergiert ja trivialerweise, vgl. 1.2.11(i)). Daher müssen wir im Folgenden bei $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ immer die konstante Folge $x_n = \xi$ explizit verbieten und schreiben $\lim_{x \neq \xi, x \rightarrow \xi}$ oder kürzer $\lim_{x \neq \xi}$.

Warnung: Manche Quellen (z.B. [8]) verbieten in der Definition für Konvergenz von Funktionen $x_n = \xi$. Dann muss bei der Differenzierbarkeit $x_n = \xi$ nicht ausgeschlossen werden. Dafür sind einige Details im Zusammenhang mit Limiten von Funktionen anders zu handhaben. Jetzt aber los!

Eine Schlüsseldefinition!

Definition 3.1.7 (Differenzierbarkeit und Ableitung).

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

- (i) Sei $\xi \in I$. Die Funktion f heißt *differenzierbar* an der Stelle ξ bzw. differenzierbar in ξ , falls

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \quad \text{oder, was dasselbe ist}$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \quad \text{existiert und endlich ist}^2.$$

In diesem Fall nennen wir den Grenzwert die *Ableitung* von f in ξ und schreiben $f'(\xi)$.

- (ii) Ist f differenzierbar in allen Punkten $\xi \in I$, dann heißt f *differenzierbar auf I* oder einfach *differenzierbar*.

Bemerkung 3.1.8 (Ableitung, Differentialquotient, Schmiegegerade & Tangente).

- (i) Zusammengefasst können wir also für die Ableitung schreiben

$$f'(\xi) = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}, \quad \text{falls existent \& endlich.}$$

- (ii) Falls der Limes in (i) existiert und endlich ist, gilt tatsächlich wie in 3.1.2(iii) antizipiert, dass die Ableitung (an der Stelle ξ) gleich dem Limes des Differenzenquotienten (an der Stelle ξ) ist. Oft wird (im Falle der Existenz) der Ausdruck

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

als *Differentialquotient* von f an der Stelle ξ bezeichnet. Es gilt dann also, dass der Differentialquotient (in ξ) der Limes des Differenzenquotienten (in ξ) ist.

- (iii) Geometrisch ergibt sich die Ableitung also als der Grenzwert der Sekantensteigungen und kann somit als die Steigung der Funktion im Punkt ξ bzw. als die Steigung des Graphen von f in $(\xi, f(\xi))$ interpretiert werden, siehe Abbildung 3.4.

Die Gerade durch den Punkt $(\xi, f(\xi))$ mit dem Anstieg $f'(\xi)$, also der Ableitung in ξ , d.h.

$$g(x) := f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$$

heißt die *Tangente* an f in $(\xi, f(\xi))$. Sie wird oft auch als *Schmiegegerade* bezeichnet, denn sie ist gewissermaßen „Grenzwert der Sekanten“, also eine Gerade, die sich besonders gut an den Graphen von f „anschmiegt“. Mit dieser Lösung des sogenannten *Tangentenproblems* befassen wir uns näher in 3.1.12.

² D.h. uneigentliche Grenzwerte sind *nicht* erlaubt!

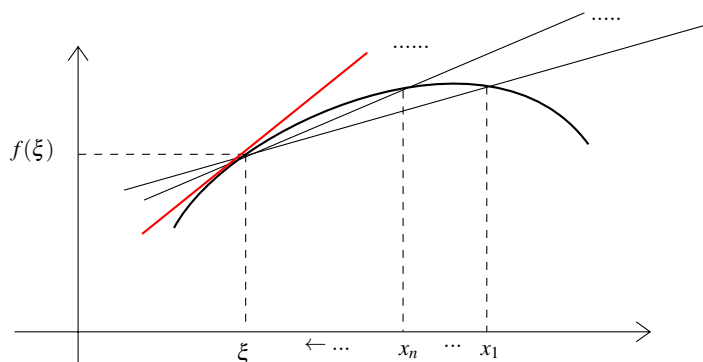


Abb. 3.4 Die Tangente als Schmiegegerade an den Graphen von f

Bemerkung 3.1.9 (Einseitige Ableitungen).

- (i) Bisher haben wir suggestiv immer $x > \xi$ gezeichnet. Das diente aber nur der Veranschaulichung. Klarerweise sind in der Definition 3.1.7 resp. 3.1.5 auch Folgen erlaubt, die von links/unten gegen ξ konvergieren, ebenso wie Folgen die „hin- und herspringen“. Nach den Definitionen 3.1.5 und 3.1.7 sind alle Folgen $(x_n)_n$ in I erlaubt mit $x_n \neq \xi$ für alle n und $x_n \rightarrow \xi$, siehe Abbildung 3.5

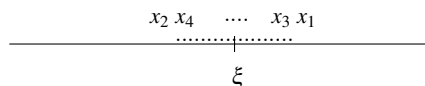


Abb. 3.5 Allgemeine Folge (x_n) mit $x_n \rightarrow \xi$ und $x_n \neq \xi$ für alle n

- (ii) Ist I ein (wenigstens halb-) abgeschlossenes Intervall und ξ ein Randpunkt von I , dann kommen nur Folgen in Frage die von oben bzw. unten gegen ξ konvergieren. Man spricht dann von *einseitigen Ableitungen*. Natürlich können solche auch für innere Punkte eines beliebigen Intervalls betrachtet werden.

Beispiel 3.1.10 (Höchste Zeit: Diffbare³ und nichtdiffbare Funktionen).

- (i) *Konstante Funktionen* sind (überall) differenzierbar mit Ableitung 0:
Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ für alle x . Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

- (ii) *Potenzfunktionen* sind differenzierbar. Sei $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \ni n \geq 1$. Wir betrachten $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = cx^n$. Es gilt

³ „Diffbar“ ist eine oft gebräuchliche Abkürzung für „differenzierbar“.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{c(x+h)^n - cx^n}{h} = c \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
 &\stackrel{\text{(BLS)}}{=} c \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n}{h} = c \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n}{h} \\
 &= c \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} \right) = c \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \left(\underbrace{\binom{n}{1}}_{=n} x^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \underbrace{h^{k-1} x^{n-k}}_{\rightarrow 0} \right) \\
 &= cnx^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},}$$

und für lineare Funktionen

$$\boxed{(cx)' = c.}$$

Vereinigung zweier Intervalle; funktioniert genauso!

- (iii) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist (überall) differenzierbar und $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}
 \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{x - (x+h)}{x(x+h)} \\
 &= \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.
 \end{aligned}$$

- (iv) Die Exponentialfunktion ist auf ganz \mathbb{R} differenzierbar und gleich ihrer Ableitung, d.h.

$$\boxed{\exp(x)' = \exp(x).}$$

Dem es gilt

$$\begin{aligned}
 \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} &\stackrel{1.4.40}{=} \exp(x) \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \\
 &\stackrel{2.3.7(viii)^4}{=} \exp(x).
 \end{aligned}$$

- (v) Die Winkelfunktionen sin und cos sind differenzierbar auf \mathbb{R} und es gilt

$$\boxed{\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \cos'(x) = -\sin(x).}$$

Tatsächlich gilt für den Sinus

⁴ Dieser und die anderen Grenzwerte in 2.3.7 waren als wichtig angekündigt, vgl. Fußnote auf Seite 122.

$$\begin{aligned} \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &\stackrel{(2.19)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}_{\rightarrow \cos(x) \text{ (2.3.15(i))}} \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{\rightarrow 1 \text{ (2.3.15(vii))}} \right) \stackrel{1.2.22}{=} \cos(x). \end{aligned}$$

Der Cosinus-Fall lässt sich analog erledigen.

(vi) Der *Absolutbetrag* $\text{abs} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ aber *nicht differenzierbar* in $x = 0$, siehe Abbildung 3.6.

Tatsächlich gilt für

$$\begin{aligned} x > 0: \quad |x| &= x \stackrel{(ii)}{\implies} |x|' = 1, \\ x < 0: \quad |x| &= -x \stackrel{(ii)}{\implies} |x|' = -1. \end{aligned}$$

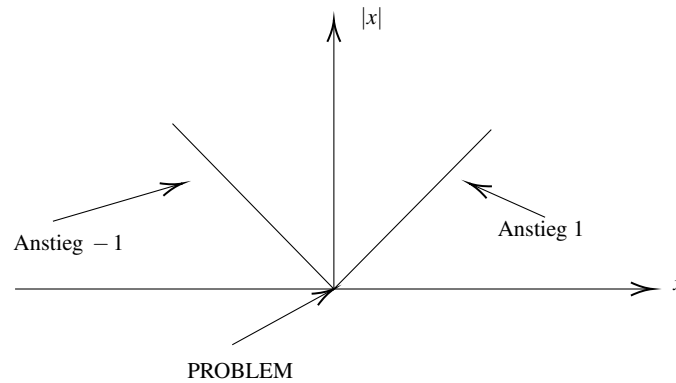


Abb. 3.6 Der Absolutbetrag ist überall differenzierbar außer im Punkt $x = 0$.

Aber $\text{abs}'(0)$ existiert nicht, denn sei $h_n = \frac{(-1)^n}{n}$, dann gilt $0 \neq h_n \rightarrow 0$ aber die Folge der Differenzenquotienten konvergiert nicht, denn

$$\frac{|0 + h_n| - |0|}{h_n} = \frac{\frac{1}{n}}{(-1)^n \frac{1}{n}} = (-1)^n \quad \text{divergiert nach 1.2.11(iii).}$$

Die Folge (h_n) ist natürlich absichtlich so gewählt, dass sie abwechselnd Differenzenquotienten ± 1 produziert.

Bemerkung 3.1.11 (Nicht-diffbare Funktionen).

(i) Bemerke, dass

abs in $\xi = 0$ nach 2.1.2(iv) zwar *stetig* ist, aber eben *nicht differenzierbar*!

- (ii) In gewisser Weise ist der *Knick* von *abs* bei $x = 0$ ein *Prototyp* einer Nichtdifferenzierbarkeit — etwa wie Sprünge Prototypen für Unstetigkeiten sind, vgl. 2.1.8(v) aber auch 2.1.15! Aber auch hier ist die ganze Wahrheit komplizierter. Es gibt etwa Funktionen, die auf ganz \mathbb{R} stetig aber nirgends differenzierbar sind, z.B. die Weierstraß-Funktion $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \sin(2^k x)}{3^k}$. (Topologisch gesehen gibt es sogar viele solche Funktionen - sie liegen dicht in den stetigen Funktionen.)
- (iii) Das „Problem“ von *abs* bei $x = 0$ lässt sich mittels einseitiger Ableitungen (vgl. 3.1.9(iii)) genauer analysieren. Offensichtlich gilt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = 1, \quad \lim_{h \nearrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = -1,$$

siehe 2.1.25(i)

sodass die einseitigen Ableitungen bei $x = 0$ existieren und ± 1 ergeben.

Bemerkung 3.1.12 (Historische Bemerkung 1: Das Tangentenproblem).

Die grundlegende Problemstellung der Differentialrechnung bildete sich im 17. Jahrhundert unter dem Namen *Tangentenproblem* heraus:

Finde die Tangente in einem Punkt an eine beliebige Kurve.

Dabei ist zunächst das Problem wie überhaupt die Tangente an eine beliebige Kurve zu definieren ist, d.h. wie man von einfachen Spezialfällen wie z.B. dem Kreis, siehe Abbildung 3.7 zu einer guten Verallgemeinerung gelangen soll/kann.

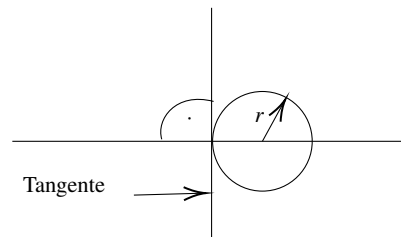


Abb. 3.7 Die Tangente an einen Kreis schneidet den Radiusstrahl im rechten Winkel.

Ein naheliegender Ansatz ist es, jene Gerade als Tangente zu *definieren*, die die Kurve im Punkt des Interesses berührt (bzw. schneidet) und deren Anstieg durch „nahe“ Sekantensteigungen angenähert wird — also genau die Idee (3.1) aus 3.1.2(iii). In der Terminologie von 3.1.9 bedeutet dies also die *Tangente als Schmiegegerade* zu *definieren*.

Glücklicherweise, liefert dieser Ansatz auch gleich eine Möglichkeit, den Tangentenanstieg konkret zu berechnen, wie wir es ja bisher schon getan haben. Aller-

dings, das was wir in Definition 3.1.7(i) locker mit dem Grenzwertbegriff erledigt haben, stellte Mathematiker*innen im 17. Jahrhundert vor gewaltige technische Probleme.

Nach früheren Ansätzen von P. Fermat (~ 1600 –1665) und R. Descartes (1596–1650) gelang es Ende des 17. Jh. unabhängig voneinander Gottfried Wilhelm *Leibniz* (1646–1716) und Isaac *Newton* (1643–1727) funktionierende Kalküle zu entwickeln.

Für Leibniz war dabei die Tangentensteigung die Steigung der Hypothenuse in einem „unendlich kleinen“ Dreieck, das sich im Grenzfall aus den Sekantendreiecken ergibt, siehe Abbildung 3.8. Tatsächlich rechneten die MathematikerInnen bis weit ins 19. Jahrhundert mit solchen, schwer fassbaren „unendlich kleinen Größen“, ehe der moderne Grenzwertbegriff geprägt wurde. Aus dieser Anfangszeit der Differentialrechnung hat bis heute eine Schreibweise überlebt. Bezeichnen wir eine Funktion mit y (wie früher oft üblich), etwa $y = x^3 + 2x^2 + 7$, dann schreibt man für die Ableitung statt y' auch manchmal

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x.$$

Leibniz hat sich dabei $\frac{dy}{dx}$ wohl wirklich als den Quotienten aus Gegenkathete (dy) und Ankathete (dx) vorgestellt, wobei dx und dy „unendlich klein“ sind.

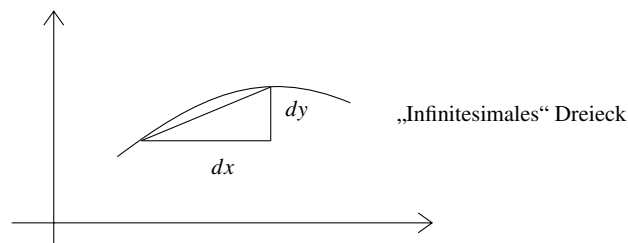


Abb. 3.8 Tangentensteigung mittels „unendlich kleiner“ Dreiecke.

Der moderne Grenzwertbegriff erspart es uns mit diesen, eine gewisse „richtige“ Anschauung voraussetzenden „unendlich kleinen Größen“ hantieren zu müssen. Es gibt aber auch einen um die Mitte des 20. Jh. von A. Robinson (1918–1974) u.a. entwickelten Zugang zur Analysis, der einen rigorosen Umgang mit „unendlich kleinen“ (und „unendlich großen“) Größen ermöglicht. Dieses mathematische Teilgebiet heißt *Nichtstandard-Analysis*.

Bemerkung 3.1.13 (Historische Bemerkung 2: Newtonsche Mechanik).

Isaac Newton ging einen etwas anderen Weg als Leibniz. In seinem Hauptwerk, der „Principia Mathematica“⁵ hat er gezeigt, dass wesentliche Probleme in der Natur

⁵ Mit vollem Titel eigentlich *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, eines der einflussreichsten Bücher überhaupt!

erfolgreich durch mathematische Modelle beschrieben werden können. Dazu entwickelte er seine Differential- und Integralrechnung, wobei er vom Problem der *Momentangeschwindigkeit* ausging, das wir im Folgenden vereinfacht beschreiben.

Ein Massenpunkt P bewegt sich auf der Zahlengeraden. Seinen Ort zum Zeitpunkt t beschreiben wir mit der Funktion $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto s(t)$. Unsere Anschauung drängt uns dazu, zu glauben, dass P zu jedem Zeitpunkt eine Momentangeschwindigkeit hat. Einfach zu bestimmen sind aber nur *Durchschnittsgeschwindigkeiten* (auch: mittlere Geschwindigkeiten), etwa zwischen den Zeitpunkten t_0 und t , also

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

In völliger Analogie zum Tangentenanstieg können wir die Momentangeschwindigkeit $v(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 als den Grenzwert dieser Durchschnittsgeschwindigkeiten definieren — falls dieser existiert, d.h. dass die Durchschnittsgeschwindigkeiten genügend „stabil“ sind, falls t „in der Nähe“ von t_0 variiert. Also

$$v(t_0) := \lim_{t_0 \neq t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \quad (\text{falls existiert u. endlich}).$$

Zum Beispiel gilt für den *freien Fall* $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ und daher

$$v(t) = \left(\frac{1}{2}gt^2 \right)' \stackrel{3.1.10(ii)}{=} gt.$$

Erdbeschleunigung
 $g \approx 9.81 \text{ms}^{-2}$

Wie auch schon aus der Notation ersichtlich, ist die Momentangeschwindigkeit v selbst eine Funktion der Zeit t ; also $t \mapsto v(t)$. Die *mittlere Beschleunigung* von P zwischen t_0 und t ist definiert als der Differenzenquotient

$$\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

und ganz ähnlich zur Momentangeschwindigkeit definieren wir die *Momentanbeschleunigung* zum Zeitpunkt t_0 als

$$b(t_0) := \lim_{t_0 \neq t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \quad (\text{falls existiert u. endlich}).$$

Für den freien Fall ergibt sich also

$$b(t) = v'(t) = (gt)' = g,$$

was auch den Namen der Konstanten g erklärt.

Erst diese präzisen Definitionen von Momentangeschwindigkeit und Momentanbeschleunigung ermöglichen einen *analytischen Zugriff* auf Newtons Kraftgesetz (auch 2. Newtonsches Axiom)

$$\boxed{\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung},}$$

nämlich

$$\boxed{F(t) = m \cdot b(t) = m \cdot v'(t) = m \cdot s''(t).}$$

Diese Gleichung ist Ausgangs- und Angelpunkt der *klassischen Mechanik* (auch Newtonsche Mechanik) eines großen Teilgebiets der Physik, das sich wesentlich mit der in große abstrakte Höhen getriebenen Lösungstheorie genau dieser *Bewegungsgleichungen* beschäftigt.

Bemerkung 3.1.14 (Differenzierbarkeit vs Stetigkeit).

Bsp. 3.1.10(vi) zeigt, dass die Stetigkeit einer Funktion f im Punkt ξ *nicht* die Differenzierbarkeit von f in ξ impliziert. Die Umkehrung ist aber richtig, wie das nächste Theorem zeigt. Insgesamt gilt also für $f : I \rightarrow \mathbb{R}, \xi \in I$

$$\boxed{f \text{ differenzierbar in } \xi \begin{array}{l} \implies \\ \not\Leftarrow \end{array} f \text{ stetig in } \xi.}$$

Theorem 3.1.15 (Differenzierbar \Rightarrow stetig).

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls f differenzierbar in $\xi \in I$ ist, dann ist f auch stetig in ξ .

Beweis. (Eigentlich ganz einfach, aber mit Trick!)

Sei $I \ni x \neq \xi$, dann gilt laut Voraussetzung

$$\text{Trick} \rightarrow f(x) - f(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} (x - \xi) \xrightarrow{x \rightarrow \xi} f'(\xi) \cdot 0 = 0,$$

also $f(x) \rightarrow f(\xi)$ und mit 2.1.27 folgt, dass f stetig in ξ ist. \square

Motivation 3.1.16 (Weiteres Vorgehen: „Baukastensystem“).

Ein wichtiger Aspekt beim Studium neuer Begriffe — hier Differenzierbarkeit — ist es immer, möglichst viele (Klassen von) Beispiele(n) und Nicht-Beispiele(n) zu finden.

Um dabei nicht immer (mühsam!) auf die Definition zurückgreifen zu müssen, werden wir hier wie in Abschnitt 2.1 im Falle der Stetigkeit ein „Baukastensystem“ etablieren (vgl. 2.1.16) und uns darum kümmern, ob die Grundoperationen für Funktionen aus 1.1.3 die Differenzierbarkeit erhalten. Ganz mühelos werden wir dabei die aus der Schulmathematik bekannten Differentiationsregeln (wieder-)entdecken.

Proposition 3.1.17 (Grundops & Diffbarkeit — Differentiationsregeln).

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\xi \in I$ und $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in ξ . Dann gilt:

- (i) (Linearkombinationen) Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda f + \mu g$ differenzierbar in ξ und es gilt

$$(\lambda f + \mu g)'(\xi) = \lambda f'(\xi) + \mu g'(\xi).$$

(ii) (Leibniz- oder Produktregel) $f \cdot g$ ist differenzierbar in ξ und es gilt

$$(f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi).$$

(iii) (Quotientenregel) Falls $g(\xi) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in ξ und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g(\xi)^2}.$$

Beweis. („Baukastensystem“ wie bei der Setigkeit.)

(i) folgt sofort aus den Grenzwertsätzen 1.2.24.

(ii) Sei $0 \neq h$ mit $\xi + h \in I$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \frac{f(\xi+h)g(\xi+h) - f(\xi)g(\xi)}{h} \\ \text{Trick} \rightarrow &= \frac{1}{h} \left(f(\xi+h)(g(\xi+h) - g(\xi)) + (f(\xi+h) - f(\xi))g(\xi) \right) \\ &= f(\xi+h) \frac{g(\xi+h) - g(\xi)}{h} + \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} g(\xi) \\ & \xrightarrow[1.2.24]{0 \neq h \rightarrow 0} f(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g(\xi). \quad \leftarrow \text{f stetig in } \xi \text{ nach 3.1.15} \end{aligned}$$

(iii) Sei zunächst $f(x) = 1$ auf I . Für $0 \neq h$ mit $\xi + h \in I$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{g(\xi+h)} - \frac{1}{g(\xi)} \right) &= \frac{g(\xi) - g(\xi+h)}{hg(\xi)g(\xi+h)} \\ &= \frac{1}{\underbrace{g(\xi)g(\xi+h)}_{\rightarrow g(\xi)^2 \text{ wg. 3.1.15}}} \underbrace{\frac{g(\xi) - g(\xi+h)}{h}}_{\rightarrow -g'(\xi)} \xrightarrow[1.2.22]{1.2.25} \frac{g'(\xi)}{g(\xi)^2}, \end{aligned}$$

also

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(\xi) = \frac{-g'(\xi)}{g^2(\xi)}. \quad (3.5)$$

auch
unabhängig
wichtige Formel

Der allgemeine Fall folgt nun aus (ii), genauer:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(\xi) \stackrel{(ii)}{=} f'(\xi) \frac{1}{g}(\xi) + f(\xi) \left(\frac{1}{g}\right)'(\xi) \\ &\stackrel{(3.5)}{=} f'(\xi) \frac{1}{g}(\xi) - f(\xi) \frac{g'(\xi)}{g^2(\xi)} = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}. \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 3.1.18 (Weitere differenzierbare Funktionen).

Ganz im Sinne von 3.1.16 wenden wir nun 3.1.17 an und halten reiche Ernte!

(i) (Einfache rationale Funktionen)

Sei $\mathbb{N} \ni n \geq 1$ und sei $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^n}$, dann gilt wegen 3.1.17(iii) (bzw. (3.5) im Beweis davon — ist ja nur ein Spezialfall!) unter Beachtung von $\frac{1}{x^n} \neq 0$ für $x \neq 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^n}\right)' \stackrel{3.1.10(ii)}{=} \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}},$$

d.h.

$$\boxed{(x^{-n})' = -nx^{-n-1}.}$$

(ii) $\tan: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} (\tan(x))' &\stackrel{2.3.23(i)}{=} \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \stackrel{3.1.17(iii)}{=} \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &\stackrel{3.1.10(v)}{=} \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x). \end{aligned}$$

(iii) Polynome und rationale Funktionen sind überall differenzierbar.

Motivation 3.1.19 (Differentiation als lineare Approximation).

Bevor wir unser Baukastensystem aus 3.1.17 (vgl. 3.1.16) erweitern (können), werfen wir noch einen weiteren Blick auf den Begriff der Differentiation und zwar vom Gesichtspunkt der

Ableitung als lineare Approximation an die ursprüngliche Funktion,

den wir schon in 3.1.2(iii) angedeutet haben. *Achtung*, obwohl er in der Schulmathematik (scheinbar) eine untergeordnete Rolle spielt, ist er der in der Mathematik insgesamt bestimmende Aspekt des Begriffs der Differenzierbarkeit!

Er ermöglicht — im Gegensatz zum Zugang mittels Differenzenquotient — weitreichende Verallgemeinerungen (z.B. Differentiation von Funktionen, die auf $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$, ja sogar auf unendlich-dimensionalen Räumen definiert sind) und ist sozusagen *der Kern* der Sache. Wir beginnen mit einer einfachen Umformulierung von Bekanntem.

Bemerkung 3.1.20 (Differentialquotient vs. lineare Approximation).

- (i) Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(\xi) =: a \in \mathbb{R}$. Dann gilt nach Definition 3.1.7(i)

$$0 = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} - a = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi) - ah}{h}. \quad (3.6)$$

Das kann man nun aber auch so interpretieren: Die lineare Funktion $h \mapsto a \cdot h$ ist (im Sinne von (3.6)) eine Approximation der Funktion $h \mapsto f(\xi + h) - f(\xi)$; mehr dazu in 3.1.22 unten.

- (ii) Nehmen wir umgekehrt an, dass es ein $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft (3.6) gibt, d.h. ein a mit der Eigenschaft

$$\lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi) - ah}{h} = 0,$$

dann gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(\xi + h) - f(\xi)) = a$ und somit ist f in ξ differenzierbar mit $f'(\xi) = a$.

- (iii) Insgesamt haben wir also gezeigt:

$$f \text{ differenzierbar in } \xi \iff \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi) - ah}{h} = 0$$

und in diesem Fall ist $f'(\xi) = a$.

Eine auch praktisch besser verwendbare Weiterführung dieser Idee halten wir als Theorem fest.

Theorem 3.1.21 (Differenzierbarkeit mittels linearer Approximation).

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf einem Intervall I und sei $\xi \in I$.

Dann ist f genau dann in ξ differenzierbar, wenn es eine Konstante a und eine (auf einer Umgebung von 0 definierte) Funktion r gibt, sodass

$$f(\xi + h) - f(\xi) = a \cdot h + r(h) \quad \text{und} \quad \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \quad (3.7)$$

gilt. In diesem Fall ist $f'(\xi) = a$.

Beweis. (Im wesentlichen nur eine Umschreibung von 3.1.20)

\Rightarrow : Setze $a := f'(\xi)$ und $r(h) := f(\xi + h) - f(\xi) - f'(\xi)h$. Für $0 \neq h$ mit $\xi + h \in I$ gilt dann

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} - f'(\xi) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(\xi) - f'(\xi) = 0.$$

\Leftarrow : Sei wieder $0 \neq h$ mit $\xi + h \in I$. Laut Voraussetzung gilt

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = a + \frac{r(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} a + 0,$$

also ist f differenzierbar in ξ mit $f'(\xi) = a$. \square

Bemerkung 3.1.22 (Zur Bedeutung von Theorem 3.1.21).

- (i) Um die Bedeutung von 3.1.21 besser zu verstehen, definieren wir das *Inkrement* der Funktion f bei ξ als

$$\varphi(h) := f(\xi + h) - f(\xi).$$

Zunahme von f
zwischen ξ und $\xi + h$

Also besagt 3.1.21, dass das Inkrement bis auf einen „Fehler“ $r(h)$ proportional zur Zunahme der unabhängigen Variablen h ist, wobei der Proportionalitätsfaktor genau $f'(\xi)$ ist,

$$\varphi(h) = f(\xi + h) - f(\xi) = f'(\xi) \cdot h + r(h).$$

Oder noch anders formuliert: Die Inkrementfunktion $h \mapsto \varphi(h)$ wird bis auf den „Fehler“ $r(h)$ durch die lineare Funktion $h \mapsto f'(\xi) \cdot h$ approximiert.

- (ii) Geometrisch bedeutet das nichts anderes als (vgl. 3.1.2(iii)), dass die Tangente an f im Punkt ξ definiert als

$$g(x) := f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$$

im präzisen Sinne von 3.1.21 für x nahe ξ (d.h. für kleine h) eine gute Approximation ist, siehe Abbildung 3.9. Denn 3.1.21 sagt ja

$$f(\xi + h) = f(\xi) + f'(\xi)h + r(h) = g(x) + r(h).$$

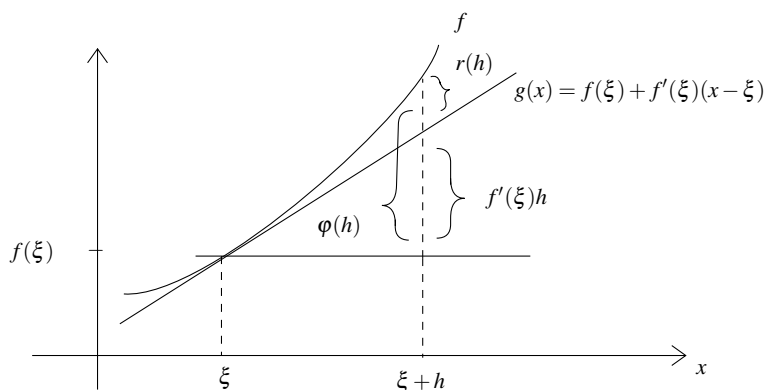


Abb. 3.9 Die Tangente als lineare Bestapproximation

- (iii) Besondere Beachtung verdient hier das Verhalten des „Fehlers“ r^6 . Dieser erfüllt nicht nur $r(h) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$), sondern sogar

⁶ Die Bezeichnung r steht für Rest.

$$\boxed{\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).}$$

Diese Bedingung besagt insbesondere, dass $r(h)$ für $h \rightarrow 0$ schneller gegen 0 geht als h selbst. Oft schreibt man dafür auch $r(h) = o(h)$.

(iv) Damit sieht man auch besonders schön, dass (oder sogar worin)

„klein oh“ von h

Differenzierbarkeit stärker ist als Stetigkeit, vgl. 3.1.14. Es gilt ja, vgl. 2.1.27

$$f \text{ stetig in } \xi \iff f(\xi + h) - f(\xi) \rightarrow 0.$$

nur das und nicht mehr

Wählen wir also irgendein $a \in \mathbb{R}$ und schreiben

$$f(\xi + h) - f(\xi) = a \cdot h + r(h) \quad (\text{d.h. } r(h) := f(\xi + h) - f(\xi) - ah)$$

dann gilt

$$f \text{ stetig in } \xi \iff r(h) \rightarrow 0$$

und es ist keine Rede von $\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$ oder davon, dass a eindeutig bestimmt ist — was ja aus dem Zusatz in 3.1.21 folgt.

Beispiel 3.1.23 (Der Sinus bei 0).

Wir veranschaulichen die Situation von 3.1.21 am Beispiel der Sinusfunktion $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wegen Bsp. 3.1.10(v) gilt

$$\sin'(x) = \cos(x) \implies \sin'(0) = \cos(0) \stackrel{2.3.20(ii)}{=} 1 \quad (3.8)$$

und daher ergibt sich mit Thm. 3.1.21 für $\xi = 0$

$$\begin{aligned} \sin(h) &= \sin(0 + h) = \sin(0) + \sin'(0) \cdot h + r(h) \\ &\stackrel{2.3.20(ii)}{=} 0 + h + r(h) = h + r(h) \end{aligned} \quad (3.8)$$

mit $r(h) = \sin(h) - h = o(h)$. (Die Tatsache, dass $r(h)/h \rightarrow 0$, folgt alternativ auch aus 2.3.15(vii), $\sin(h)/h \rightarrow 1$ ($h \rightarrow 0$).) Anschaulich bedeutet das, dass \sin nahe 0 wie die Identität aussieht — und zwar bis auf einen Fehler $r(h)$, der schneller gegen 0 geht als h selbst, siehe Abbildung 3.10.

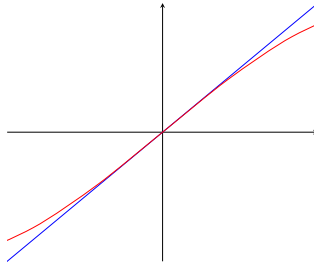


Abb. 3.10 Der Sinus bei 0

Motivation 3.1.24 (Zurück zum „Baukasten“).

Jetzt kehren wir (endlich) wieder zu unserem „Baukastensystem“ zurück und erweitern es. Proposition 3.1.17 hat ja schon einiges gebracht, aber zum ganzen Glück fehlt uns noch die Verträglichkeit der Differentiation mit der Verknüpfung (vgl. auch 2.1.17(ii) im Fall der Stetigkeit). Sie wird uns auch die Türe zur Differentiation von Umkehrfunktionen öffnen.

Kurz gesagt, wir marschieren in Richtung Kettenregel und Inversenregel — dabei können wir die Restschreibweise aus 3.1.21 gleich gut gebrauchen. (Wir müssten sie aber nicht verwenden, vgl. z.B. den Beweis in [5, §15, Satz 4]).

sonst Verknüpfung nicht def., vgl. 2.1.3(iii)

Theorem 3.1.25 (Kettenregel).

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und seien $f: I \rightarrow \mathbb{R}, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit $f(I) \subseteq J$. Ist f differenzierbar in $\xi \in I$ und ist g differenzierbar in $\eta := f(\xi) \in J$, dann ist die Verknüpfung $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in ξ und es gilt

$$(g \circ f)'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi).$$

Bemerkung 3.1.26 (Zur Kettenregel).

- (i) (Schreibweise) In der Leibnitz’schen Schreibweise (vgl. 3.1.12) hat die Kettenregel die folgende suggestive Form

$$\frac{dg}{d\xi} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{d\xi}.$$

Wobei hier g mittels Verknüpfung mit f als Funktion von ξ zu verstehen ist, also $g(\xi) := g \circ f(\xi)$.

- (ii) (Beweisidee für 3.1.25) Folgende (einfache und brutale) Beweisstrategie/Rechnung ist naheliegend: Sei $\xi \neq x \in I$, dann gilt

$$\frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{x - \xi} = \frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{f(x) - f(\xi)} \cdot \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \rightarrow g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi).$$

Dieser Ausdruck muss ja berechnet werden

Trick!

Das Problem dabei ist aber, dass $f(x) - f(\xi) = 0$ gelten könnte. Somit ist der Trick zwar nett, funktioniert aber nicht unmittelbar! Er kann repariert werden, siehe z.B. [5, §15, Satz 4] oder man kann — wie wir es gleich tun werden — das Problem mittels der Rest-Schreibweise aus 3.1.21 umgehen.

Beweis von Theorem 3.1.25. (Wiederholtes Anwenden von 3.1.21 und die Rechnung konsequent bis zum Schluss durchstehen.)

Zunächst verwenden wir 3.1.21 um die Voraussetzung umzuschreiben. Seien h und k so, dass $\xi + h \in I$ und $\eta + k \in J$ gilt. Weil f differenzierbar in ξ ist, gilt

$$f(\xi + h) - f(\xi) = f'(\xi)h + r_1(h) \quad \text{mit} \quad \rho_1(h) := \frac{r_1(h)}{h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \quad (3.9)$$

und weil g differenzierbar in η ist, gilt analog

$$g(\eta + k) - g(\eta) = g'(\eta)k + r_2(k) \quad \text{mit} \quad \rho_2(k) := \frac{r_2(k)}{k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow 0). \quad (3.10)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\xi + h) - (g \circ f)(\xi) &= g(f(\xi + h)) - g(f(\xi)) \\ &\stackrel{(3.10)}{=} g'(\eta)(f(\xi + h) - f(\xi)) + r_2(f(\xi + h) - f(\xi)) \\ &\stackrel{(3.9)}{=} g'(\eta)(f'(\xi)h + r_1(h)) + r_2(f'(\xi)h + r_1(h)) \\ &=: g'(\eta)f'(\xi)h + r(h), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$\eta = f(\xi)$ und $k = f(\xi + h) - f(\xi)$

Diesen Ausdruck müssen wir anschauen, vgl. 3.1.21

wobei für den „Restterm“ gilt

$$\begin{aligned} r(h) &= g'(\eta)r_1(h) + r_2(f'(\xi)h + r_1(h)) \\ &\stackrel{(3.9)}{=} g'(\eta)\rho_1(h)h + \rho_2(f'(\xi)h + r_1(h))(f'(\xi)h + r_1(h)). \end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$\frac{r(h)}{h} = g'(f(\xi)) \underbrace{\rho_1(h)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\rho_2(f'(\xi)h + r_1(h))}_{\rightarrow 0} \underbrace{(f'(\xi)h + r_1(h))}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

und mit (der Rückrichtung von) 3.1.21 folgt, dass $g \circ f$ differenzierbar in ξ ist mit

$$(g \circ f)'(\xi) \stackrel{(3.11)}{=} g'(f(\xi))f'(\xi). \quad \square$$

Bemerkung 3.1.27 (Ableitung der Umkehrfunktion).

Sei $f: I \rightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ eine reelle, bijektive Funktion auf einem Intervall. Angenommen,

f ist differenzierbar in $\xi \in I$ und die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \rightarrow I$ (existiert, weil f bijektiv) ist differenzierbar in $\eta := f(\xi)$. Wir können daher die Kettenregel in ξ anwenden auf

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_I, \quad (3.12)$$

wobei id_I die Identität auf I ist, vgl. [7, 4.3.30]. Das ergibt

$$(f^{-1} \circ f)'(\xi) \stackrel{3.1.25}{=} (f^{-1})'(f(\xi)) \cdot f'(\xi) \stackrel{(3.12)}{=} \text{id}'(\xi) \stackrel{3.1.10(ii)}{=} 1. \quad (3.13)$$

Insbesondere gilt also $f'(\xi) \neq 0$ und wir können (3.13) mit $\xi = f^{-1}(\eta)$ umschreiben zu

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}. \quad (3.14)$$

Bemerke, dass diese Überlegungen den entscheidenden Nachteil haben, dass wir die Differenzierbarkeit von f^{-1} in η *voraussetzen* mussten. Wie wir diesen „Schönheitsfehler“ vermeiden und die Differenzierbarkeit von f^{-1} aus der von f folgern können, diskutieren wir als nächstes. Zuvor erinnern wir noch an den Umkehrsatz 2.2.19 für stetige Funktionen.

Erinnerung und Motivation 3.1.28 (Umkehrfunktion).

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow f(I) =: J$ stetig und streng monoton. Dann besagt Theorem 2.2.19, dass J ein Intervall, f bijektiv und $f^{-1} : J \rightarrow I$ stetig und streng monoton ist.

Wir werden nun zeigen, dass dann aus der Differenzierbarkeit von f in $\xi \in I$ unter der Bedingung $f'(\xi) \neq 0$ schon die Differenzierbarkeit von f^{-1} in $\eta := f(\xi)$ folgt. Wegen 3.1.27 ist diese Bedingung auch *notwendig*: Denn falls Differenzierbarkeit von f^{-1} in $\eta = f(\xi)$ gegeben ist, gilt die Formel (3.14), also muss $f'(f^{-1}(\eta)) = f'(\xi) \neq 0$ gelten!

Theorem 3.1.29 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion).

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und stetig auf dem Intervall I . Ist f differenzierbar in ξ mit $f'(\xi) \neq 0$, dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : J := f(I) \rightarrow I$ differenzierbar in $\eta := f(\xi)$ und es gilt

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}.$$

Beweis. (Geschickte Kombination der Differenzierbarkeitsvoraussetzung an f mit der Stetigkeit der Inversen)

Sei $(\eta_n)_n$ eine Folge in $J \setminus \{\eta\}$ mit $\eta_n \rightarrow \eta$. Da f bijektiv ist (vgl. 2.2.19(ii)), ist $(\xi_n) := (f^{-1}(\eta_n))$ eine Folge in $I \setminus \{\xi\}$ und aufgrund der Stetigkeit von f^{-1} (vgl. 2.2.19(iii)) gilt $\xi_n \rightarrow \xi$. Daher

$$\frac{f^{-1}(\eta_n) - f^{-1}(\eta)}{\eta_n - \eta} = \frac{\xi_n - \xi}{f(\xi_n) - f(\xi)} \xrightarrow{\quad} \frac{1}{f'(\xi)} \quad (n \rightarrow \infty).$$

f diffbar in ξ mit $f'(\xi) \neq 0$ & 1.2.25

also ist f^{-1} differenzierbar in η (vgl. 3.1.7(i), 3.1.5) mit Ableitung

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}. \quad \square$$

Beispiel 3.1.30 (Ableitung des Logarithmus und eine berühmte Formel).

(i) Die Logarithmusfunktion ist differenzierbar auf $(0, \infty)$ (also auf ihrem gesamten Definitionsbereich) und es gilt

$$\log'(x) = \frac{1}{x}.$$

Tatsächlich ist $\log = \exp^{-1}$ (per definitionem, siehe 2.3.1(ii)) und \exp ist differenzierbar auf ganz \mathbb{R} nach 3.1.10(iv) mit $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$ wegen 1.4.41(i). Also können wir 3.1.29 anwenden und erhalten

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

(ii) Mittels (i) können wir die berühmte Formel

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

herleiten, die oft auch als Definition der Eulerschen Zahl verwendet wird⁷. Es gilt

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{(i)}{=} \log'(1) \stackrel{3.1.7(i)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \log(1)}{\frac{1}{n}} \\ &\stackrel{\log(1) = 0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \stackrel{2.3.2}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \\ &\stackrel{\substack{\log \text{ stetig} \\ 2.3.20(ii)}}{=} \log\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right), \end{aligned}$$

und daher mittels \exp auf beiden Seiten der Gleichung angewandt

$$e = \exp(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Beispiel 3.1.31 (Weitere differenzierbare Funktionen).

(i) Die *allgemeine Potenzfunktion* $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in (0, \infty)$) ist differenzierbar und es gilt

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

⁷ Wir haben e ja als $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ definiert, vgl. 1.4.38.

und daher insbesondere

$$(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad \text{und}$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Tatsächlich können wir nämlich rechnen

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &\stackrel{2.3.4(i)}{=} (\exp(\alpha \log(x)))' \stackrel{3.1.25}{=} \exp'(\alpha \log x)(\alpha \log x)' \\ &\stackrel{3.1.10(iv)}{=} \exp(\alpha \log x) \alpha \log'(x) \stackrel{3.1.30(i)}{=} x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

(ii) (Affine Variablentransformation) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $g(x) := f(ax+b)$ differenzierbar mit

$$g'(x) \stackrel{3.1.25}{=} f'(ax+b)(ax+b)' = af'(ax+b).$$

(iii) Der Arcussinus (vgl. 2.3.26(ii)) $\arcsin = \sin^{-1}$ ist auf $(-1, 1)$ differenzierbar und es gilt

$$\arcsin'(x) \stackrel{3.1.29}{=} \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$
auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)}$

(iv) Der Arcustangens (vgl. 2.3.26(iii)) ist differenzierbar auf seinem ganzen Definitionsbereich \mathbb{R} und es gilt

$$\arctan'(x) \stackrel{3.1.29}{=} \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} \stackrel{3.1.18(ii)}{=} \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Bemerkung 3.1.32 (Höhere Ableitungen).

(i) (Notation und Definition) Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (auf ganz I) differenzierbar. Dann definieren wir die *Ableitungsfunktion* durch

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$$

und wir können uns die Frage nach Eigenschaften dieser Funktion f' stellen — insbesondere nach ihrer Differenzierbarkeit.

Ist die Ableitungsfunktion f' ihrerseits in $\xi \in I$ differenzierbar, so schreiben wir $f''(\xi)$ für die Ableitung von f' in ξ und nennen $f''(\xi)$ die *2. Ableitung* von f in ξ . Ist f' auf ganz I differenzierbar, so definieren wir die *2. Ableitungsfunktion* von f als

$$f'' : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f''(x).$$

Oft schreibt man auch $f^{(2)}$ für f'' . Induktiv definieren wir nun die n -te Ableitung von f in $\xi \in I$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ (sofern sie überhaupt existiert) durch

$$f^{(n)}(\xi) := (f^{(n-1)})'(\xi)$$

die n -te Ableitung
ist die Ableitung
der $(n-1)$ -ten Ableitung

und ebenso die n -te Ableitungsfunktion $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}$. In diesem Zusammenhang schreiben wir auch $f^{(0)}$ für f selbst.

(ii) (Ein Beispiel) Wir berechnen sukzessive die Ableitungen des Sinus:

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x), \\ \sin''(x) &= \cos'(x) = -\sin(x), \\ \sin'''(x) &= -\sin'(x) = -\cos(x), \\ \sin^{(4)}(x) &= -\cos'(x) = \sin(x), \\ \sin^{(5)}(x) &= \sin'(x) = \cos(x), \end{aligned}$$

usw., also gilt allgemein für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sin^{(2n)} = (-1)^n \sin \quad \text{und} \quad \sin^{(2n+1)} = (-1)^n \cos.$$

Somit ist \sin beliebig oft differenzierbar, d.h. n -mal differenzierbar für jedes $n \in \mathbb{N}$. Solche Funktionen nennt man auch *glatt* oder C^∞ -Funktionen.

Funktionen, die n -mal differenzierbar sind und deren n -te Ableitung stetig ist, nennt man auch n -mal stetig differenzierbar oder C^n -Funktionen. Genauer bezeichnet man mit $C^n(I)$ die Menge (eigentlich den Vektorraum) der auf dem Intervall I definierten und n -mal stetig differenzierbaren Funktionen. In diesem Zusammenhang schreiben wir auch $C^0(I)$ für die (den Vektorraum der) stetigen Funktionen auf I .

(iii) **Warnung 1.** ($C^n \not\Rightarrow C^{n+1}$)

Eine differenzierbare Funktion muss keine differenzierbare Ableitung haben, denn z.B. ist

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

zwar C^1 aber nicht zweimal differenzierbar in $\xi = 0$. (Details: UE)

(iv) **Warnung 2.** (differenzierbar $\not\Rightarrow C^1$)

Noch schlimmer, es muss die Ableitung einer differenzierbaren Funktion nicht einmal stetig sein, z.B. ist

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar aber nicht C^1 , denn f' ist nicht stetig in $\xi = 0$. (Details: UE)

3.2 Eigenschaften Differenzierbarer Funktionen

3.2.1 (Intro).

In diesem Abschnitt kommen wir zu ersten Anwendungen der Differentialrechnung. Wir werden sehen, dass sich viele Eigenschaften von Funktionen in ihrer Ableitung widerspiegeln (vgl. 3.1.1). Insbesondere werden wir die Monotonie, die Konvexität und das Auftreten lokaler Extrema mithilfe der Ableitung untersuchen. Außerdem werden wir aus Schranken an die Ableitung Schranken an die Funktion selbst gewinnen und die aus der Schulmathematik wohlbekannten Regeln von De L'Hospital beweisen.

Der Schlüssel zu all diesen Resultaten ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS), den wir ausführlich diskutieren.

Wir beginnen mit einer Sprechweise.

Terminologie 3.2.2 (Randpunkte und innere Punkte von Intervallen).

Sei I ein Intervall.

- (i) Falls I beschränkt ist, also von der Form (vgl. 0.1.7) $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ oder (a, b) , dann heißen a und b *Randpunkte* von I .
- (ii) Falls I halbbeschränkt ist, also von der Form $[a, \infty)$ oder (a, ∞) , bzw. $(-\infty, b]$ oder $(-\infty, b)$, dann heißt a (bzw. b) *Randpunkt* von I .
- (iii) $\xi \in I$ heißt *innerer Punkt* von I , falls ξ kein Randpunkt ist.
- (iv) Z.B. ist die Menge der inneren Punkte (das sog. *Innere*) von $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ und (a, b) jeweils (a, b) .

Insbesondere besteht jedes offene Intervall nur aus den inneren Punkten, ist also gleich seinem Inneren.

Definition 3.2.3 (lokale Extremwerte).

Sei I ein Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

- (i) Ein Punkt $\xi \in I$ heißt *lokales Maximum* von f , falls es eine Umgebung von ξ gibt auf der f nur Funktionswerte kleiner-gleich $f(\xi)$ annimmt, d.h. falls

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I: \quad f(\xi) \geq f(x). \quad (3.15)$$

- (ii) Der Punkt ξ heißt *striktes lokales Maximum* von f , falls in (3.15) „=" nur im Punkt $x = \xi$ gilt.
- (iii) Analog sind (*strikte*) *lokale Minimal*lokales Minimum definiert, d.h. ξ heißt (*striktes*) lokales Minimum, falls

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I: \quad f(\xi) \leq f(x) \quad (\text{und „=" nur im Punkt } x = \xi \text{ gilt}).$$

- (iv) In beiden Fällen spricht man von einer (*strikten*) *lokalen Extremstelle* oder einem (*strikten*) *lokalen Extremum*.

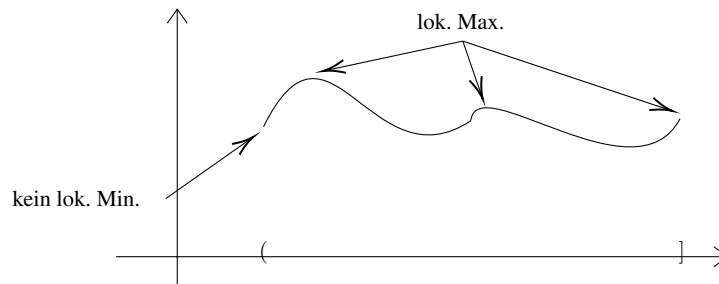


Abb. 3.11 Lokale Minima und Maxima

Bemerkung 3.2.4 (Extrema und Ableitung, die Idee). Den Inhalt von Definition 3.2.3 für *innere* Punkte ξ für ein striktes lokales Maximum können wir wie in Abbildung 3.12 veranschaulichen. Geometrisch erwarten wir uns, dass — falls f differenzierbar in ξ ist — f dort eine waagrechte Tangente hat, also $f'(\xi) = 0$ gilt. Tatsächlich ist das eine notwendige Bedingung, wie wir gleich sehen werden.

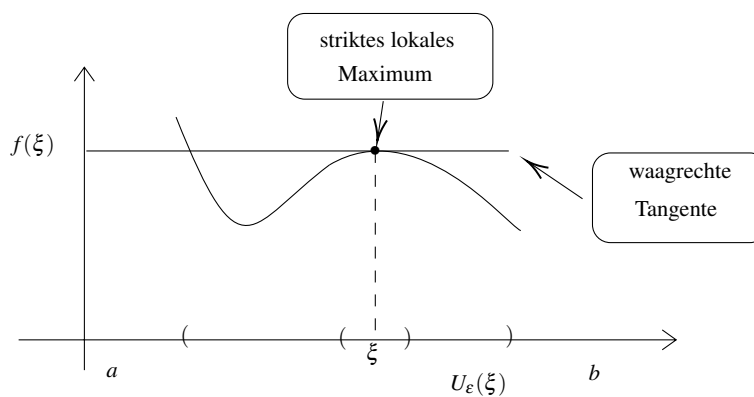


Abb. 3.12 Ein lokales Extremum einer differenzierbaren Funktion und ihre Tangente

Proposition 3.2.5 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema).

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und sei ξ ein innerer Punkt von I .

$$\boxed{\text{Falls } \xi \text{ lokales Extremum von } f \text{ ist, dann gilt } f'(\xi) = 0.}$$

Beweis. (Explizites Auswalzen der Idee aus 3.2.4) Wir behandeln nur den Fall des lokalen Maximums, der Fall des Minimums ist völlig analog.

Sei also ξ ein (nicht notwendigerweise striktes) lokales Maximum. Dann gilt nach Definition 3.2.3(i)

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(\xi) : f(\xi) \geq f(x).$$

Da f in ξ differenzierbar ist, ergibt sich für den Differentialquotienten

$$\lim_{x \nearrow \xi} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\substack{\geq 0, \text{ da} \\ \text{Zähler} \leq 0, \text{ Nenner} \leq 0}} = f'(\xi) = \lim_{x \searrow \xi} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\substack{\leq 0, \text{ da} \\ \text{Zähler} \leq 0, \text{ Nenner} \geq 0}},$$

also $0 \leq f'(\xi) \leq 0$ und damit $f'(\xi) = 0$. \square

Beispiel 3.2.6 (Extrema des Sinus).

Wir betrachten $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. In 2.3.22(ii) haben wir bereits festgestellt, dass die Extrema des Sinus in $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) liegen, siehe Abbildung 3.13, denn via $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ sind es genau die Nullstellen des Cosinus. Tatsächlich gilt auch

$$\sin' \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \stackrel{2.3.21(iv)}{=} 0.$$

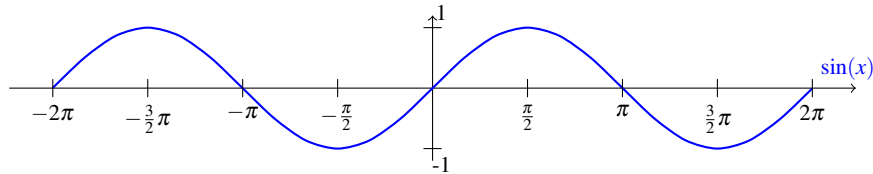


Abb. 3.13 Die Extrema des Sinus

Warnung 3.2.7 (Notwendig vs. hinreichend, lokal vs. global).

(i) Proposition 3.2.5 sagt, dass $f'(\xi) = 0$ eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum ist.

Sie ist aber *nicht hinreichend*⁸, wie das Beispiel

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$$

zeigt. Es gilt $f'(x) = 3x^2$ und daher $f'(0) = 0$. Aber $\xi = 0$ ist kein lokales Extremum, denn $f(0) = 0$ und jede Umgebung $U_\varepsilon(0)$ enthält positive und negative x und damit nimmt f auf $U_\varepsilon(0)$ positive und negative Werte an.

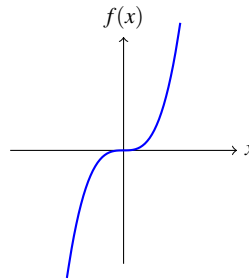


Abb. 3.14 $f(x) = x^3$ hat in 0 kein Extremum

⁸ Für die wichtige Terminologie „notwendig“ und „hinreichend“ siehe [7, p. 86, graue Box].

Daher gilt also

$$\boxed{\xi \text{ lokales Extremum} \begin{array}{l} \implies \\ \not\Leftarrow \end{array} f'(\xi) = 0.}$$

Daher sind Nullstellen von f' *nur Kandidaten* für lokale Extrema.

- (ii) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann besagt 2.2.12, dass f globale Maxima und Minima auf $[a, b]$ besitzt.

Diese können am Rand von $[a, b]$ liegen, also in a oder in b . Selbst falls f differenzierbar auf $[a, b]$ ist (mit einseitigen Ableitungen in a, b), müssen $f'(a)$ und $f'(b)$ *nicht* verschwinden, wie das

Beispiel

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x$$

zeigt. Tatsächlich hat f ein Minimum in $\xi = 0$ und ein Maximum in $\xi = 1$, aber $f'(0) = 1 = f'(1)$.

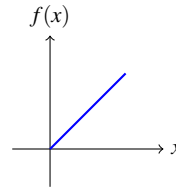


Abb. 3.15 $f(x) = x' = 1 \neq 0$

Beachte, dass dieses Beispiel *nicht* im Widerspruch zu 3.2.5 steht, da 0 und 1 *keine inneren* Punkte von $I = [0, 1]$ sind, also 3.2.5 über $f'(0)$ und $f'(1)$ keine Aussage macht.

Ebenso, wenn wir $f(x) = x$ auf $I = (0, 1)$ betrachten: dann hat f weder Minima noch Maxima (nur inf und sup) und 3.2.5 sagt auch in diesem Fall gar nichts aus.

Motivation 3.2.8 (lokale Änderungsrate - globale Eigenschaften - MWS).

- (i) Wir unternehmen jetzt den ersten Schritt, der es uns erlauben wird, aus der Kenntnis der Ableitung einer Funktion (in allen Punkten eines Intervalls) globale Eigenschaften der Funktion abzuleiten: den *Mittelwertsatz* (MWS).
- (ii) Dessen Aussage ist anschaulich evident: Im Intervall $[a, b]$ muss es einen Punkt geben, in dem die Tangente parallel zur Sekante ist, siehe Abbildung 3.16.

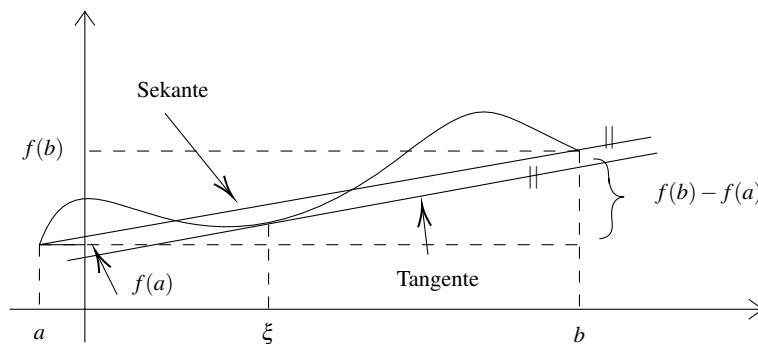


Abb. 3.16 Die Aussage des MWS

- (iii) Der Satz hat auch eine anschauliche Bedeutung im Rahmen der klassischen Mechanik (vgl. 3.1.13):

Ein Auto fährt auf einem Autobahnstück der Länge 135km und legt dieses in 1 Stunde zurück. Dann muss irgendwann die erlaubte Höchstgeschwindigkeit von 130km/h überschritten worden sein.

Hier entspricht die Ableitung der Ortsfunktion der Momentangeschwindigkeit und es muss einen Zeitpunkt geben, an dem diese gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit von 135km/h ist.

Nun zur Formulierung des MWS:

Theorem 3.2.9 (Mittelwertsatz).

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) . Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

oder (was dasselbe ist)

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).} \quad (3.16)$$

Bemerkung 3.2.10. (Beweisstrategie: „Kippen“ des Graphen)

- (i) Die grundlegende Beweisstrategie besteht darin, den Graphen von f zu modifizieren und so $f(a) = f(b)$ zu erreichen. Damit müssen wir nur einen Punkt mit $f'(\xi) = 0$ finden, was wir mittels 3.2.5 tun werden.

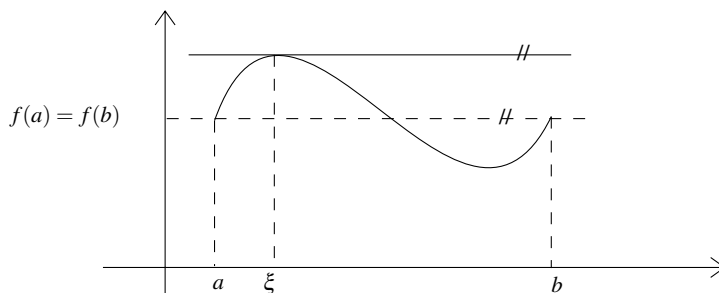


Abb. 3.17 Die Aussage des MWS nach Drehung des Graphen

- (ii) Die Idee ein solches ξ zu finden ist die folgende. Interpretieren wir f als die „Höhenfunktion“ bei einer Bergwanderung. Dann bedeutet $f(a) = f(b)$, dass wir uns am Abend auf derselben Seehöhe befinden wie in der Früh. Klarerweise können wir weder immer bergauf noch immer bergab gegangen sein. Vielmehr werden wir genau dort, wo wir vom Bergauf gehen zum Bergab gehen übergegangen sind — also jedenfalls am Gipfel, der einem lokalen Maximum entspricht — eine waagrechte Tangente gehabt haben.

Diese Idee gießen wir nun in wasserdichte Mathematik.

Lemma 3.2.11 (Satz von Rolle).

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) . Falls $f(a) = f(b)$, dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = 0.$$

Beweis. (Erfreulich kurz: Wir erzwingen die Existenz eines Extremums im Inneren und verwenden 3.2.5)

(1) Falls f konstant ist, also $f(x) = f(a) = f(b)$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, ist die Aussage trivial ($f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$ nach 3.1.10(i)).

Sei also f nicht konstant, dann gibt es ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) > f(a)$ oder $f(x) < f(a)$. O.B.d.A. können wir also annehmen, dass

$$\exists x \in (a, b) : \quad \text{mit } f(x) > f(a) = f(b) \quad (3.17)$$

(sonst können wir analog vorgehen).

(2) Da f stetig auf $[a, b]$ ist, hat f wegen 2.2.12 ein Maximum in $[a, b]$, d.h.

$$\exists \xi \in [a, b] \text{ mit } f(\xi) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]. \quad (3.18)$$

(3) Wegen (3.17) kann ξ nicht am Rand liegen, also ist ξ ein innerer Punkt, $\xi \in (a, b)$ und wir können 3.2.5 verwenden. Mit (3.18) folgt daher $f'(\xi) = 0$. \square

Bemerkung 3.2.12 (Zum Satz von Rolle und seinem Beweis).

(i) Beachte, dass der Beweis und auch der Satz wesentlich auf Theorem 2.2.12 beruhen, also darauf, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen Minima und Maxima besitzen — und somit letztlich wiederum auf der Vollständigkeit von \mathbb{R} !

(ii) Die Voraussetzungen, also dass f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf dem Inneren (a, b) von $[a, b]$ sei, sind natürlich teilweise redundant: Aus der Differenzierbarkeit von f in (a, b) folgt natürlich die Stetigkeit von f in (a, b) , vgl. 3.1.15.

Natürlich hätten wir auch f differenzierbar auf $[a, b]$ voraussetzen können. Da diese Voraussetzung stärker ist, würde das Lemma schwächer werden, z.B. wäre die Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ auf $[-1, 1]$ nicht erfasst,

nicht diffbar in ± 1 , vgl. UE

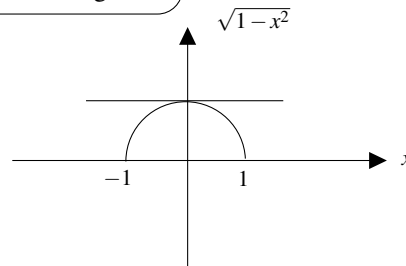


Abb. 3.18 Graph der Funktion $\sqrt{1-x^2}$

- (iii) Beachte, dass alle Voraussetzungen im Lemma tatsächlich notwendig sind (Details: UE).
- (iv) Wir beweisen jetzt den MWS, indem wir den Graphen der Funktion im MWS in „Rolle-Position“ bringen.

3.2.13. Beweis des MWS. (Kippen des Graphen in „Rolle-Position“ erledigt alles.) Sei f wie im Theorem. Wir definieren

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a). \quad (3.19)$$

Dann ist g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) . Außerdem gilt $g(a) = f(a) = g(b)$. Daher liefert der Satz von Rolle 3.2.11

$$\exists \xi \in (a, b) \quad \text{mit} \quad 0 = g'(\xi) \stackrel{(3.19)}{=} f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

Bemerkung 3.2.14 (Anwenden des MWS).

Der MWS ist ein *reines* Existenzresultat — in dem Sinn, dass die Existenz von ξ mit der entsprechenden Eigenschaft zwar garantiert ist, er aber keine Möglichkeit liefert, ξ auch tatsächlich konkret zu bestimmen. Das ist bei „Existenzmaschinen“ (fast) immer so, vgl. 2.2.7.

Daher wird der MWS meist in der Form (3.16) verwendet, um Abschätzungen herzuleiten. Das werden wir auch gleich tun und dabei erste Anwendungen der Differentialrechnung (vgl. 3.1.1) kennenlernen, die globale Aussagen über die Funktion ermöglichen, genauer über *Wachstumsschranken und Monotonie*.

Korollar 3.2.15 (Wachstumsschranken).

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) .

(i) Falls f' beschränkt ist, d.h. $\exists C \geq 0$ mit

$$|f'(x)| \leq C \quad \forall x \in (a, b),$$

dann gilt für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq C |x_2 - x_1|. \quad (3.20)$$

(ii) Falls $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f konstant, genauer: $f(x) = f(a) = f(b)$ für alle $x \in (a, b)$.

Bemerkung 3.2.16 (Lipschitz-Stetigkeit).

(i) Die Bedeutung von 3.2.15(i) können wir leicht veranschaulichen, siehe Abbildung 3.19

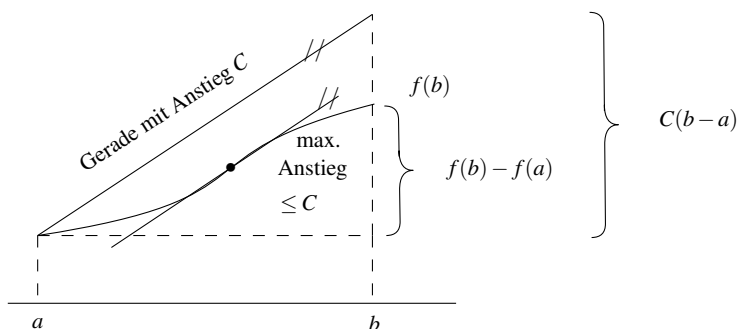


Abb. 3.19 Wachstumsschranken durch Gerade mit maximalem Anstieg.

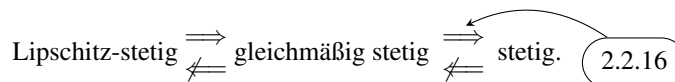
Eine Funktion f mit $|f'(x)| \leq C$ für alle x kann nicht stärker wachsen als eine Gerade mit Anstieg C , die in $(a, f(a))$ startet, genauer $f(x)$ muss kleiner sein als $f(a) + C(x - a)$, also insbesondere gilt $f(b) - f(a) \leq C(b - a)$.

(ii) Funktionen, die (3.20) erfüllen, heißen *Lipschitz-stetig* oder *dehnungsbeschränkt*, genauer: $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I ein Intervall) heißt Lipschitz-stetig, falls

$$\exists C > 0 : |f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad \forall x, y \in I.$$

Die Funktionswerte liegen also nicht weiter auseinander als die Argumente mal einer fixen Konstante C , genannt *Dehnungsschranke* oder *Lipschitz-Konstante*

(iii) Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig, ja sogar gleichmäßig stetig. Die jeweiligen Umkehrungen sind falsch, d.h. für $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt (jeweils auf I)



(iv) Wir können 3.2.15(i) nun auch so ausdrücken: Differenzierbare Funktionen mit beschränkter Ableitung sind nicht nur (gleichmäßig) stetig sondern sogar Lipschitz-stetig.

Beweis von 3.2.15. (Nur Buchhaltung und erfreulich einfach)

(i) Sei f wie in der Behauptung. Dann gilt wegen des Mittelwertsatzes: Für alle $x_1, x_2 \in [a, b] \exists \xi$ mit $x_1 \leq \xi \leq x_2$, sodass

$$|f(x_2) - f(x_1)| \stackrel{(3.16)}{=} |f'(\xi)| |x_2 - x_1| \leq C|x_2 - x_1|. \quad (3.21)$$

laut Voraussetzung

(ii) Laut Voraussetzung ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$ und damit gilt wegen (3.21) mit $C = 0$

$$f(x_2) = f(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]. \quad \square$$

Beispiel 3.2.17 (Der Sinus ist dehnungsbeschränkt).

Sei $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$. Dann gilt

$$f'(x) = \cos(x) \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{sogar } \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right])$$

und daher

$$|f'(x)| = |\cos(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Mit 3.2.15(i) ergibt sich also

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

siehe auch Abbildung 3.20.

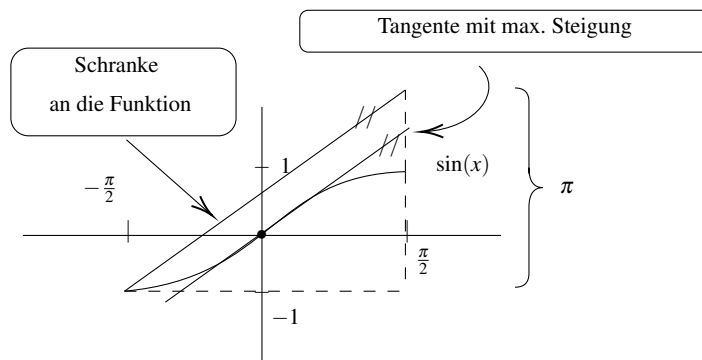


Abb. 3.20 Dehnungsschranke für den Sinus

Proposition 3.2.18 (Monotonie via Ableitung).

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) . Dann gilt:

- | | | | |
|------|---|------------|--|
| (i) | $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ | \iff | f ist monoton wachsend auf $[a, b]$ |
| (ii) | $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$ | \implies | f ist streng monoton wachsend auf $[a, b]$ |

(iii) Beide Punkte (i) und (ii) gelten analog für $f'(x) \leq 0$ bzw. $f'(x) < 0$ und (streng) monoton fallend.

Warnung 3.2.19.

Die Umkehrung von (ii) ist falsch, d.h.

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \not\implies f$ ist streng monoton wachsend auf $[a, b]$.
--

Tatsächlich kann die Ableitung streng monotoner Funktionen in einzelnen Punkten verschwinden, wie etwa für $f(x) = x^3$. Zwar ist f streng monoton wachsend, etwa auf $[-1, 1]$, aber $f'(0) = 0$, siehe Abbildung 3.21.

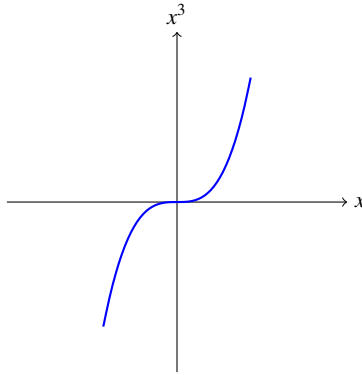


Abb. 3.21 $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend, obwohl $f'(0) = 0$ gilt!

Beweis von 3.2.18.

(i) \Rightarrow und (ii): (Eine geschickte Anwendung des MWS.)

Wir gehen indirekt vor und nehmen an, f sei nicht (streng) monoton wachsend, d.h.

$$\exists x_1 < x_2 \in [a, b] \text{ mit } f(x_1) > f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Der Mittelwertsatz ergibt nun

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) \text{ mit } f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Aber das bedeutet, dass $f'(\xi) < 0$ (bzw. $f'(\xi) \leq 0$), was ein Widerspruch ist.

(i) \Leftarrow : (Einfach die Definition der Ableitung verwenden und über die Vorzeichen Buchführen)

Da f monoton wachsend ist, gilt für alle $x, \xi \in (a, b)$ mit $x \neq \xi$, dass

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0, \quad \left(\begin{array}{l} \xi > x \Rightarrow \text{Zähler und Nenner} \geq 0 \\ \xi < x \Rightarrow \text{Zähler und Nenner} \leq 0 \end{array} \right)$$

somit $f'(\xi) \geq 0$ für alle $\xi \in (a, b)$. \square

Motivation 3.2.20 (Bedingungen für lokale Extrema).

Wir haben nun die Theorie soweit entwickelt, dass wir unser Wissen über das Auftreten lokaler Extrema mit Hilfe der Differentialrechnung entscheidend erweitern können. Sei dazu $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall definierte, differenzierbare Funktion. Wir haben schon in 3.2.5 gesehen, dass für das Auftreten eines lokalen Extremums in einem inneren Punkt ξ von I notwendigerweise die Ableitung $f'(\xi)$ verschwinden muss. Wir haben in 3.2.7 allerdings auch gesehen, dass diese Bedingung nicht hinreichend ist, also $f'(\xi) = 0$ nicht unbedingt dazu führen muss, dass tatsächlich ein lokale Extremum vorliegt — in diesem Fall ist ξ nur Kandidat für eine Extremstelle.

Mit unserer Beschreibung der Monotonie mittels Ableitungen in 3.2.18 können wir nun eine hinreichende Bedingung für Extrema angeben. Genauer können wir eine Zusatzbedingung angeben, die aus einer „Kandidatenstelle“ ξ mit $f'(\xi) = 0$ eine Extremstelle macht. Dazu müssen wir unsere Monotonieüberlegungen aus 3.2.18 anwenden und werden dabei eine aus der Schule altbekannte „Merkregel“ für „Kurvendiskussionen“ wiederentdecken!

Korollar 3.2.21 (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema).

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, sei $\xi \in (a, b)$ und sei f in ξ zweimal differenzierbar. Dann gilt

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(\xi) = 0 \quad \text{und} \\ f''(\xi) > 0 \quad (f''(\xi) < 0) \end{array} \implies f \text{ hat in } \xi \text{ ein striktes} \\ \text{lokales Minimum (Maximum).}$$

Beweis. (Wiederum Buchhaltung über die Vorzeichen des Differenzenquotienten, diesmal für f' .)

Sei ξ wie oben und $f'(\xi) = 0$, $f''(\xi) > 0$ (der Fall $f''(\xi) < 0$ ist völlig analog). Dann gilt nach Definition der 2. Ableitung

$$0 < f''(\xi) = \lim_{\xi \neq x \rightarrow \xi} \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x}.$$

Daher gibt es nach der Grenzwertdefinition 2.1.21 für Funktionen ein $\varepsilon > 0$ sodass

$$\text{für alle } x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon), x \neq \xi : 0 < \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} \stackrel{f'(\xi)=0}{=} - \frac{f'(x)}{\xi - x}.$$

Somit gilt für $x \neq \xi$ mit

$$x \in (\xi - \varepsilon, \xi) : f'(x) < 0 \stackrel{3.2.18(ii)}{\implies} f \text{ streng monoton fallend,}$$

$$x \in (\xi, \xi + \varepsilon) : f'(x) > 0 \stackrel{3.2.18(ii)}{\implies} f \text{ streng monoton wachsend.}$$

Daraus folgt, dass $f(x)$ für alle $x \in (\xi - \varepsilon, \xi)$ (also „knapp links“ von ξ) und auch für alle $x \in (\xi, \xi + \varepsilon)$ (also „knapp rechts“ von ξ) größer $f(\xi)$ ist. Damit ist ξ tatsächlich striktes lokales Minimum, vgl. 3.2.3. \square

Beispiel 3.2.22 (Nochmals Extrema des Sinus).

Wie in 3.2.6 wiederholt, wissen wir seit 2.3.22(ii), dass die Extrema des Sinus in $\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$ liegen. Wie in 3.2.6 nachgeprüft, gilt klarerweise die notwendige Bedingung für Extrema 3.2.5. Es sind aber auch die jeweiligen hinreichenden Bedingungen aus 3.2.21 erfüllt:

$$\sin' \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \stackrel{2.3.20(iv)}{=} 0,$$

$$\sin'' \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) = \begin{cases} +1, & k \text{ ungerade,} \\ -1, & k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Daher sind die Stellen $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) Minima und die Stellen $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) Maxima des Sinus, vgl. auch Abbildung 3.13.

Warnung 3.2.23 (Hinreichend nicht notwendig!).

Es ist wichtig zu betonen, dass die Bedingung 3.2.21 zwar hinreichend aber *nicht notwendig* ist. Das zeigt etwa das Beispiel

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^4.$$

Denn f hat ein striktes lokales Minimum in $\xi = 0$, weil $f(0) = 0$ und $f(x) = x^4 > 0$ für alle $x \neq 0$. Aber $f'(x) = (x^4)' = 4x^3$ und somit gilt $f'(0) = 0$.

Anschaulich gesprochen ist x^4 bei Null so flach, dass die 2. Ableitung „nicht sieht“, dass ein Minimum auftritt.

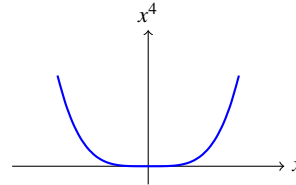


Abb. 3.22 $f(x) = x^4$ hat in $\xi = 0$ ein str. lok. Minimum, obwohl $f'(x) = 0$ gilt.

Motivation 3.2.24 (Konvexität).

Als nächsten Begriff, den wir mittels Differentialrechnung beschreiben können, befassen wir uns mit dem Krümmungsverhalten von Funktionen und mit dem Begriff *Konvexität*. Diesen werden wir über die 2. Ableitung „erkennen“ können.

- (i) Eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 wird konvex genannt, wenn mit je zwei Punkten schon die gesamte Verbindungsgerade in der Menge liegt, siehe Abbildung 3.23.

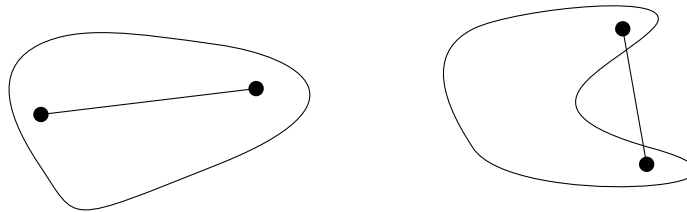


Abb. 3.23 Eine konvexe und eine nicht konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^2

- (ii) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ werden wir konvex nennen (offizielle Definition unten), falls die Menge *über* ihrem Graphen konvex ist. Anders ausgedrückt, falls die Sekante zwischen je zwei Punkten *über* dem Graphen liegt, siehe Abbildung 3.24.
- (iii) Diese Idee formalisieren wir wie folgt: Für $\lambda \in [0, 1]$ durchläuft

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$$

das abgeschlossene Intervall $[x_1, x_2]$. Analog durchläuft

$$y = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \tag{3.22}$$

die Sekante von $f(x_2)$ bis $f(x_1)$. Jetzt brauchen wir nur noch $f(x)$ mit einem y wie in (3.22) zu vergleichen: Ist $y \geq f(x)$, so liegt die Sekante über der Kurve, siehe Abbildung 3.24.

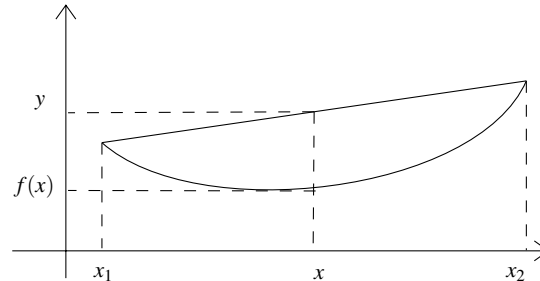


Abb. 3.24 Bei einer konvexen Funktion liegt die Sekante über dem Graphen

Jetzt aber offiziell:

Definition 3.2.25 (Konvexe Funktion).

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem Intervall I .

- (i) Wir nennen f *konvex (linksgekrümmt)*, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ und für alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt, dass

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

- (ii) Wir nennen f *konkav (rechtsgekrümmt)*, falls $-f$ konvex ist.

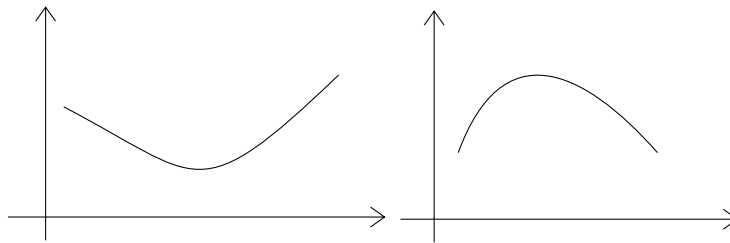


Abb. 3.25 Eine konvexe und eine konkave Funktion

Proposition 3.2.26 (Konvexität via f'').

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ konvex} \iff f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in (a, b).$$

Beweis. (Mittelwertsatz und ziemlich technisch — das war aber aufgrund von 3.2.25 auch zu erwarten.)

⇐: Wir prüfen die Bedingung in 3.2.25(i) nach. Dazu sei o.B.d.A. $x_1 < x_2$ und sei $0 < \lambda < 1$. Wir setzen $x := \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ und daher gilt $x_1 < x < x_2$. Nach 3.2.18(i) ist f' monoton wachsend auf $[x_1, x_2]$. Ferner gibt es nach dem Mittelwertsatz auf $[x_1, x_2]$ ein $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \quad (3.23)$$

Nun schreiben wir $x - x_i$ um zu

$$x - x_1 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - x_1 = (1 - \lambda)(x_2 - x_1) > 0$$

und

$$x_2 - x = x_2 - \lambda x_1 - (1 - \lambda)x_2 = \lambda(x_2 - x_1) > 0.$$

Damit folgt aus (3.23)

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1 - \lambda} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda}.$$

Umformen ergibt

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

was sich durch Ausrechnen auf der linken Seite zur gesuchten Bedingung

$$\Leftrightarrow f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

vereinfacht.

⇒: Wir nehmen indirekt an, es gibt ein ξ mit $f''(\xi) < 0$ und setzen

$$\varphi(x) = f(x) - f'(\xi)(x - \xi) \quad (x \in I). \quad (3.24)$$

Dann gilt:

- φ ist 2-mal differenzierbar,
- $\varphi'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) = 0$ und
- $\varphi''(\xi) = f''(\xi) < 0$.

Wegen 3.2.21 hat φ ein striktes lokales Maximum in ξ , also gibt es nach Definition 3.2.3(ii) ein $\varepsilon_0 > 0$ sodass

$$\varphi(x) < \varphi(\xi) \quad \forall x \in U_{\varepsilon_0}(\xi) \setminus \{\xi\} \subseteq I.$$

Insbesondere gilt für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, dass

$$\varphi(\xi - \varepsilon) < \varphi(\xi), \quad \varphi(\xi + \varepsilon) < \varphi(\xi)$$

und daher

$$f(\xi) = \varphi(\xi) > \frac{1}{2}(\varphi(\xi - \varepsilon) + \varphi(\xi + \varepsilon)) \stackrel{(3.24)}{=} \frac{1}{2}(f(\xi - \varepsilon) + f(\xi + \varepsilon)). \quad (3.25)$$

Setzen wir nun $\lambda = \frac{1}{2}$, $x_1 = \xi - \varepsilon$, $x_2 = \xi + \varepsilon$, dann lautet (3.25)

$$f(\underbrace{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2}_{=\xi}) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

was ein Widerspruch zur Konvexität ist. \square

Beispiel 3.2.27 (Konvexe und konkave Funktionen).

(i) (Quadratische Polynome) Sei $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($x \in \mathbb{R}$) mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Es gilt $f''(x) = 2a$ und damit wegen 3.2.26

$$f \text{ ist konvex} \iff a > 0 \quad \text{und} \quad f \text{ ist konkav} \iff a < 0.$$

(ii) Die Exponentialfunktion ist konvex, denn mit 3.1.10(iv) und 1.4.41(i) gilt

$$\exp''(x) = \exp(x) > 0.$$

(iii) Die Logarithmusfunktion ist konkav, denn mit 3.1.30(i),(iii) gilt

$$\log''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Bemerkung 3.2.28 (Wendestellen).

(i) Punkte $\xi \in I$, in denen eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ihr Krümmungsverhalten ändert, heißen *Wendestellen*. In einer Wendestelle ändert f ihr Verhalten also von konkav auf konvex oder umgekehrt, siehe Abbildung 3.26

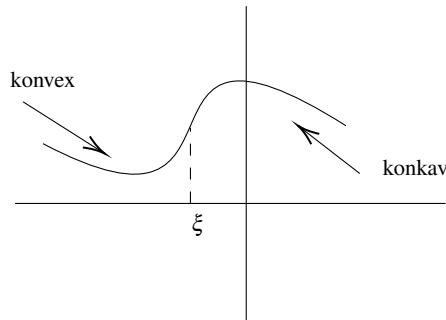


Abb. 3.26 Links der Wendestelle ξ ist f konvex, rechts davon konkav

- (ii) Falls f zweimal differenzierbar ist, dann besagt 3.2.26, dass eine Wendestelle ein Punkt ist, in dem f'' das Vorzeichen wechselt, also insbesondere eine Nullstelle von f'' ist.

Analog zum Fall lokaler Extrema gibt es daher eine notwendige Bedingung für Wendestellen ξ (nämlich $f''(\xi) = 0$) und eine hinreichende Bedingung (nämlich $f''(\xi) = 0, f'''(\xi) \neq 0$). (Details UE)

Motivation 3.2.29 (Die Regeln von De L'Hospital).

- (i) *Das Problem:* Bei der Betrachtung von Grenzwerten der Form

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)}$$

kann es vorkommen, dass zwar Zähler und Nenner (evtl. uneigentlich) konvergieren, aber trotzdem keine Aussage über den Limes des Quotienten gemacht werden kann. Das ist der Fall, wenn $f, g \rightarrow 0$ oder $f, g \rightarrow \pm\infty$ gilt⁹, wie etwa in

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^k} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x \log x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Zwar haben wir diese Probleme — jeweils mit passenden Methoden/Tricks — schon geknackt, vgl. 2.3.7 und 2.3.15(vii), praktisch wäre allerdings eine allgemeine Methode. Eine solche kann mit Hilfe der Differentialrechnung tatsächlich angegeben werden.

- (ii) *Die Idee:* Wir betrachten zur Illustration der Idee den Fall f, g differenzierbar und $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$ und $g'(x) \neq 0$ für alle x . Dann gilt wegen 3.1.15 $f(\xi) = 0 = g(\xi)$ und somit

⁹ In der Schulmathematik spricht man dann auch von den „undefinierten Ausdrücken“ $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} = \frac{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}{\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}} \rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (3.26)$$

Wir dürfen also darauf hoffen, den Limes $\frac{f(x)}{g(x)}$ durch den Limes $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ersetzen zu können.

Tatsächlich wird uns dies gelingen. Zunächst benötigen wir aber eine technische Verallgemeinerung des MWS.

Lemma 3.2.30 (Verallgemeinerter MWS).

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) . Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Bemerkung 3.2.31 (Zum VMWS).

Falls $g'(x) \neq 0$ auf (a, b) dann gilt auch $g(b) - g(a) \neq 0$, denn nach dem MWS gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $g(b) - g(a) = g'(\xi)(b - a)$. Wegen $g'(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in (a, b)$ ergibt sich tatsächlich $g(b) - g(a) \neq 0$.

Damit können wir nun die Formel in 3.2.30 umschreiben zu

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

und das ist schon ein Teil des heuristischen Arguments (3.26) in 3.2.29(ii).

Beweis von 3.2.30. Wende den Satz von Rolle auf die Funktion

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x), \quad x \in [a, b],$$

an. \square

Satz 3.2.32 (Regeln von De L'Hospital).

Seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ differenzierbar und sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Sei zusätzlich

$$(i) \lim_{x \searrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \searrow a} g(x), \quad \text{oder } (ii) \lim_{x \searrow a} g(x) = \pm\infty,$$

dann gilt im Fall (i), $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und im Fall (ii), $g(x) \neq 0$ für $x \geq x_0$ für ein passendes (großes) x_0 und in beiden Fällen

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert (evtl. als uneigentlicher Limes $\pm\infty$) existiert. Analoges gilt für den Limes $x \nearrow b$.

Beweis. (Lang & technisch). Wir betrachten nur den Fall $x \searrow a$.

(1) Sei zunächst

$$\eta := \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}. \quad (3.27)$$

Wir wählen y_0, y_1 mit $\eta < y_1 < y_0 \stackrel{(3.27)}{\implies} \exists x_1 \in (a, b)$ sodass

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < y_1 \quad \forall x \in (a, x_1). \quad (3.28)$$

Seien nun $x, u \in (a, x_1) \stackrel{\text{VMWS}}{\implies} \exists \xi \in (x, u)$:

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \stackrel{(3.28)}{<} y_1 < y_0. \quad (3.29)$$

$$\begin{array}{c} g(x) - g(u) \neq 0 \\ \text{vgl. 3.2.31} \end{array}$$

Im Fall (i) gilt für $x \searrow a$ wegen (3.29)

$$\frac{f(u)}{g(u)} \leq y_1 < y_0 \quad \forall u \in (a, x_1). \quad (3.30)$$

Im Fall (ii) müssen wir etwas mehr arbeiten. Wir behandeln nur $g(x) \rightarrow +\infty$, der andere Fall ist analog.

Zu festem $u \in (a, x_1)$ bestimmen wir ein $x_2 \in (a, u)$, sodass

$$\begin{aligned} g(x) &> \max\{0, g(u)\} \quad \forall x \in (a, x_2) \\ \implies \frac{g(x) - g(u)}{g(x)} &> 0 \quad \forall x \in (0, x_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{(3.29)}{\implies} \frac{f(x) - f(u)}{g(x)} &< y_1 \frac{g(x) - g(u)}{g(x)} \\ \implies \frac{f(x)}{g(x)} &< y_1 - y_1 \underbrace{\frac{g(u)}{g(x)} + \frac{f(u)}{g(x)}}_{\rightarrow y_1 (x \searrow a)} \quad \forall x \in (a, x_2) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(3.29)}{\implies} \exists x_3 : \frac{f(x)}{g(x)} < y_0 \quad \forall x \in (a, x_3). \quad (3.31)$$

Zusammengefasst gilt also in den beiden Fällen (i) und (ii): $\forall y_0 > \eta \exists x_0$, sodass ((3.30),(3.31))

$$\frac{f(x)}{g(x)} < y_0 \quad \forall x \in (a, x_0). \quad (3.32)$$

(2) Analog folgt für $\eta \in \overline{\mathbb{R} \cup \{\infty\}}$: $\forall \tilde{y}_0 < \eta \exists \tilde{x}_0$:

$$\tilde{y}_0 < \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in (a, \tilde{x}_0). \quad (3.33)$$

(3) Aus (3.32) und (3.33) ergibt sich nun die Behauptung, denn falls $\eta = \pm\infty$ wird durch (3.32) bzw. (3.33) alles erledigt. Falls $\eta \in \mathbb{R}$ ergibt die Kombination von (3.32) und (3.33): $\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{x}_0$, sodass

$$\eta - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \eta + \varepsilon \quad \forall x \in (a, \tilde{x}_0) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \eta. \quad \square$$

Beispiel 3.2.33 (Die Regeln von De L'Hospital).

(i) Wir geben einen alternativen Beweis für $(\alpha > 0)$

$$\frac{\log(x)}{x^\alpha} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty),$$

vgl. 2.3.7(vi). Tatsächlich gilt

$$f(x) = \log(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) \quad \text{und} \quad g(x) = x^\alpha \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty)$$

und wir können 3.2.32 anwenden. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

und daher

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

(ii) Wir berechnen

$$\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right).$$

Es gilt

$$\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)}$$

und wir versuchen 3.2.32 anzuwenden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \sin(x) \rightarrow 0 \quad (x \searrow 0), & g(x) &= x \sin(x) \rightarrow 0 \quad (x \searrow 0), \\ f'(x) &= 1 - \cos(x), & g'(x) &= \sin(x) + x \cos(x). \end{aligned}$$

Nun gilt $f'(x) \rightarrow 0$ ($x \searrow 0$) und $g(x) \rightarrow 0$ ($x \searrow 0$) und wir versuchen unser Glück mit einer zweiten Anwendung von 3.2.32 diesmal auf f'/g' . Es gilt

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sin(x), & f'(x) &\rightarrow 0 \text{ (} x \searrow 0 \text{)}, \\ g''(x) &= \cos(x) + \cos(x) - x \sin(x), & g'(x) &\rightarrow 2 \text{ (} x \searrow 0 \text{)}. \end{aligned}$$

Also erhalten wir schließlich

$$\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) \stackrel{3.2.32}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{3.2.32}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 0.$$

Kapitel 4

Integration

In diesem Kapitel wenden wir uns der Integralrechnung zu, der zweiten tragenden Säule der Analysis neben der Differentialrechnung.

In 4.1 entwickeln wir den *Integralbegriff* für „schöne“ Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen. Genauer definieren wir das *Riemann-Integral* über den Zugang über Treppenfunktionen. In 4.2 verknüpfen wir die Integral- mit der Differentialrechnung. Hier lernen wir *das* Hauptresultat der Vorlesung kennen, den

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,

der salopp gesprochen besagt, dass Differenzieren und Integrieren inverse Operationen sind. Dies ermöglicht unter anderem das explizite Berechnen von Integralen. In 4.3 lernen wir den *Satz von Taylor* kennen, der es erlaubt, *schöne* Funktionen rein aus der Kenntnis ihrer Ableitungen in einem Punkt zu rekonstruieren.

In 4.4 werden wir uns schließlich mit *uneigentlichen Integralen* beschäftigen, also mit Integralen auf unbeschränkten Intervallen oder solche, bei denen der Integrand gegen den Rand des Intervalls unbeschränkt ist.

4.1 Das Riemann-Integral

In diesem Paragraphen entwickeln wir den Integralbegriff. Dabei gehen wir so vor, dass wir zunächst das Integral für eine Klasse einfacher Funktionen — der Treppenfunktionen — definieren. Dazu sind nur elementargeometrische Formeln notwendig (Flächeninhalt von Rechtecken). Das Integral für allgemeinere Funktionen wird dann mittels Approximation durch Treppenfunktionen definiert. Wir beginnen mit einer

Motivation 4.1.1 (Zwei Wege zum Integralbegriff).

- (i) *Geometrische Motivation.* Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine positive Funktion, d.h. $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Wir wollen den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x -Achse bestimmen, also die Fläche unter dem Funktionsgraphen.

Falls f „hinreichend flach“ ist, dann können wir erwarten, dass die Fläche gut durch Rechtecksflächen approximiert werden kann. Die Fläche der Rechtecke können wir aber auch als die Fläche unter dem Graphen einer *Treppenfunktion* (vgl. 2.1.2(x) und 4.1.2(i) unten) auffassen, siehe Abbildung 4.1.

phi

Sei also $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, d.h. von der Form

$$\varphi(t) = \begin{cases} c_1 & a = t_0 \leq t < t_1 \\ c_2 & t_1 \leq t < t_2 \\ \vdots & \vdots \\ c_n & t_{n-1} \leq t < t_n = b \end{cases}$$

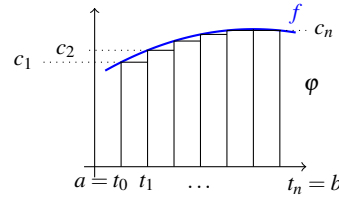


Abb. 4.1 Treppenfunktion unterhalb des Graphen von f

wobei $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ passend für f gewählt sind. Ein Näherungswert für die Fläche A unter dem Graphen von f ist die Fläche unter dem Graphen von φ — und diese können wir ganz leicht berechnen. Wir erhalten nämlich

$$A \approx \sum_{j=1}^n c_j (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \varphi(t_j) (t_j - t_{j-1}).$$

Höhe des Rechtecks Basis des Rechtecks

(ii) *Motivation aus der Mechanik* (vgl. 3.1.13) Sei $s : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ die Ortsfunktion eines Massenpunkts P , d.h. $s(t)$ gibt die Position von P zum Zeitpunkt t an. Dann ist die Momentangeschwindigkeit $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ die Ableitungsfunktion von s , also

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Wir stellen uns nun folgende *Aufgabe*. Angenommen, wir kennen $s(0)$, also den Ausgangspunkt von P und wir kennen $v(t) \forall t \in [0, T]$. Wie können wir $s(t)$ für $0 < t \leq T$ bestimmen?

Betrachten wir dazu ein „kleines“ Zeitintervall $[t_1, t_2] \subseteq [0, T]$. Falls sich $v(t)$ auf $[t_1, t_2]$ wenig ändert (also fast konstant ist), dann können wir hoffen, dass folgende Näherung gut ist: Wir bestimmen den *Weggewinn* (Ortszunahme) gemäß der *Formel*

$$\text{Weg} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit},$$

also

$$s(t) \approx s(t_1) + v(t_1)(t - t_1) \quad t \in (t_1, t_2).$$

Wenn wir diese Approximation auf den „kleinen“ Zeitintervallen $[a = t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, \dots , $[t_{n-1}, t_n = T]$ durchführen und die Terme addieren, so erhalten wir die Näherung

$$s(T) = s(0) + \sum_{j=1}^n v(t_j) (t_j - t_{j-1}).$$

Bemerkenswert ist, dass wir auch hier die Summe als Fläche unter dem Graphen einer Treppenfunktion φ auffassen können, genauer

$$\varphi(t) = v(t_j) \text{ für } t \in (t_{j-1}, t_j) \quad (j = 1, \dots, n)$$

(iii) In beiden Fällen haben wir gesehen, dass sich Treppenfunktionen als Grundbausteine für eine Integrationstheorie anbieten, ja geradezu aufdrängen. Daher beginnen wir damit, ein Integral für Treppenfunktionen zu definieren und seine Eigenschaften zu studieren. Zunächst wiederholen wir die (etwas technisch anmutende) Definition dieser Klasse (schöner!) Funktionen.

Definition 4.1.2 (Treppenfunktionen).

(i) Eine Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion* (siehe auch Abbildung 4.2), falls es

- eine endliche Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ des Intervalls $[a, b]$ gibt, d.h. $t_i \in [a, b]$ mit

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

- und Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$\varphi(t) = c_j \text{ für } t \in (t_{j-1}, t_j) \quad (j = 1, \dots, n).$$

φ stückweise konstant auf den offenen Intervallen (t_{j-1}, t_j) ;
über die Werte an den Zerlegungspunkten $\varphi(t_j)$ wird nichts vorausgesetzt.

(ii) Wir bezeichnen die *Menge der Treppenfunktionen* auf $[a, b]$ mit

$$\mathfrak{T}[a, b] := \{\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist Treppenfunktion}\}.$$

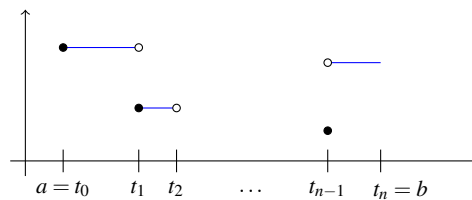


Abb. 4.2 Graph einer Treppenfunktion

Lemma 4.1.3 (Operationen für Treppenfunktionen).

Es gilt

- (i) $\varphi, \psi \in \mathfrak{T}[a, b] \Rightarrow \varphi + \psi \in \mathfrak{T}[a, b]$,
(ii) $\varphi \in \mathfrak{T}[a, b], \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\varphi \in \mathfrak{T}[a, b]$.

Mit anderen Worten: $\mathfrak{T}[a, b]$ ist ein Vektorraum über \mathbb{R} , genauer ist $\mathfrak{T}[a, b]$ ein Teilvektorraum von $\mathbb{R}^{[a, b]} = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$, dem Vektorraum aller reellen Funktionen auf $[a, b]$.

Beweis. (Reine Buchhaltung — aber das war bei dieser technischen Definition auch zu erwarten.)

- (i) Aus den Zerlegungen $\mathfrak{Z} = \{t_0, \dots, t_n\}$ für φ und $\mathfrak{Z}' = \{t'_0, \dots, t'_m\}$ für ψ bilden wir die Zerlegung $\tilde{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{Z}'$. Diese schreiben wir als $\tilde{\mathfrak{Z}} = \{a = s_0, \dots, s_e = b\}$ und sehen, dass φ und ψ und damit $\varphi + \psi$ auf (s_{j-1}, s_j) konstant sind.
(ii) ist sofort klar nach Definition, denn $\varphi(t) = c_j, t \in (t_{j-1}, t_j) \Rightarrow (\lambda\varphi)(t) = \lambda\varphi(t) = \lambda c_j, t \in (t_{j-1}, t_j)$. \square

Definition 4.1.4 (Integral für Treppenfunktionen).

Sei $\varphi \in \mathfrak{T}[a, b]$ mit Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ und Werten $\varphi(t) = c_j$ ($t \in (t_{j-1}, t_j), 1 \leq j \leq n$). Wir definieren das *Integral von φ auf $[a, b]$* als

Wir schreiben oft auch einfach nur $\int \varphi$ statt $\int_a^b \varphi(t) dt$.

$$\int_a^b \varphi(t) dt := \sum_{j=1}^n c_j (t_j - t_{j-1}).$$

Bemerkung 4.1.5 (Zum Integral 4.1.4).

- (i) *Achtung auf das Vorzeichen.* Wie in 4.1.1(i) diskutiert, ist für φ positiv $\int \varphi$ gerade die Fläche unter dem Graphen. Hat φ negative Werte, so werden gemäß Definition 4.1.4 die entsprechenden Rechtecksflächen subtrahiert, denn es gilt ja $c_j < 0!$, siehe auch Abbildung 4.3.

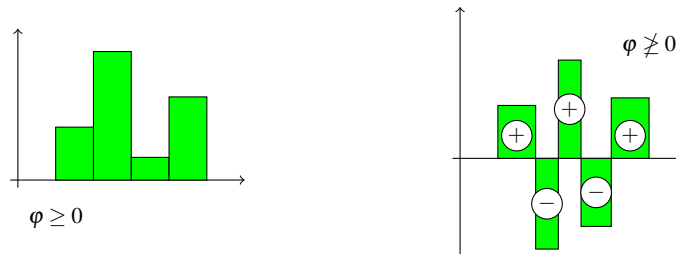


Abb. 4.3 Flächenstücke unterhalb der x -Achse werden negativ gezählt

- (ii) *Wohldefiniertheit:* Streng genommen müssen wir noch zeigen, dass das Integral in 4.1.4 wohldefiniert ist. Genauer: Definition 4.1.2(i) verlangt für $\varphi \in \mathfrak{T}[a, b]$

die Existenz einer endlichen Zerlegung — es könnte aber mehrere Zerlegungen für φ geben, siehe Abbildung 4.4.

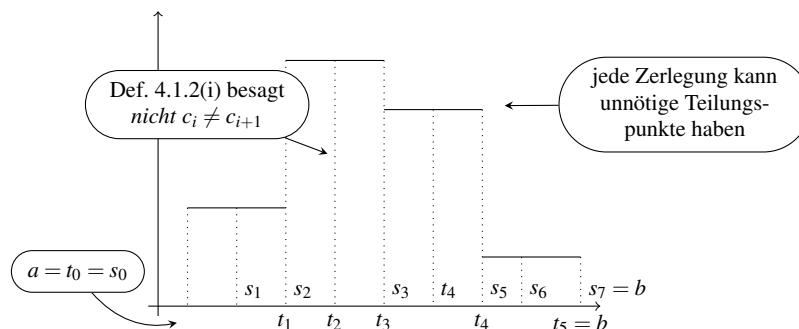


Abb. 4.4 Zwei unterschiedliche Zerlegungen für φ

Definition 4.1.4 bezieht sich aber auf eine *bestimmte* Zerlegung und es ist zu zeigen, dass $\int \varphi$ nicht von der Wahl einer bestimmten Zerlegung abhängt.

Das ist graphisch natürlich evident, allerdings etwas aufwendig hinzuschreiben, siehe z.B. [10, Lemma in 9.2], [5, Bem. p. 187]. Der springende Punkt ist, dass die „unnötigen“ Teilungspunkte keinen Schaden anrichten — aber Arbeit machen.

- (iii) Die Wohldefiniertheit des Integrals 4.1.4 erlaubt es uns das Integral als *Abbildung aufzufassen*, die jeder Treppenfunktion auf $[a, b]$ ihr Integral zuordnet, d.h.

$$\int : \mathfrak{T}[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto \int_a^b \varphi(t) dt.$$

Dieser Standpunkt erlaubt es, bestimmte Eigenschaften des Integrals strukturell besser zu formulieren und zu verstehen, z.B. besagt die nächste Proposition, dass \int ein *lineares Funktional* (lineare Abbildung aus einem Vektorraum in den Grundkörper im Sinne der linearen Algebra) auf dem Vektorraum $\mathfrak{T}[a, b]$ ist, das zusätzlich *monoton* ist.

Proposition 4.1.6 (Linearität und Monotonie des Integrals für Treppenfkt).

Seien $\varphi, \psi \in \mathfrak{T}[a, b]$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

(i) $\int_a^b (\varphi + \psi)(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dt + \int_a^b \psi(t) dt,$

(ii) $\int_a^b (\lambda \varphi)(t) dt = \lambda \int_a^b \varphi(t) dt,$

(iii) $\varphi \leq \psi \implies \int_a^b \varphi(t) dt \leq \int_a^b \psi(t) dt.$

d.h. $\varphi(x) \leq \psi(x) \forall x \in [a, b]$

Beweisskizze (Einfach & nur Buchhaltung).

(i) Verwende für φ, ψ eine gemeinsame Zerlegung wie im Beweis von Lemma 4.1.3. Die gewünschten Eigenschaften folgen dann sofort aus korrespondierenden Eigenschaften für endliche Summen.

(ii) und (iii) sind klar. \square

d.h. mit *guten* Eigenschaften also als lineares, monotones Funktional

Motivation 4.1.7 (Das Riemann-Integral).

(i) Wir haben also einen *vernünftigen* Integralbegriff für besonders schöne Funktionen, die Treppenfunktionen, definiert. Unser nächstes Ziel ist es, diesen Integralbegriff unter Beibehaltung dieser vernünftigen Eigenschaften auf eine *interessantere* Klasse von Funktionen auszudehnen.

(ii) Die Grundidee ist dabei die folgende: Gegeben ist eine *beschränkte* Funktion (siehe Definition 2.2.11) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dann betrachten wir alle Treppenfunktionen $\varphi \in \mathfrak{T}[a, b]$ mit $f \leq \varphi$ und das Infimum der Integrale über allen solchen φ , also

$$\alpha := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(t) dt \mid \varphi \in \mathfrak{T}[a, b], f \leq \varphi \right\}.$$

Ebenso können wir alle $\psi \in \mathfrak{T}[a, b]$ mit $\psi \leq f$ und ihre Integrale betrachten und setzen

$$\beta := \sup \left\{ \int_a^b \psi(t) dt \mid \psi \in \mathfrak{T}[a, b], \psi \leq f \right\}.$$

Falls diese beiden Zahlen übereinstimmen — im Allgemeinen gilt natürlich $\beta \leq \alpha$ — dann werden wir

$$\int_a^b f(t) dt = \alpha = \beta$$

definieren.

(iii) Wie zwingend ist diese etwas ungewöhnliche Vorgehensweise? Sie ergibt sich zwangsläufig, falls

- das neue Integral für Treppenfunktionen mit dem Integral 4.1.4 übereinstimmen soll, und
- $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ gelten soll.

Denn für alle $\varphi \in \mathfrak{T}[a, b]$ mit $f \leq \varphi$ gilt dann $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b \varphi(t) dt$, also

$\int_a^b f(t) dt \leq \alpha$, und für alle $\psi \in \mathfrak{T}[a, b]$ mit $\psi \leq f$ gilt $\int_a^b \psi(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt$,

also $\beta \leq \int_a^b f(t) dt$. Insgesamt also

$$\beta \leq \int_a^b f(t) dt \leq \alpha$$

und, falls $\alpha = \beta$, ergibt sich zwangsläufig $\int_a^b f(t) dt = \alpha = \beta$.

Nun offiziell:

Definition 4.1.8 (Riemann-Integral). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

(i) Wir definieren das *Ober-* und *Unterintegral* von f als

$$\int_a^{b*} f(t)dt := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(t)dt \mid \varphi \in \mathfrak{T}[a, b], f \leq \varphi \right\} \text{ bzw.}$$

$$\int_{a*}^b f(t)dt := \sup \left\{ \int_a^b \psi(t)dt \mid \psi \in \mathfrak{T}[a, b], \psi \leq f \right\}$$

(ii) Wir nennen f *Riemann-integrierbar*, falls

$$\int_a^{b*} f(t)dt = \int_{a*}^b f(t)dt$$

gilt. In diesem Fall definieren wir das *Riemann-Integral* von f von a nach b als

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^{b*} f(t)dt.$$

Beispiel 4.1.9 ((Nicht) Riemann-integrierbare Funktionen).

(i) *Treppenfunktionen.* Wie erwartet und gewünscht(!) sind Treppenfunktionen Riemann-integrierbar und das Riemann-Integral stimmt mit dem Integral aus 4.1.4 überein.

Tatsächlich gilt für $\varphi \in \mathfrak{T}[a, b]$

Sonst hätten wir zwei unterschiedliche \int für \mathfrak{T} und das wäre *Quatsch!*

$$\int_a^{b*} \varphi(t)dt = \int_a^b \varphi(t)dt = \int_{a*}^b \varphi(t)dt \text{ also ist}$$

φ Riemann-integrierbar und $R - \int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^b \varphi(t)dt.$ ← Integral 4.1.4

(ii) *Die Dirichletfunktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist nicht Riemann-integrierbar.* Tatsächlich ist

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

beschränkt auf \mathbb{R} , also auch auf jedem $[a, b]$. Allerdings enthält jedes offene Intervall rationale und irrationale Zahlen, vgl. 0.1.12(ii) und daher gilt

- $\varphi \in \mathfrak{T}[a, b], \chi_{\mathbb{Q}} \leq \varphi \Rightarrow \varphi \geq 1$ auf jedem Teilintervall einer Zerlegung und
- $\psi \in \mathfrak{T}[a, b], \psi \leq \chi_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \psi \leq 0$ auf jedem Teilintervall einer Zerlegung.

Daher gilt

$$\int_a^{b*} \chi_{\mathbb{Q}}(t)dt = b - a \neq 0 = \int_{a*}^b \chi_{\mathbb{Q}}(t)dt$$

und daher ist $\chi_{\mathbb{Q}}$ nicht Riemann-integrierbar.

Motivation 4.1.10 (Integrabilitätskriterium).

Bei genauerer Betrachtung erweist sich die Definition der Riemann-Integrierbarkeit als sperrig und schwer handhabbar. Abhilfe schafft das folgende Integrabilitätskriterium, das besagt, dass ein beschränktes $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar ist, falls es zwischen zwei Treppenfunktionen φ, ψ „eingezwickelt“ werden kann (d.h. es gilt $\psi \leq f \leq \varphi$), deren Integrale beliebig nahe beieinander liegen.

Diese Charakterisierung ist nur eine milde Umformulierung der Definition und ebenfalls etwas technisch. Sie wird es uns aber ermöglichen, ganze Klassen von Funktionen, nämlich stetige Funktionen und monotone Funktionen, als integrierbar zu entlarven.

Theorem 4.1.11 (Integrabilitätskriterium: „Einzwickeln“ zw. Treppenfkt).

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt

$$f \text{ ist Riemann-integrierbar} \iff \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0: \exists \varphi, \psi \in \mathfrak{T}[a, b] \text{ mit} \\ \psi \leq f \leq \varphi \text{ und} \\ 0 \leq \int_a^b \varphi(t) dt - \int_a^b \psi(t) dt \leq \varepsilon. \end{array}$$

klar wegen Monotonie 4.1.6(iii)

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus der Definition der Riemann-Integrierbarkeit und den Eigenschaften von inf und sup. \square

Korollar 4.1.12 (Stetige Fkt. & monotone Fkt sind Riemann-integrierbar).

- (i) Jedes stetige $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.
(ii) Jedes monotone $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Zum Beweis von (i) benötigen wir ein Resultat, dass vieles von dem verwendet, was wir über stetige Funktionen auf kompakten Intervallen in Abschnitt 2.2.1 herausgefunden haben.

Satz 4.1.13 (Approximation stetiger Funktionen durch Treppenfunktionen).

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in \mathfrak{T}[a, b]$ mit den Eigenschaften

- (i) $\psi \leq f \leq \varphi$ und
(ii) $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis. (Gleichmäßige Stetigkeit gibt uns die Möglichkeit, mit einer äquidistanten Zerlegung ans Ziel zu kommen.) Sei $\varepsilon > 0$.

(1) (Ausnutzen der glm. Stetigkeit)

Wegen 2.2.17 ist f gleichmäßig stetig auf $[a, b]$. Daher gibt es mit 2.2.15 ein $\delta > 0$ sodass für alle $x, x' \in [a, b]$ mit $|x - x'| < \delta$

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \text{gilt.} \quad (4.1)$$

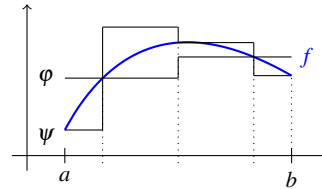


Abb. 4.5 Konstruktion von φ und ψ

(2) (Konstruktion von φ, ψ , siehe Abbildung 4.5)

Sei n so groß, dass

$$\frac{b-a}{n} < \delta. \quad (4.2)$$

Wir definieren eine (äquidistante) Zerlegung von $[a, b]$ via

$$t_k := a + k \frac{b-a}{n} \quad (k = 0, \dots, n).$$

Es gilt dann

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \quad \text{und} \quad |t_k - t_{k+1}| \stackrel{(4.2)}{<} \delta. \quad (4.3)$$

Die Funktionswerte der Treppenfunktionen definieren wir für $1 \leq k \leq n$ als

$$c_k := \max\{f(x) \mid t_{k-1} \leq x \leq t_k\} \quad \text{und} \quad c'_k := \min\{f(x) \mid t_{k-1} \leq x \leq t_k\}. \quad (4.4)$$

Nun setzen wir $\varphi(a) := f(a) =: \psi(a)$ und für $1 \leq k \leq n$

$$\varphi(t) := c_k \quad \text{falls} \quad t_{k-1} < t \leq t_k \quad \text{bzw.} \quad \psi(t) := c'_k \quad \text{falls} \quad t_{k-1} < t \leq t_k.$$

(3) (Zusammensetzen & Ernten des Ergebnisses)

Nun gilt (i) nach Konstruktion, vgl. 4.4. Und auch (ii) gilt, denn nach dem Satz vom Maximum 2.2.12 existieren für alle $1 \leq k \leq n$

$$\xi_k, \xi'_k \in [t_{k-1}, t_k] \quad \text{mit} \quad f(\xi_k) = c_k \quad \text{und} \quad f(\xi'_k) = c'_k.$$

Nun ergibt (4.3) $|\xi_k - \xi'_k| < \delta$ und daher gilt mit (4.1) $|c_k - c'_k| < \varepsilon$, also auch (ii). \square

Beweis von 4.1.12.

(i) (Zusammensetzen von 4.1.11 mit 4.1.13) Sei $\varepsilon > 0$. Dann können wir f gemäß 4.1.13 „einwickeln“, d.h.

$$\exists \varphi, \psi \in \mathfrak{T}[a, b] \quad \text{mit} \quad \psi \leq f \leq \varphi \quad \text{und} \quad |\varphi(x) - \psi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (4.5)$$

Daher gilt mit den Eigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{4.1.6(\text{iii})}{\leq} \int_a^b \varphi(t) dt - \int_a^b \psi(t) dt && \text{Zerlegung } a = t_0 < t_1 = b \\
&\stackrel{4.1.6(\text{i})}{=} \int_a^b (\varphi(t) - \psi(t)) dt && \stackrel{(4.5)}{\leq} \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Daher ist f mit 4.1.11 Riemann-integrierbar.

- (ii) (Konstruktion geeigneter Treppenfunktionen und noch einmal 4.1.11) Wir beweisen nur den Fall f *monoton wachsend*, der fallende Fall ist analog. Wir konstruieren wie im Beweis 4.1.13, Schritt (2) eine (äquidistante) Zerlegung von $[a, b]$ via

$$t_k = a + k \frac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Zur Konstruktion der Treppenfunktion setzen wir

$$\psi(t) = f(t_{k-1}), \quad \varphi(t) = f(t_k) \quad \text{für } t_{k-1} \leq t < t_k, \quad \psi(b) := f(b) =: \varphi(b).$$

Weil f monoton wachsend ist, haben wir $\psi \leq f \leq \varphi$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{4.1.6(\text{iii})}{\leq} \int_a^b \varphi(t) dt - \int_a^b \psi(t) dt \\
&= \sum_{k=1}^n f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f(t_k) - f(t_{k-1})) \\
&\stackrel{\uparrow}{=} \frac{b-a}{n} (f(t_n) - f(t_0)) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

Teleskopsumme

Also gilt für alle $\varepsilon > 0$, dass

$$0 \leq \int_a^b \varphi(t) dt - \int_a^b \psi(t) dt < \varepsilon,$$

falls n nur groß genug ist. Daher ist f mit 4.1.11 Riemann-integrierbar. \square

Motivation 4.1.14 (Grundeigenschaften — zum Zweiten).

Nachdem wir nun den Integralbegriff auf eine größere Klasse von Funktionen ausgedehnt haben, überzeugen wir uns davon, dass er auch vernünftig ist — in dem Sinn, dass die Grundeigenschaften aus 4.1.6 erhalten bleiben, vgl. 4.1.11. Dass diese von großem Nutzen sind, haben wir gerade auch im letzten Beweis gesehen, wo 4.1.6 essentiell an mehreren Stellen eingegangen ist.

Proposition 4.1.15 (Linearität und Monotonie des Riemann-Integrals).

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

- (i) $f + g$ ist Riemann-integrierbar und $\int_a^b (f + g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.
- (ii) λf ist Riemann-integrierbar und $\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.
- (iii) $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Beweis. (Hantieren mit Treppenfunktionen und dem Integrabilitätskriterium)

- (i) Sei $\varepsilon > 0$, dann wählen wir mit 4.1.11 $\varphi_j, \psi_j \in \mathfrak{T}[a, b]$ ($i, j = 1, 2$) mit $\psi_1 \leq f \leq \varphi_1, \psi_2 \leq g \leq \varphi_2$ und $(1 \leq i, j \leq 2)$

$$0 \leq \int_a^b \varphi_j - \int_a^b \psi_j \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann sind $\varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2 \in \mathfrak{T}[a, b]$, siehe 4.1.3(i) und es gilt

$$\psi_1 + \psi_2 \leq f + g \leq \varphi_1 + \varphi_2 \text{ und}$$

$$\int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2)(t)dt - \int_a^b (\psi_1 + \psi_2)(t)dt \leq \varepsilon.$$

Somit ist $f + g$ Riemann-integrierbar laut 4.1.11. Außerdem gilt 4.1.8(ii), denn

Seien ψ_1, ψ_2 wie im sup in 4.1.8(i) für f bzw. g . dann ist $\psi_1 + \psi_2$ zulässige Funktion im sup für $f + g$

$(f + g)$ Riemann-integrierbar

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_{a^*}^b f + \int_{a^*}^b g \leq \int_{a^*}^b (f + g) \stackrel{=}{=} \int_a^b (f + g)$$

$$= \int_a^{b^*} (f + g) \leq \int_a^{b^*} f + \int_a^{b^*} g$$

$$= \int_a^b f + \int_a^b g.$$

analog für inf

Da der erste Ausdruck gleich dem letzten ist, gilt immer = statt \leq und wir erhalten

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f + g).$$

- (ii) ähnlich wie (i), separat für $\lambda = 0, \lambda > 0, \lambda = -1, \lambda < 0$.

- (iii) Sofort klar aufgrund der Definition, denn $\int^* f < \int^* g$. \square

Motivation 4.1.16 (In Richtung Dreiecksungleichung fürs Integral).

Unser nächstes Ziel ist es, die Dreiecksungleichung für Integrale – eine *sehr wichtige* Abschätzung –

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

herzuleiten. Wie schon der Name andeutet, kann sie als Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y|$ bzw. der verallgemeinerten Dreiecksungleichung, vgl. Bew. 1.4.43)

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

aufgefasst werden. Dazu benötigen wir folgende Begriffe – die auch unabhängig wichtig sind.

Definition 4.1.17 (positiver und negativer Teil einer Funktion).

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Wir definieren positiven und negativen Teil von f als

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad f_-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung 4.1.18 (Zu 4.1.17 und zum Betrag).

(i) Abbildung 4.6 illustriert Definition 4.1.17:

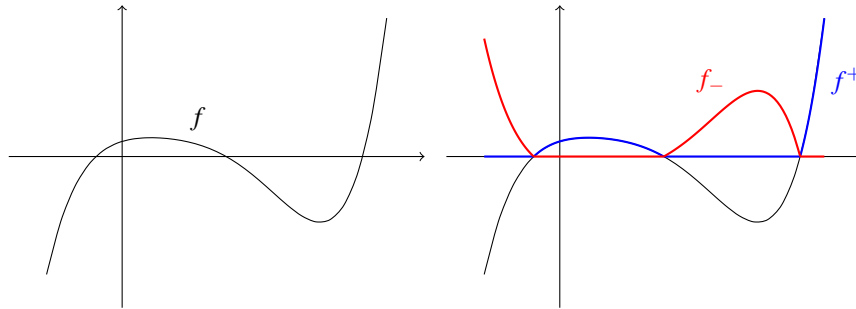


Abb. 4.6 Betrag der Funktion f

(ii) Offensichtlich gilt

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f_-(x) = -\min(f(x), 0),$$

$$f = f^+ - f_-, \quad |f| = f^+ + f_- \quad \text{und}$$

$$f \leq g \Rightarrow f^+ \leq g^+, \quad g_- \leq f_-$$

Proposition 4.1.19 (Dreiecksungleichung für Riemann-Integrale).

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, dann sind auch f^+ , f_- und $|f|$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Beweis. Wir beweisen zuerst die Riemann-Integrierbarkeit von f^+ . Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt mit 4.1.11

$$\exists \varphi, \psi \in \mathfrak{T}[a, b] \text{ mit } \psi \leq f \leq \varphi \quad \text{und} \quad 0 \leq \int \varphi - \int \psi \leq \varepsilon.$$

Nun sind $\varphi^+, \psi^+ \in \mathfrak{T}[a, b]$ mit $\psi^+ \leq f^+ \leq \varphi^+$ und es gilt mit 4.1.18(ii)

$$\varphi^+ - \varphi = \varphi_- \leq \psi_- = \psi^+ - \psi, \quad \text{daher} \quad \varphi^+ - \psi^+ \leq \varphi - \psi \quad \text{und}$$

$$0 \leq \int \varphi^+ - \psi^+ \leq \int \varphi - \psi \leq \varepsilon.$$

Daher ist f^+ nach 4.1.11 Riemann-integrierbar, und die Riemann-Integrierbarkeit von f_- folgt analog.

Der Betrag $|f|$ ist Riemann-integrierbar wegen $|f| = f^+ + f_-$ (siehe 4.1.18(ii) und 4.1.15(i)).

Schließlich gilt wegen $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$ mit 4.1.15(iii) $\int f \leq \int |f|$ und $-\int f \leq \int |f|$ und somit

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|. \quad \square$$

Korollar 4.1.20 (Integrierbarkeit von Produkten).

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt

- (i) $\forall p \in [1, \infty) : |f|^p$ ist Riemann-integrierbar.
- (ii) $f \cdot g$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis. siehe z.B. [10, 9.11, Prop.(ii), (iii)]. \square

Motivation 4.1.21 (MWS der Integralrechnung).

- (i) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und positiv. Dann ist f Riemann-integrierbar nach 4.1.12(i) und $\int_a^b f(t) dt$ entspricht der Fläche A unter dem Graphen. Anschaulich ist klar (vgl. Abb.4.7), dass es ein Rechteck der Höhe μ über $[a, b]$ geben muss, das den gleichen Flächeninhalt hat, also dass $\mu(b - a) = A$ gilt.

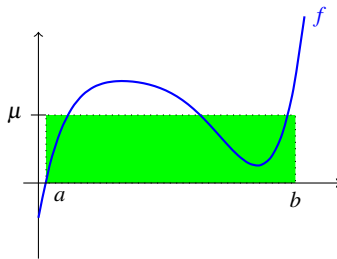


Abb. 4.7 Graphische Darstellung des MWS der Integralrechnung

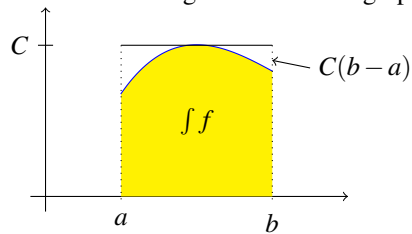
Dies ist tatsächlich der Fall, wie die nächste Proposition zeigt. Zusätzlich besagt dieser Mittelwertsatz der Integralrechnung, dass es ein $\xi \in [a, b]$ gibt mit $f(\xi) = \mu$. Also zusammengefasst:

$$\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(t) dt = f(\xi)(b-a) \quad (4.6)$$

- (ii) Ähnlich wie der Mittelwertsatz der Differentialrechnung kann der Mittelwertsatz der Integralrechnung hervorragend dazu verwendet werden, um Abschätzungen herzuleiten, vgl. 3.2.14. Gilt zum Beispiel $f(x) \leq C$ für alle $x \in [a, b]$, dann folgt sofort aus (4.6),

$$\int_a^b f(t) dt \leq C(b-a).$$

Diese Abschätzung lässt sich auch graphisch, wie in Abb.4.8, verstehen.



Die Fläche des Rechtecks über $[a, b]$ mit Höhe C ist sicher größer als $\int_a^b f(t) dt$.

Abb. 4.8 Die Fläche unter f ist kleiner als die des Rechtecks

- (iii) Wir formulieren nun den Mittelwertsatz der Integralrechnung exakt und beginnen mit einer etwas *allgemeineren Version*.

Proposition 4.1.22 (Mittelwertsatz der Integralrechnung).

Seien $f, \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $\varphi \geq 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$, sodass

$$\int_a^b f(t)\varphi(t) dt = f(\xi) \int_a^b \varphi(t) dt.$$

Inbesondere ergibt sich mit $\varphi(t) = 1$ für alle $t \in [a, b]$

$$\int_a^b f(t) dt = f(\xi)(b-a).$$

Beweis. (Erfreulich kurz: Verwenden der Stetigkeit und Hantieren mit den Integraleigenschaften)

Weil f stetig auf $[a, b]$ ist, ist f nach 2.2.12 auch beschränkt, d.h. $m := \inf\{f(x) | x \in [a, b]\}$ und $M := \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$ existieren. Damit gilt

$$m \leq f \leq M \stackrel{\varphi \geq 0}{\Rightarrow} m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi$$

und somit mit 4.1.15(iii)

$$m \int_a^b \varphi \leq \int_a^b f \varphi \leq M \int_a^b \varphi.$$

Daher gibt es aber ein μ mit $m \leq \mu \leq M$ mit $\int_a^b f \varphi = \mu \int_a^b \varphi$.

Schließlich gibt es wegen dem ZWS 2.2.12 ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \mu$, also gilt

$$\int_a^b f \varphi = f(\xi) \int_a^b \varphi. \quad \square$$

Bemerkung 4.1.23 (Teilintervalle und Orientierung).

(i) Seien $a < b < c$ und $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ergibt sich durch das Zusammenfügen der entsprechenden Treppenfunktionen

f ist Riemann-integrierbar $\Leftrightarrow f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ sind Riemann-integrierbar.

In diesem Fall gilt $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$. Einschränkung von f auf $[a, b]$ bzw. $[b, c]$

(ii) Wir treffen folgende Vereinbarung. Falls $b < a$, dann setzen wir

$$\int_a^b f(t) dt := - \int_b^a f(t) dt.$$

Das entspricht der Idee, dass die y-Achse in Richtung größerer Werte von x orientiert ist.

(iii) Wir setzen $\int_a^a f(t) dt = 0$.

Bemerkung 4.1.24 (Riemannsummen).

In dieser Bemerkung diskutieren wir einen wichtigen alternativen Zugang zum Riemann-Integral, der eine etwas einfachere Berechnung des Riemann-Integrals erlaubt (*die Methode, Integrale zu berechnen, lernen wir im nächsten Abschnitt kennen*) und oft als Definition verwendet wird.

Wir beginnen mit einer (technischen) Definition.

(i) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $\mathcal{Z} := \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Wir wählen in jedem der Teilintervalle $[t_{k-1}, t_k]$ einen Punkt $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, genannt *Stützstelle*. Die Teilungspunkte t_j ($0 \leq j \leq n$) und die Stützstellen ξ_j ($1 \leq j \leq n$) fassen wir notationell zusammen zu

$$\mathfrak{Z} := ((t_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n).$$

und definieren die Riemann-Summe von f bezüglich \mathfrak{Z} als

$$S(\mathfrak{Z}, f) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$$

Rechtecksflächen mit Breite = Abstand der resp. Teilungspunkte und Höhe = f an der entspr. Stützstelle

Wir nennen

$$\mu(\mathfrak{Z}) = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}) \leftarrow \begin{array}{l} \text{Länge des größten} \\ \text{Teilintervalls} \end{array}$$

die *Feinheit* der Zerlegung \mathfrak{Z} .

(ii) Wir können diese Definition graphisch, wie in Abb.4.9, veranschaulichen:

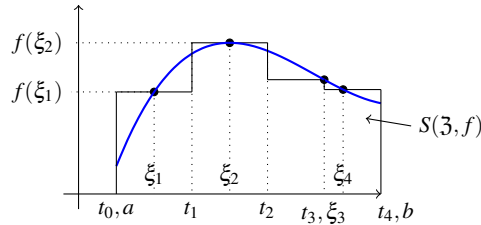


Abb. 4.9 Riemannsummen von f

Wir sehen, dass die Riemann-Summe als Fläche unter dem Graphen einer Treppenfunktion φ interpretiert werden kann, wobei

$$\varphi(t) = f(\xi_i) \quad t \in (t_{i-1}, t_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und daher genauer

$$\int_a^b \varphi(t) dt = S(\mathfrak{Z}, f).$$

Die Treppenfunktion φ interpoliert also f an den Stützstellen ξ_1, \dots, ξ_n . Die Kernidee ist es nun, den Grenzwert von $R(\mathfrak{Z}, f)$ für $\mu(\mathfrak{Z}) \rightarrow 0$ zu betrachten, also für immer feinere Zerlegungen bessere Approximation durch an den Stützstellen interpolierende Treppenfunktionen zu konstruieren.

Dieser Zugang ist unserem eng verwandt. Lediglich die Bestimmung der approximierenden Treppenfunktion ist etwas expliziter.

Da es im Limes $\mu(\mathfrak{Z}) \rightarrow 0$ anschaulich die Wahl der Stützstellen irrelevant wird, ist es nicht überraschend, dass beide Zugänge äquivalent sind. Genauer gilt:

- (iii) **Theorem.** Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt
 f ist Riemann integrierbar $\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$,
 sodass für jede Zerlegung \mathfrak{Z} mit $\mu(\mathfrak{Z}) < \delta$,
 $|S(\mathfrak{Z}, f) - s| < \varepsilon$.

In diesem Fall gilt $s = \int_a^b f(t) dt$.

Die Riemann-Summen kommen s beliebig nahe, falls die Zerlegung nur fein genug ist

(iv) *Beispiel.* Wir berechnen exemplarisch das Integral

$$\int_0^a t dt \quad \text{für } a > 0$$

mittels Riemann-Summen.

Sei $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Wir wählen als Zerlegungspunkte $t_k = \frac{ka}{n}$ ($k = 0, \dots, n$) und Stützstellen $\xi_k = t_k$. Dann ist also $\mathfrak{Z} = ((t_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n) = \left(\left(\frac{ka}{n}\right)_{k=0}^n, \left(\frac{ka}{n}\right)_{k=1}^n \right)$ und $\mu(\mathfrak{Z}) = \frac{a}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

Also ergeben sich die Riemann-Summen, vgl. Abb.4.10,

$$\begin{aligned} S_n = S(\mathfrak{Z}, f) &= \sum_{k=1}^n \frac{ka}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ &= \frac{a^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{a^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \rightarrow \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

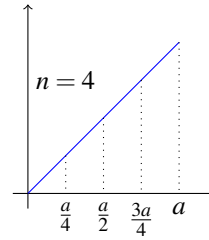


Abb. 4.10 Riemannsummen der linearen Funktion

und somit

$$\int_0^a t dt = \frac{a^2}{2}.$$

Dieses Ergebnis sieht man natürlich auch elementar-geometrisch; *richtig* Integrale berechnen lernen wir im nächsten Abschnitt.

4.2 Integral und Ableitung

Motivation 4.2.1 (Integral und Ableitung).

Im vorigen Abschnitt haben wir den Begriff des Riemann-Integrals kennengelernt und diskutiert. Eine drängende Frage ist nun: Wie berechnet man *konkret* ein Integral z.B. *einer stetigen Funktion*?

jenseits von Riemann-Summen

Der Schlüssel dazu liegt in der Zusammenführung des Integralbegriffs mit dem Differenzieren. Dies wird *ultimativ* vom *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* (HsDI) erledigt, den wir gleich kennenlernen werden.

Wir beginnen mit formalen Vorbereitungen und dem Begriff der Stammfunktion.

Definition 4.2.2 (Stammfunktion).

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f auf I , falls

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in I \text{ gilt.}$$

Beispiel 4.2.3 (Stammfunktion).

$F(x) = \frac{x^2}{2}$ ist Stammfunktion von $f(x) = x$ auf \mathbb{R} , denn

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x = f(x).$$

Motivation 4.2.4 (2 Fragen zu Stammfunktionen).

Zum Begriff der Stammfunktion ergeben sich unmittelbar und in natürlicher Weise die folgenden Fragen:

- (1) Gibt es immer eine Stammfunktion und wenn ja, wie viele Stammfunktionen gibt es?

genauer: Welche f 's haben Stammfunktion abseits von einfachen Beispielen wie z.B. 4.2.3

- (2) Wie kann man Stammfunktionen systematisch beschreiben/berechnen?

Wir beantworten den „Eindeutigkeits teil“ in (1) in der nächsten Proposition und den Rest von (1) und (2) im darauffolgenden Theorem, dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Proposition 4.2.5 (Differenz von Stammfunktionen).

Sei $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Für $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$G \text{ ist (ebenfalls) eine Stammfunktion von } f \iff F - G \text{ ist konstant.}$$

Beweis. (Einfache Anwendung der Differentialrechnung.)

\Rightarrow : Sei G Stammfunktion von f dann gilt

$$G'(x) = f(x) = F'(x) \quad \forall x \in I.$$

Daher folgt aus 3.2.15(ii), dass $F - G$ konstant ist.

\Leftarrow : Sei $G(x) = F(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Dann ist G differenzierbar (siehe 3.1.17(i), 3.1.10(i)) und es gilt

$$G' = (F + c)' = F' = f. \quad \square$$

Motivation 4.2.6 (Zum Programm aus 4.2.4).

Proposition 4.2.5 sagt uns, wie wir *alle* Stammfunktionen einer gegebenen Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ berechnen, falls wir *eine einzige* Stammfunktion haben (nämlich durch Addieren einer Konstante). Wie wir aber *überhaupt* eine solche Stammfunktion erhalten, falls f stetig ist, sagt uns neben anderen Dingen der HsDI.

Theorem 4.2.7 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und seien a, b beliebige Punkte im Intervall I .

- (i) Die Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (4.7)$$

ist stetig differenzierbar (d.h. $F \in C^1(I)$) und es gilt $F' = f$ auf I . Insbesondere ist F also eine Stammfunktion von f auf I .

(ii) Sei F eine (beliebige) Stammfunktion von f , dann gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Beweis. (Für so ein zentrales Resultat erfreulich einfach. Wir verwenden direkt die jeweiligen Definitionen und einmal den MWS der Integralrechnung.)

(i) Da f stetig ist, ist es auch nach 4.1.12(i) auch Riemann-integrierbar. Daher ist (4.7) sinnvoll und F ist definiert. Wir berechnen den Differenzenquotienten von F in einem beliebigen $x \in I$. Sei $0 \neq h$, sodass $x+h \in I$ und o.B.d.A. $h > 0$ (für $h < 0$ ist alles analog). Dann gilt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \stackrel{4.1.23(i)}{=} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt. \quad (4.8)$$

Nach dem MWS der Integralrechnung 4.1.22 gibt es ein $\xi_h \in [x, x+h]$ mit

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi_h) h. \quad (4.9)$$

Nun gilt $\xi_h \rightarrow x$, falls $h \rightarrow 0$ (denn $|x - \xi_h| \leq |x - (x+h)| = |h| \rightarrow 0$) und wir erhalten

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \stackrel{(4.8), (4.9)}{=} f(\xi_h) \xrightarrow[\text{stetig}]{f} f(x) \quad (h \rightarrow 0). \quad (4.10)$$

Also ist F differenzierbar mit $F' = f$. Damit ist F' auch stetig und daher F stetig differenzierbar.

(ii) Wir definieren G wie in (4.7), also $G(x) = \int_a^x f(t) dt$. Dann ist G nach (i) Stammfunktion von f . Sei F eine beliebige Stammfunktion von f , dann gilt mit 4.2.5 $F = G + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Daher gilt

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f - \int_a^a f \stackrel{4.1.23(iii)}{=} \int_a^b f(t) dt. \quad \square$$

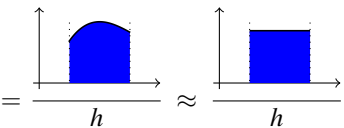
Bemerkung 4.2.8 (Zum Beweis des HsDI).

Der entscheidende Schritt im entscheidenden Beweisteil (i) des HsDI, ist es zu sehen, dass

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \approx \frac{f(x)h}{h} = f(x)$$

gilt. Das „ungefähr gleich“ hier entspricht dem in Gleichung (4.10) formal mit Hilfe des MWS der Integralrechnung durchgeführten Limes. Genauer, das „ \approx “ ist in dem Sinn gemeint, dass für kleine h die linke Seite der rechten beliebig nahe kommt.

Dieser Schritt lässt sich auch sehr gut intuitiv erfassen und zeigt, warum das Differenzieren das Integrieren „umkehrt“. Um das zu verdeutlichen, schreiben bzw. skizzieren wir in intuitiv leicht verständlicher Symbolik

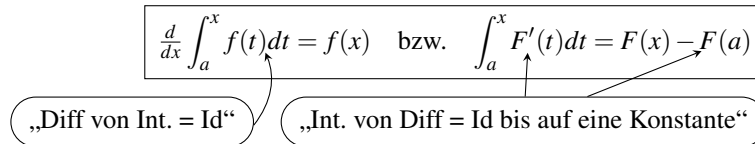
$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}$$


$$= \frac{f(x)h}{h} = f(x).$$

Im entscheidenden Schritt wird also die Fläche unter der Kurve durch die Rechteckfläche $A = f(x)h$ angenähert, was eben formal genau dem Anwenden des MWS der Integralrechnung mit nachfolgendem Ausführen des Limes h gegen 0 entspricht.

Bemerkung 4.2.9 (Die Bedeutung des HsDI).

- (i) Für die Punkte (i) und (ii) im HsDI bieten sich die folgenden Schreibweisen an (Notation wie im Thm.):



Spätestens jetzt wird klar, dass der HsDI besagt, dass Differenzieren und Integrieren *im Wesentlichen* „inverse Operationen“ sind!

- (ii) Präzise können wir die Situation untersuchen, indem wir explizit die Abbildung, die einer Funktion ihre Ableitungsfunktion bzw. ihre Integralfunktion zuordnet anschreiben und mit *Diff* bzw. *Int* bezeichnen. Dabei wird es möglich auch genau die Menge (eigentlich Vektorräume) von Funktionen anzugeben, für die Diff bzw. Int definiert sind (also Definitionsmengen für die Abbildungen¹ Diff bzw. Int) und ebenso die entsprechenden Zielmengen. Auf diese Art ergibt sich zunächst (mit der Bezeichnung C^0 für die Menge (den Vektorraum) der stetigen Funktionen) für die Zusammensetzung von Integration mit Differentiation

$$f \in C^0(I) \xrightarrow{\text{Int}} \left(F(x) = \int_a^x f(t) dt \right) \xrightarrow{\text{Diff}} F' = f. \quad (4.11)$$

d.h. f stetig auf $I \stackrel{4.1,13}{\Rightarrow}$ intbar

diffbar. wegen 4.2.7(i)

wegen 4.2.7(i)

¹ Beachte, dass hier gewissermaßen im „1. Stock“ operiert wird: Diff bzw. Int sind Abbildungen die aus Funktionen neue Funktionen machen und werden daher oft als *Ableitungsoperator* bzw. *Integraloperator* bezeichnet, vgl. [7, graue Box, p. 165].

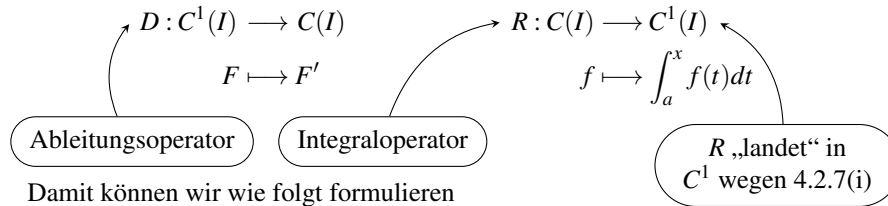
Diese Betrachtungsweise ist vielleicht zunächst ungewohnt, aber sehr praktisch, wie oben zu sehen ist. Wir können nämlich viel präziser darüber sprechen, was Differenzieren und Integrieren *strukturell* bedeutet.

Beginnen wir umgekehrt mit dem Differenzieren, so erhalten wir

$$F \in C^1(I) \xrightarrow{\text{Diff}} F' \xrightarrow{\text{Int}} \int_a^x F'(t) dt = F(x) - F(a). \quad (4.12)$$

d.h. F stetig diffb.
 F' stetig $\xrightarrow{4.1,12(i)} \mathbb{R}$ -intb.
 $4.2.7(ii)$

(iii) Nun definieren wir im Sinne der oben begonnen Vorgehensweise (noch etwas formaler) die folgenden Abbildungen:



Damit können wir wie folgt formulieren

$$D \circ R = \text{id} : C(I) \rightarrow C(I) \text{ wegen (4.11),}$$

bzw.

nur fast die Id

$$R \circ D : C^1(I) \rightarrow C^1(I) \text{ erfüllt } R \circ D(F) = F - F(a) \text{ wegen (4.12).}$$

(iv) Neben der Tatsache, dass $R \circ D$ nicht ganz die Identität ergibt ($R \circ D = \text{id} + \text{Konstante}$) haben D und R unterschiedliche Definitions- und Zielbereiche. Daher sind D und R eben *doch nicht genau invers zueinander – die Details des Slogans aus (i) sind essentiell!*

Eine Veranschaulichung der gesamten Situation ist:

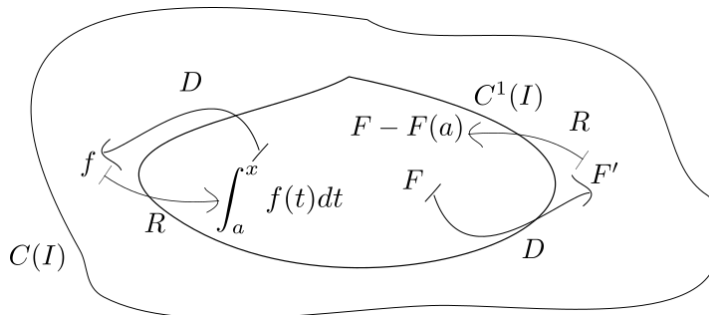


Abb. 4.11 Linke Seite: Das Integral einer C^0 -Funktion f ist C^1 und die Ableitung des Integrals gibt f zurück. Rechte Seite: Differenzieren einer C^1 -Funktion F liefert eine integrierbare Ableitung F' . Ihr Integral gibt F bis auf eine Konstante zurück.

Motivation 4.2.10 (Konkretes Integrieren).

Der HsDI hat nicht nur, wie oben diskutiert, eine enorme theoretische Bedeutung, sondern eine ebenso große praktische: Er besagt, wie wir konkret Integrale berechnen können. Diesen Aspekt diskutieren wir nun im Detail.

- (i) Der HsDI, insbesondere Theorem 4.2.7(ii), d.h.

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) =: F(t)\Big|_a^b$$

praktische Schreibweise

erlaubt es nun, praktisch konkrete Integrale zu berechnen: Wir müssen nur die Differenz der Werte einer (beliebigen) Stammfunktion an der Ober- und Untergrenze bilden.

- (ii) Ok, aber wie erhalten wir eine Stammfunktion? Ganz klar durch unsere Ergebnisse aus Kapitel 3, d.h. über das konkrete Differenzieren!
- (iii) Als einfaches Beispiel berechnen wir $\int_a^b x^n dx$ ($1 \leq n \in \mathbb{N}$). Wegen $(x^n)' = nx^{n-1}$, siehe 3.1.10(ii) gilt

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b.$$

Bevor wir weitere einfache Beispiele betrachten, ein begründetes Pamphlet!

Bemerkung 4.2.11 (Terminologische Katastrophe: unbestimmtes Integral).

- (i) In vielen Texten findet man die Kurzschreibweise $F(x) = \int f(x)dx$ womit eine oder auch alle Stammfunktionen von f gemeint sind. Der Ausdruck

$$\int f(x)dx \tag{4.13}$$

wird dabei als „unbestimmtes Integral“ bezeichnet.

- (ii) Diese traditionell leider übliche Bezeichnung führt aber in eine echte *terminologische Katastrophe*! Genauer, betrachten wir die folgenden Bezeichnungsvarianten:

	gute Terminologie	leider auch üblich
$\int_a^b f(t)dt$	Integral von f von a nach b	bestimmtes Integral von f
F mit $F' = f$	Stammfunktionen von f	unbestimmtes Integral von f

Die hochgradig nicht-triviale Aussage (ii) im HsDI, die das praktische Integrieren erst ermöglicht, lautet „in guter Terminologie“, vgl. 4.2.10(i):

„Das Integral von f zwischen a und b ergibt sich als die Differenz der Werte einer Stammfunktion von f an Ober- bzw. Untergrenze.“

Die schlechte (aber leider oft auch übliche) Terminologie versteckt diese zentrale Aussage in der winzigen Vorsilbe eines Eigenschaftsworts: „Das bestimmte Integral von f ist gleich der Differenz der Werte eines unbestimmten Integrals von f an der Ober- bzw. Untergrenze.“

- (iii) Wir vermeiden hier daher die Bezeichnung „unbestimmtes Integral“ und verwenden (4.13) ausschließlich im folgenden Sinn:

„Bestimme $\int f(t)dt$ “ bedeutet „finde eine Stammfunktion von f “.

Beispiel 4.2.12 (Höchste Zeit: konkretes Integrieren).

- (i) Wir verallgemeinern 4.2.10(iii) von $n \in \mathbb{N}$ auf $-1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ für $a, b > 0$. Es gilt $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, vgl. 3.1.31(i) und daher

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_a^b. \quad (4.14)$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}$ gilt (4.14) sogar für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

- (ii) Der Fall $\alpha = -1$ in (i) führt für $a, b > 0$ wegen 3.1.30(i) zu

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log(x) \Big|_a^b.$$

- (iii) Mit 3.1.10(v) erhalten wir (beachte 4.2.11(iii)!)

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) \quad \text{und} \quad \int \cos(x) dx = \sin(x).$$

- (iv) Mit 3.1.10(iv) erhalten wir

$$\int e^x dx = e^x.$$

- (v) Aus 3.1.31(iv) ergibt sich

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x).$$

Motivation 4.2.13 (Mehr Werkzeuge!).

Um auch komplizierte Funktionen integrieren zu können – deren Stammfunktion wir nicht so einfach mittels unserer Ergebnisse aus Kapitel 3 „sehen“ – lernen wir nun zwei wichtige „Integrationsmethoden“ kennen: die *partielle Integration* und die *Substitutionsregel*. Sie sind die „Umkehrung“ der Produktregel bzw. der Kettenregel der Differentialrechnung und können dementsprechend leicht aus der entsprechenden Regel und dem HsDI hergeleitet werden.

Proposition 4.2.14 (Partielle Integration).

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = \left(f(t)g(t) \right) \Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Beweis. (Einfaches verwenden der Produktregel und natürlich des HsDI, Teil (ii).)

Wir setzen $F = fg$. Dann gilt mit der Produktregel 3.1.17(ii) $F' = f'g + fg'$ und daher wegen 4.2.7(ii) sowie der Linearität des Integrals

$$\left(f(t)g(t) \right) \Big|_a^b = F(t) \Big|_a^b = \int_a^b F'(t)dt = \int_a^b f'(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)g'(t)dt. \quad \square$$

Beispiel 4.2.15 (Partielle Integration).

(i) Es gilt $\int \underbrace{\sin(x)}_{f'} \underbrace{\cos(x)}_g dx = -\cos^2(x) - \int \cos(x) \sin(x) dx$ und daher

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = -\frac{1}{2} \cos^2(x).$$

(ii) Wir berechnen $\int \log(x) dx$ mit einem Trick, der es uns erlaubt, partiell zu integrieren. Es gilt

$$\int \log(x) dx = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\log(x)}_g dx = x \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log(x) - x.$$

Proposition 4.2.16 (Substitutionsregel).

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi([a, b]) \subseteq I$.

Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

damit ist $f \circ \varphi$ definiert

Bemerkung 4.2.17 (Zur Substitutionsregel).

(i) Proposition 4.2.16 merkt man sich am einfachsten mit folgendem *Trick*: Betrachte $x = \varphi(t)$ als „neue Variable“ für f , also $f(x) = f(\varphi(t))$. Dann gibt die folgende *formale* Rechnung die richtige Transformation

die auftretenden Symbole sind
streng genommen nicht definiert

$$dx = \frac{dx}{dt} dt = \frac{d\varphi(t)}{dt} dt = \varphi'(t) dt. \quad (4.15)$$

Schließlich müssen die Integralgrenzen „mittransformiert“ werden, d.h. $a \mapsto \varphi(a)$, $b \mapsto \varphi(b)$. So erhalten wir tatsächlich

$$\int_a^b \underbrace{f(\varphi(t))}_{=f(x)} \underbrace{\varphi'(t)dt}_{\stackrel{(4.15)}{=}dx} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

(ii) Die Formel in 4.2.16 kann in beide Richtungen verwendet werden:

- „von rechts nach links“, falls wir einen komplizierten Integranden $f(x)$ vorliegen haben und wir ein passendes φ finden können, sodass $(f \circ \varphi)\varphi'$ leicht zu integrieren ist.
- „von links nach rechts“: Ein zunächst *hässlicher* Integrand kann die Struktur $(f \circ \varphi)\varphi'$ haben (für passendes φ) und dann leicht integrierbar sein.

Beispiel 4.2.18 (Substitutionsmethode).

(i) Unser erstes Beispiel verwendet die Substitutionsmethode „von links nach rechts“. Es gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(x)dx = -\frac{1}{2} \cos(x) \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(-1 - 1) = 1.$$

$x = \varphi(t) = 2t, \quad \varphi' = \frac{dx}{dt} = 2$

(ii) Etwas allgemeiner sei $c \neq 0, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a < b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c} \int_a^b f(ct)c dt = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} f(x)dx.$$

der besseren Sichtbarkeit wegen

$x = \varphi(t) = ct, \quad \varphi' = \frac{dx}{dt} = c$

(iii) Wir berechnen die Fläche des Halbkreises, vgl. Abb4.12:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \leftarrow \begin{array}{l} x = \varphi(t) = \sin(t), \quad \varphi' = \frac{dx}{dt} = \cos(t) \\ -1 \leq x = \sin(t) \leq 1 \\ \arcsin(-1) \leq \arcsin(x) \leq \arcsin(1) \\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \text{ vgl. 2.3.27(ii)} \end{array} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt \leftarrow \begin{array}{l} \cos^2(t) = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2it} + e^{-2it}) + \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1), \text{ vgl. 2.3.15(iv)} \end{array} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt \\ &\stackrel{(ii), c=2}{=} \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) dt + \frac{1}{2} t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \sin(t) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4}(\sin(\pi) - \sin(-\pi)) + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

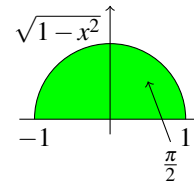


Abb. 4.12 Fläche des Halbkreises

Hinweis: Damit haben wir nun im Rahmen unseres axiomatischen Zugangs gezeigt, dass die Fläche des Einheitskreises (d.h. des Kreises mit Radius 1) genau die Kreiszahl π ist. Genauer haben wir aus der etwas „seltsamen“ Definition von π in 2.3.19, vgl. auch 2.3.16, die aus der Schule bekannt & gewohnte Formel für die Kreisfläche (wider)gewonnen!

Beweis von 4.2.16. (Ganz wie bei der partiellen Integration: Wir verwenden die zugehörige Differentiationsregel, also diesmal die Kettenregel und kombinieren sie mit dem HsDI, Teil (ii).)

Sei F eine Stammfunktion von f , dann ist $F \circ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und mit der Kettenregel 3.1.25 gilt

$$(F \circ \varphi)' = F' \circ \varphi \cdot \varphi' = f \circ \varphi \cdot \varphi'.$$

Daher folgt mit 4.2.7(ii)

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (F \circ \varphi)|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx. \quad \square$$

4.3 Der Satz von Taylor

Motivation 4.3.1 (Rekonstruktion einer Funktion aus ihren Ableitungen an einem Punkt).

In diesem vorletzten Abschnitt, können wir endlich eines der Hauptthemen der Analysis, das wir bereits mehrfach diskutiert haben, zu einem Abschluss bringen. Wie in 3.1.1 und davor in 0.0.2 betont, geht es in der Analysis vielfach darum, das *lokale* Änderungsverhalten von Funktionen zu studieren und dadurch ihr Verhalten „im Großen“ abzuleiten. Wir haben nun genügend Werkzeuge der Differentialrechnung gesammelt, um aus der Kenntnis der (höheren) Ableitungen einer Funktion in einem einzigen Punkt Erkenntnisse über die Gesamtfunktion herzuleiten.

Wir beginnen mit einer motivierenden Rechnung. Dazu sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar und x_0 sei ein Punkt im Intervall I . Wir ziehen den HsDI als Werkzeug heran.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^x \underbrace{f'(t)}_{= -\left(\frac{d}{dt}(x-t)\right)f'(t) \text{ Achtung: Trick!}} dt \\ &= f(x_0) - \int_{x_0}^x \left(\frac{d}{dt}(x-t)\right) f'(t) dt \\ \text{part. Int.} \Rightarrow &= f(x_0) - (x-t)f'(t)|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t) dt \\ &= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\substack{\text{Tangente in } (x_0, f(x_0)) \\ \text{= Polynom vom Grad 1}}} + \underbrace{\int_{x_0}^x (x-t)f''(t) dt}_{\substack{\text{„Rest“ als Integral wegen lin. Best-} \\ \text{approx. hoffentlich gut abschätzbar}}}. \end{aligned}$$

Das ist also eine „schöne“ Darstellung der Form

$$f = \text{Polynom vom Grad 1} + \text{Rest.}$$

Wir können nun aber noch weitermachen und im Restterm nochmals partiell integrieren. So erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x (x-t)f''(t)dt &\stackrel{\text{Trick zum Zweiten}}{=} -\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \left(\frac{d}{dt}(x-t)^2 \right) f''(t)dt \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} -\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t) \Big|_{x_0}^x + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t)dt. \\ &= \frac{1}{2} f''(t)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t)dt \end{aligned}$$

Also gilt insgesamt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}_{\text{Polynom vom Grad 2}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t)dt}_{\text{Rest in Integralform}}$$

Das ist offensichtlich eine Darstellung der Form

$$f = \text{Polynom vom Grad 2} + \text{Rest.}$$

Natürlich können wir nun induktiv weitermachen und erhalten die sog. Taylorformel.

Proposition 4.3.2 (Taylorformel – zum Ersten).

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^{n+1} -Funktion und sei x_0 im Intervall I beliebig. Dann gilt für alle $x \in I$ die Taylor-Formel

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_{n+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_{n+1}(x), \end{aligned}$$

Restterm

Polynom von Grad n mit Koeff. gegeben durch die Ableitungen von f in x_0

mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Beweis. (Genaueres Aufschreiben der Rechnung aus der Motivation.)

Wir verwenden die Notation $T_n[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$. Damit ist zu zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + R_{n+1}(x).$$

Induktion nach n : Den Induktionsanfang für $n = 0$ bzw. $n = 1, 2$ erledigt 4.3.1. $n - 1 \mapsto n$: Wir nehmen an, dass $f(x) = T_{n-1}[f, x_0](x) + R_n(x)$ gilt. Wir integrieren den Restterm $R_n(x)$ partiell. Es gilt

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x \underbrace{(x-t)^{n-1}}_{= -\frac{1}{n} \frac{d}{dt} (x-t)^n} f^{(n)}(t) dt \\ &= -\frac{1}{n!} f^{(n)}(t) (x-t)^n \Big|_{x_0}^x + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x-x_0)^n + R_{n+1}(x), \end{aligned}$$

← Trick zum Dritten bzw. n -ten

was die Behauptung zeigt. \square

Definition 4.3.3 (Taylor-Polynom und Taylor-Reihe).

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^{n+1} -Funktion und sei $x_0 \in I$ beliebig.

- (i) Für $m \leq n$ definieren wir das *Taylor-Polynom* der Ordnung m von f im Punkt x_0 als

$$T_m[f, x_0](x) := \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

- (ii) Falls f glatt ist, d.h. C^n für alle $n \in \mathbb{N}$, dann definieren wir die *Taylor-Reihe* von f im Punkt x_0 als

$$T[f, x_0](x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

und zwar unabhängig davon, ob $T[f, x_0](x)$ konvergiert oder nicht.

Beispiel 4.3.4 (Die Taylor-Reihe für \exp).

- (i) Wir betrachten $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Es gilt $f^{(k)}(x) = e^x$ und daher

$$\begin{aligned} T_n[\exp, 0](x) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} e^0 (x-0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \\ T[\exp, 0](x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x) \end{aligned}$$

Die Taylor-Reihe für \exp in $x = 0$ ist also gerade die Exponentialreihe, vgl. 1.4.38. Wegen 1.4.37 gilt

$$T_n[f, 0](x) \rightarrow \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

d.h. die Taylorreihe von \exp , $T_n[f, 0]$ konvergiert auf ganz \mathbb{R} gegen \exp .

- (ii) Wir erhalten also folgendes Bild: Die Taylorpolynome approximieren mit steigender Ordnung und für alle $x \in \mathbb{R}$ immer besser die Funktion. Zusätzlich wissen wir, wie die approximierenden Polynome aus f berechnet werden können. Explizit gilt hier

$$\begin{aligned} T_0[\exp, 0](x) &= 1, & T_1[\exp, 0](x) &= 1 + x, \\ T_2[\exp, 0](x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2}, & T_3[\exp, 0](x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \text{ usw.} \end{aligned}$$

Graphisch sieht die Approximation wie in Abb.4.13 dargestellt aus:

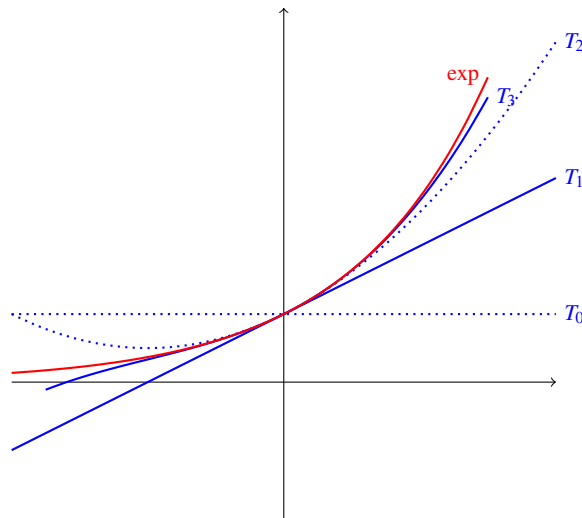


Abb. 4.13 Die Exponentialfunktion und ihre approximierenden Taylorpolynome

Motivation 4.3.5 (Konvergenz der Taylor-Reihe).

- (i) Im obigen Beispiel ist die Taylorreihe eine *gute Approximation* für die ursprüngliche Funktion $f = \exp$ und zwar auf ganz \mathbb{R} . Ihre Vorzüge sind, dass
- die approximierenden Funktionen $T_n[f, x_0]$ Polynome — also sehr einfache Funktionen sind.
 - die approximierenden Funktionen $T_n[f, x_0]$ ganz leicht und explizit aus f berechnet werden können — mittels der Ableitungen von f an dem einzigen Punkt x_0 .
- (ii) Damit sind aber noch wichtige Fragen bezüglich der Konvergenz von Taylorreihen im Allgemeinen offen, nämlich
- Für welche x konvergiert die Taylorreihe einer gegebenen Funktion. Natürlich konvergiert sie in x_0 , aber wie sieht es darüber hinaus aus?

- Falls die Taylorreihe $T_n[f, x_0]$ überhaupt konvergiert, konvergiert sie dann auch gegen f ? Diese Frage ist (offensichtlich vgl. 4.3.2) äquivalent zur Frage, ob das Restglied R_n gegen 0 konvergiert.

Um diese Fragen besser untersuchen zu können, geben wir eine alternative Form des Restglieds an.

Korollar 4.3.6 (Lagrange-Form des Restglieds).

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^{n+1} -Funktion auf dem Intervall I und sei $x_0 \in I$. Dann gibt es ein $\xi \in I$ sodass gilt

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + R_{n+1}(x) \quad \text{und} \quad R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

Beweis (Anwenden des MWS der Integralrechnung auf die Integralform des Restglieds $R_{n+1}(x)$ in 4.3.2).

Wegen 4.1.22 $\exists \xi \in [x_0, x]$ mit

$(x-t) \geq 0$, daher 4.1.22 anwendbar

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &\stackrel{4.3.2}{=} \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \stackrel{4.1.22}{=} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^x (x-t)^n dt \\ &\stackrel{\text{Int}}{=} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} \Big|_{x_0}^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Nun fällt uns dann das Hauptresultat des Abschnitts ohne weitere Arbeit in den Schoß!

Theorem 4.3.7 (Satz von Taylor).

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und sei x_0 ein Punkt im Intervall I .

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in I$ gilt

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + R_{n+1}(x),$$

wobei für das Restglied gilt

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

für ein $\xi \in [x_0, x]$.

(ii) Für $x \in I$ konvergiert die Taylor-Reihe $T[f, x_0](x)$ gegen $f(x)$, genau dann wenn das Restglied $R_n(x)$ gegen 0 geht, d.h.

$$f(x) = T[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \text{ gilt.}$$

Beispiel 4.3.8 (Exponentialreihe — Restgliedabschätzung).

Wir wissen schon aus 4.3.4, dass $T_n[\exp, 0](x) \rightarrow \exp(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Daher gilt nach

dem Satz von Taylor $R_n(x) \rightarrow 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Das lässt sich aber auch direkt verifizieren, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$R_n(x) = \exp(\xi) \frac{x^n}{n!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Beispiel 4.3.9 (Reihenentwicklung des Logarithmus).

Wir betrachten

$$f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \log(1+x)$$

und entwickeln f um $x_0 = 0^2$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \dots,$$

induktiv ergibt sich

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n \geq 1)$$

Damit erhalten wir $f(0) = 0$, $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ und daher

$$T[f, 0](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

Um zu überprüfen, ob $T[f, 0](x)$ auch gegen $f(x) = \log(1+x)$ konvergiert, müssen wir das Restglied abschätzen.

Zunächst betrachten wir den Fall $0 < x \leq 1$ und somit $0 < \xi \leq x \leq 1$. Es gilt

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\xi)^n} x^n \right| \leq \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Für $-1 < x < 0$ und somit $-1 < x \leq \xi < 0$ gilt

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{1+\xi} \right)^n \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Insgesamt erhalten wir also für $-1 < x \leq 1$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Graphisch sieht die Situation wie in Abb. 4.14 dargestellt aus. Speziell für $x = 1$ ergibt sich die wichtige Darstellung

$$\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

² Die Funktion $\log(x)$ um $x_0 = 0$ zu entwickeln ist offensichtlich keine gute Idee — daher entwickeln wir $\log(1+x)$ um $x_0 = 0$.

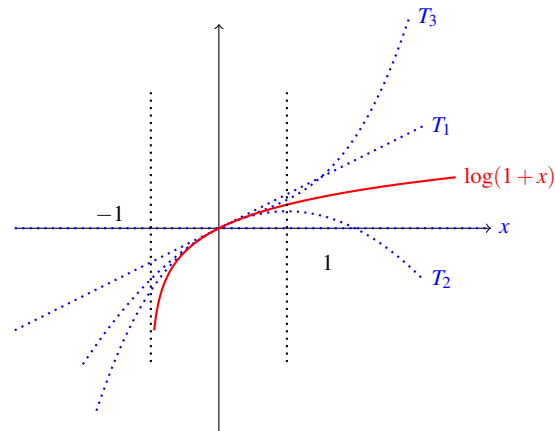


Abb. 4.14 Die Taylorreihe von $\log(1+x)$ konvergiert für alle $-1 < x \leq 1$.

Schließlich können wir auf diese Weise auch $\log(y)$ für $y > 2$ berechnen. Dazu wähle $0 < x < 1$ und $r > 1$, sodass $y = (1+x)^r$. Dann gilt $\log(y) = r \log(1+x)$.

Warnung 4.3.10 (Fehlverhalten der Taylorreihe).

- (i) Eine Taylorreihe muss außer im Entwicklungspunkt x_0 gar nicht konvergieren.
- (ii) Selbst falls die Taylorreihe konvergiert, muss sie nicht gegen die ursprüngliche Funktion konvergieren, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.3.11 (Zu flach für Taylor).

Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

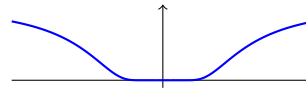


Abb. 4.15 Der Graph von f ist zu flach um 0

- (i) Wir zeigen zunächst $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{(k)}(0) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$.
Dazu zeigen wir mittels Induktion, dass $f \in C^n(\mathbb{R}) \forall n \in \mathbb{N}$ und $f^{(n)}(0) = 0$.
Dazu behaupten wir

$$\exists \text{ Polynom } p_n, \text{ sodass } f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0. \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Daraus folgt dann die Aussage, denn

$$p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{y:=\frac{1}{x}}{=} \frac{p_n(y)}{e^{y^2}} \rightarrow 0 \quad \text{nach 2.3.7(ii).}$$

Wir beweisen also (4.16) mittels vollständiger Induktion:

Für $n = 0$ ist (4.16) erfüllt mit $p_0 = 1$.

$n \mapsto n + 1$: Sei $x \neq 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &\stackrel{\text{L.V.}}{=} \left(p_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right)' \\ &\stackrel{\text{K.R.}}{=} p_n' \left(\frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n \left(\frac{1}{x} \right) \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left(p_n' \left(\frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) + p_n \left(\frac{1}{x} \right) \frac{2}{x^3} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} =: p_{n+1} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

(ii) Damit gilt nun

$$T[f, 0](x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

was natürlich $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergent ist, also gilt

$$\boxed{T[f, 0](x) = 0 \neq f(x) \text{ für } x \neq 0.}$$

Das Fazit dieses Beispiels ist, dass f bei 0 „so flach“ ist (vgl. Abb. 4.15), dass $f^{(k)}(0) = 0$ für alle k gilt und daher die Taylorreihe verschwindet — nicht aber die gesamte Funktion.

Beispiel 4.3.12 (Binomialreihe).

Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Wir betrachten

$$f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (1+x)^\alpha$$

und entwickeln nach Taylor in $x_0 = 0$.

(i) Es gilt $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ ($k \in \mathbb{N}$), daher gilt $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$ und somit für die Taylorreihe

$$\boxed{T[f, 0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k}$$

(ii) Die Reihe konvergiert $\forall |x| < 1$ absolut wegen dem Quotientenkriterium, denn

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k} \right| = \left| \frac{\alpha - k}{k + 1} \right| |x| \rightarrow |x| < 1.$$

(iii) Die Taylorreihe konvergiert auch gegen f , falls $|x| < 1$, denn

• für $0 \leq x < 1$ gilt mit $\xi \in [0, x]$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} x^n = \binom{\alpha}{n} (1+\xi)^{\alpha-n} x^n$$

Falls nun n so groß ist, dass $\alpha - n < 0$ gilt, ist $(1 + \xi)^{\alpha-n} < 1$. Weil $T[f, 0](x)$ absolut konvergiert gilt außerdem $\left| \binom{\alpha}{n} x^n \right| \rightarrow 0$ und daher

$$|R_n(x)| \leq \left| \binom{\alpha}{n} x^n \right| \rightarrow 0.$$

- Für $-1 < x < 0$ verwenden wir die Integralform von R_n und erhalten (substituiere $t \mapsto -t$)

$$R_n(x) = n \binom{\alpha}{n} \int_0^{|x|} (x+t)^{n-1} (1-t)^{\alpha-n} dt$$

Nun gilt für $0 > x, 0 \leq t \leq |x| < 1$,

$$|x+t| \leq |x|-t \leq |x|-|x|t = |x|(1-t) \quad (4.17)$$

und

$$n \binom{\alpha}{n} = n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 2} = \alpha \binom{\alpha-1}{n-1}. \quad (4.18)$$

Damit also

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\stackrel{(4.17)}{\leq} \left| n \binom{\alpha}{n} \right| |x|^{n-1} \int_0^{|x|} (1-t)^{n-1} (1-t)^{\alpha-n} dt \\ &\stackrel{(4.18)}{=} \left| \alpha \binom{\alpha-1}{n-1} \right| |x|^{n-1} \int_0^{|x|} (1-t)^{\alpha-1} dt \\ &= \underbrace{|\alpha| \int_0^{|x|} (1-t)^{\alpha-1} dt}_{\text{unabhängig von } n} \underbrace{\left| \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n-1} \right|}_{\rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{für } |x| < 1, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

Motivation 4.3.13 (Taylor und Theorie).

Nach diesen praktischen und praktisch wichtigen Beispielen verwenden wir den Satz von Taylor auch als Werkzeug, um die Theorie weiter zu entwickeln. Konkreter beweisen wir ein einfaches Werkzeug, um *Polynome zu entlarven*.

Bemerkung 4.3.14 (Polynome und verschwindende Ableitungen).

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad n , d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Dann gilt $f^{(n+1)}(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Tatsächlich folgt leicht mittels Induktion, dass

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} \quad \text{für } n \leq k,$$

also insbesondere $(x^n)^{(n)} = n!$ und $(x^n)^{(n+1)} = 0$ gilt.

Polynome haben also die Eigenschaft, dass eine und damit alle Ableitungen ab einer gewissen Ordnung verschwinden. Umgekehrt, falls eine Funktion $f \in C^\infty$ diese Eigenschaft besitzt, dann muss f schon ein Polynom gewesen sein — das ist eine Konsequenz des Satzes von Taylor, wie wir gleich sehen werden.

Zusammengefasst gilt also für $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$f \text{ Polynom} \iff \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } f^{(k)}(x) = 0 \forall x$$

Korollar 4.3.15 (Funktion mit verschwindenden Ableitungen sind Polynome).

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n+1)$ -mal differenzierbare Funktion. Falls $f^{(n+1)}(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$, dann ist f ein Polynom vom Grad höchstens n .

Beweis (Einfach den Satz von Taylor verwenden!).

Es gilt $f^{(n+1)} = 0$ also ist $f^{(n+1)}$ stetig, also $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ und wir können 4.3.2 verwenden. Wegen $f^{(n+1)} = 0$ gilt aber $R_{n+1} = 0$ und daher $f(x) = T_n[f, 0](x)$. Also ist f ein Polynom vom Grad höchstens n . \square

4.4 Uneigentliche Integrale

Motivation 4.4.1. Der im Abschnitt 4.1 entwickelte und seither (erfolgreich) verwendete Integralbegriff ist für manche Anwendungen allerdings zu eng gefasst. Seine beiden diesbezüglichen „Schönheitsfehler“ sind:

- Wir haben nur über *kompakte Intervalle* integriert.
- Riemann-integrierbare Funktionen sind notwendigerweise *beschränkt*.

Um Funktionen auch über unbeschränkte Intervalle zu integrieren und unbeschränkte Funktionen zu integrieren, lernen wir nun die sogenannten *uneigentlichen Integrale* kennen. Diese werden wir unter geeigneten Bedingungen als Grenzwert von Riemann-Integralen definieren. Wir betrachten drei Fälle.

Definition 4.4.2 (Uneig. Int., Fall 1: Eine unendliche Intervallgrenze).

Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass f Riemann-integrierbar auf jedem Intervall $[a, R]$ mit $a < R < \infty$ ist. Falls

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(t) dt \text{ existiert und endlich ist,}$$

Limes der Fkt.
 $R \mapsto \int_a^R f$

so heißt das Integral $\int_a^\infty f(t) dt$ konvergent (wir schreiben auch $\int_a^\infty f(t) dt < \infty$) und setzen

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(t)dt.$$

Analog definieren wir für $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^b f(t)dt$.

Beispiel 4.4.3 (Uneigentliches Integral Fall 1).

(i) Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1} \text{ für } s > 1.$$

Tatsächlich ist $\frac{1}{x^s}$ stetig und daher Riemann-integrierbar auf jedem Intervall $[1, R]$ und es gilt

$$\int_1^R \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} \Big|_1^R = \frac{1}{s-1} \left(1 - \underbrace{\frac{1}{R^{s-1}}}_{\rightarrow 0 \text{ (} s > 1)} \right) \rightarrow \frac{1}{s-1} \quad (R \rightarrow \infty). \quad (4.19)$$

(ii) Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \text{ divergiert für } s \leq 1,$$

denn für $s \neq 1$ können wir die Rechnung in (4.19) verwenden und sehen $\frac{1}{s-1} \left(1 - \frac{1}{R^{s-1}} \right) \rightarrow \infty$. Für $s = 1$ gilt mit 2.3.7(iv)

$$\int_1^R \frac{dx}{x} = \log(x) \Big|_1^R = \log(R) \rightarrow \infty \quad (R \rightarrow \infty).$$

(iii) Insgesamt gilt also

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \text{ konvergiert } \iff s > 1$$

und wir können die Situation wie in Abb.4.16 veranschaulichen.

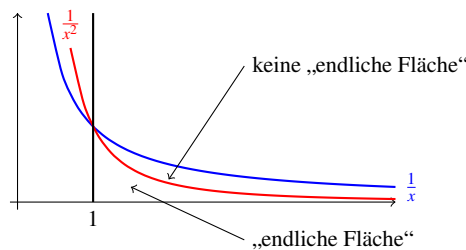


Abb. 4.16 Konvergenzverhalten der Integrale von $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x^2}$ in $[1, \infty)$

Definition 4.4.4 (Uneig. Int., Fall 2: Integrand an einer Integrationsgrenze unbeschränkt/undefiniert).

Sei $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass f auf jedem Intervall $[a + \varepsilon, b]$ ($\varepsilon > 0$) Riemann-integrierbar ist. Falls

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(t) dt \text{ existiert und endlich ist,}$$

so heißt das Integral $\int_a^b f(t) dt$ konvergent ($\int_a^b f < \infty$) und wir setzen

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(t) dt.$$

Analog definieren wir für $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t) dt$.

Beispiel 4.4.5 (Uneig. Integral, Fall 2).

Es gilt

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} \text{ konvergiert} \iff s < 1.$$

Bemerke zunächst, dass $\frac{1}{x^s}$ undefiniert in $x = 0$ ist, falls $s > 0$ gilt. Tatsächlich gilt für $s \neq 1$ und $1 > \varepsilon > 0$.

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^s} = \left. \frac{1}{1-s} x^{1-s} \right|_{\varepsilon}^1 = \frac{1 - \varepsilon^{1-s}}{1-s} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{1-s} & s < 1 \\ \infty & s > 1 \end{cases}$$

Falls $s = 1$ und $1 > \varepsilon > 0$, dann gilt

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \log(x) \Big|_{\varepsilon}^1 = -\log(\varepsilon) \xrightarrow{2.3.7(iv)} \infty \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Schließlich illustrieren wir die Situation wieder wie in Abb.4.17 gezeigt:

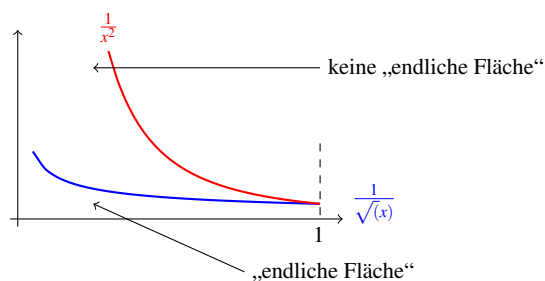


Abb. 4.17 Konvergenzverhalten der Integrale von $\frac{1}{x^2}$ und $\frac{1}{\sqrt{x}}$ in $(0, 1]$

Definition 4.4.6 (Uneig. Int., Fall 3: Kombierter Fall — beide Integrationsgrenzen kritisch).

Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften, dass f Riemann-integrierbar auf jedem Intervall $[\alpha, \beta]$ mit $a < \alpha < \beta < b$ ist. Falls für ein beliebiges $c \in (a, b)$

die uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(t)dt$ und $\int_c^b f(t)dt$ konvergieren,

so heißt das Integral $\int_a^b f(t)dt$ konvergent ($\int_a^b f < \infty$) und wir setzen

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Diese Def. ist unabhängig von der Wahl von c — ohne Beweis

Beispiel 4.4.7 (Uneigentliche Integrale, Fall 3).

(i) Es gilt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^s} \text{ divergiert } \forall s \in \mathbb{R}.$$

Tatsächlich setze $c = 1$, dann gilt

$$4.4.3 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx \text{ divergiert } \forall s \leq 1, \quad 4.4.5 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^s} dx \text{ divergiert } \forall s \geq 1$$

Wir veranschaulichen die Funktionen nochmals in Abb. 4.18:

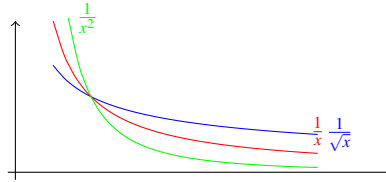


Abb. 4.18 Konvergenzverhalten der Integrale von $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ und $\frac{1}{\sqrt{x}}$ in $(0, \infty)$

(ii) Es gilt

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

(vgl. Abb. 4.19), denn mit $c = 0$ haben wir

$$\int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \stackrel{3.1.31(iii)}{=} -\arcsin(-1+\varepsilon)$$

$$\rightarrow -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(1-\varepsilon)$$

$$\rightarrow \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

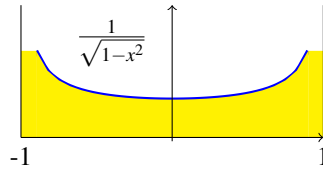


Abb. 4.19 Fläche unter dem Graphen von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(vgl. den Graph von arcsin in Abb.4.20)
Daher gilt

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

(iii) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi,$$

vgl. Abb. 4.21. Sei $R > 0$, dann gilt nämlich

$$\int_{-R}^0 \frac{dx}{1+x^2} = -\arctan(-R) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (R \rightarrow \infty),$$

$$\int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(R) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (R \rightarrow \infty),$$

(vgl. den Graph von arctan in Abb.4.22) und daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

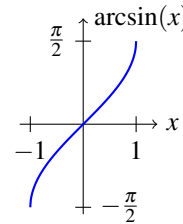


Abb. 4.20 Graph des Arcussinus

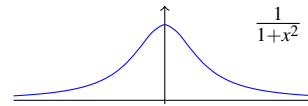


Abb. 4.21 Graph von $\frac{1}{1+x^2}$

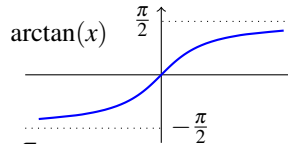


Abb. 4.22 Graph des Arcustangens

Motivation 4.4.8 (Konvergenztests für uneig. Int.).

Ganz ähnlich zu den Konvergenztests für Reihen, siehe Abschnitt 1.4, lassen sich Konvergenztests für uneig. Integrale formulieren, die es einem ersparen, die oft umständlichen Integrale, die in den Definitionen gefragt sind, zu berechnen.

Wir formulieren die Tests nur für den Fall 1. Eine Anpassung an die Fälle 2 und 3 ist reine Routine-Arbeit, die wir hier unterlassen.

Proposition 4.4.9 (Konvergenztests für uneig. Int.).

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Definition 4.4.2, d.h. f Riemann-integrierbar für jedes Intervall $[a, R]$ mit $a < R < \infty$. Dann gilt:

(i) Cauchy-Prinzip:

$$\int_a^{\infty} f(t)dt \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists R > a \forall r, s > R : \left| \int_r^s f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

(ii) Majorantenkriterium: Sei $h : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h \geq 0$ und $\int_a^\infty h(t)dt$ konvergent. Falls

$$|f(x)| \leq h(x) \quad \forall x > a \Rightarrow \int_a^\infty f(t)dt \text{ konvergiert.}$$

(iii) Minorantenkriterium: Sei $g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g \geq 0$ und $\int_a^\infty g(t)dt$ divergent. Falls

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x > a \Rightarrow \int_a^\infty f(t)dt \text{ divergiert.}$$

Beweis. (i) \Leftarrow : Sei (R_n) eine Folge mit $R_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $R > a$ wie in der Bedingung.

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : R_n > R \quad \forall n \geq N$$

$$\stackrel{\text{Vor.}}{\Rightarrow} \left| \int_{R_m}^{R_n} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

$$\stackrel{1.3.16}{\Rightarrow} \left(\int_a^{R_n} f(t)dt \right)_n \text{ ist eine Cauchy-Folge}$$

$$\stackrel{1.3.18}{\Rightarrow} \left(\int_a^{R_n} f(t)dt \right)_n \text{ konvergiert} \stackrel{4.4.2}{\Rightarrow} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(t)dt \text{ existiert.}$$

$$a_n = \int_a^{R_n} f, \quad |a_n - a_m| = \left| \int_a^{R_n} f - \int_a^{R_m} f \right| = \left| \int_{R_m}^{R_n} f \right|$$

(i) \Rightarrow : Indirekt angenommen, $\int_a^\infty f(t)dt$ konvergiert, aber die Bedingung auf der rechten Seite ist verletzt, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \exists r_n, s_n > n : \left| \int_{r_n}^{s_n} f(t)dt \right| \geq \varepsilon. \quad (4.20)$$

Nun gilt aber $r_n \rightarrow \infty$, $s_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) und wir definieren eine neue Folge R_n durch Mischung von r_n, s_n , d.h.

$$R_{2k} = r_k, \quad R_{2k+1} = s_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

Dann gilt $R_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) und weil $\int_a^\infty f(t)dt$ konvergiert

$$\stackrel{4.4.2}{\Rightarrow} \left(\int_a^{R_m} f(t)dt \right)_m \text{ konvergiert}$$

$$\stackrel{1.3.18}{\Rightarrow} \left(\int_a^{R_m} f(d)dt \right)_m \text{ ist eine Cauchy-Folge}$$

$$\Rightarrow \text{Widerspruch zu (4.20)}$$

(ii) Folgt aus (i): Sei $\varepsilon > 0$ und R wie in (i) für h und $r, s > R$. Dann gilt

$$\left| \int_r^s f(t) dt \right| \stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \int_r^s |f(t)| dt \stackrel{4.1.15}{\leq} \int_r^s h(t) dt < \varepsilon$$

$$\stackrel{(i)}{\Rightarrow} \int_a^\infty f < \infty.$$

(i) für $h \Rightarrow$ (i) für f

(iii) Folgt sofort aus (ii): Indirekt angenommen $\int_a^\infty f < \infty \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \int_a^\infty g < \infty$ im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Beispiel 4.4.10 (Konvergenztests).

(i) $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ konvergiert wegen 4.4.9(ii), denn

$$\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \text{ und } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \text{ konvergiert.}$$

4.4.3(i)

Majorantenkriterium funktioniert hier nicht!

(ii) $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ konvergiert, vgl. Abb.4.23

Wir wenden das Cauchy-Prinzip an:
Seien $1 < r < s$, dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_r^s \frac{\sin(x)}{x} dx \right| &\stackrel{\text{Pl.}}{=} \left| -\frac{\cos(x)}{x} \Big|_r^s - \int_r^s \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \left| \frac{\cos(r)}{r} - \frac{\cos(s)}{s} \right| + \left| \int_r^s \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) + \int_r^s \frac{dx}{x^2} \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck wird beliebig klein für r, s groß ($\frac{1}{r}, \frac{1}{s} \rightarrow 0$ und $\left| \int_r^s \frac{1}{x^2} \right| < \varepsilon$ laut Cauchy-Prinzip, vgl. Abb.4.24.)

Bemerkung: Wir sind hier hart an der Grenze des möglichen, denn $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ divergiert und auch $\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x} dx!$

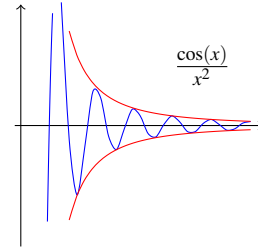


Abb. 4.23 Die Funktion $\frac{\cos(x)}{x^2}$ lässt sich durch die Majorante $\frac{1}{x^2}$ beschränken.

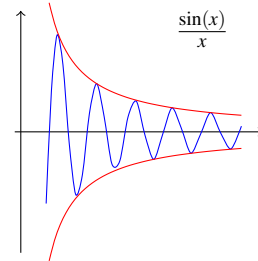


Abb. 4.24 Konvergenz des Integrals $\frac{\sin(x)}{x}$ mittels Cauchy-Prinzip.

Motivation 4.4.11 (Integraltest für Reihen).

Die Analogie zwischen Konvergenztests für uneigentliche Integrale und Reihen erlaubt eine Verbindung zwischen den beiden herzustellen, den sog. Integraltest für Reihen, der die bisherigen Tests ergänzt.

Proposition 4.4.12 (Integraltest für Reihen).

Sei $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine monoton fallende Funktion. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_1^{\infty} f(t) dt \text{ konvergiert.}$$

Beweis. Wir definieren Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) := f(n), \quad \psi(x) := f(n+1) \quad (n \leq x < n+1)$$

f monoton fallend $\Rightarrow \psi \leq f \leq \varphi$. Integration über $[1, N]$ liefert

$$\sum_{n=2}^N f(n) = \int_1^N \psi(t) dt \stackrel{4.1.15}{\leq} \int_1^N f(t) dt \stackrel{4.1.15}{\leq} \int_1^N \varphi(t) dt = \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Daher

$$\int_1^{\infty} f < \infty \Rightarrow s_N = \sum_{n=1}^N f(n) \text{ beschränkt} \stackrel{1.4.6}{\Rightarrow} \sum_{n=2}^{\infty} f(n) < \infty$$

und umgekehrt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \Rightarrow \forall \text{ monoton wachsende Folgen } R_n \text{ mit } R_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty) \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned} & \left(\int_1^{R_n} f(t) dt \right)_n \text{ monoton wachsend und beschränkt} \\ & \stackrel{1.3.25}{\Rightarrow} \left(\int_1^{R_n} f(t) dt \right)_n \text{ konvergiert} \Rightarrow \int_1^{\infty} f < \infty. \square \end{aligned}$$

Beispiel 4.4.13 ($\sum \frac{1}{n^s}$ zum Zweiten, vgl. 1.4.10).

Für $s > 0$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ konvergiert} \stackrel{4.4.12}{\iff} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} \text{ konvergiert} \stackrel{4.4.3(ii)}{\iff} s > 1.$$

Literaturverzeichnis

1. Amann, H., Escher, J.: Analysis I. Birkhäuser, 3. Auflage, Basel (2006)
2. Barner, M., Flohr F.: Analysis I. de Gruyter, 5. Auflage, Berlin (2000)
3. Behrends, E.: Analysis Band 1 (Ein Lernbuch für den sanften Wechsel von der Schule zur Uni). Springer-Spektrum, 6. Auflage, Berlin, Heidelberg (2014)
4. Deiser, O.: Analysis 1 (Mathematik für das Lehramt), Springer-Spektrum, 2. Auflage, Berlin, Heidelberg (2013)
5. Forster, O.: Analysis 1, Springer-Spektrum, 12. Auflage, Berlin, Heidelberg (2016)
6. Kuba, G., Götz, S.: Zahlen. S. Fischer, Frankfurt am Main (2004)
7. Schickl, H., Steinbauer, R.: Einführung in das mathematische Arbeiten. Springer-Spektrum, Berlin, 3. Auflage (2018)
8. Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis. Teil 1. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 17. Auflage (2009)
9. Hörmann, G., Langer, D.: Vorlesungsskriptum zu „Einführung in die Analysis“, Universität Wien, online unter www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/08einan/einfanalysis.pdf, 2010.
10. Hörmann, G., Langer, D.: Vorlesungsskriptum zum „Modul Analysis“, Universität Wien, online unter www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/0809an/modul_analysis.pdf, 2009.

Sachverzeichnis

- b*-adische Entwicklung, 72
- überabzählbar, 10

- Ableitung, 148
 - einseitig, 149
 - höhere, 165
- Absolutbetrag, 8, 85, 151
 - komplexer, 125
- abzählbar, 10
- allgemeine Potenz, 121
- allgemeine Potenzfunktion, 121, 164
- archimedische Eigenschaft, 12
- Arcuscosinus, 139
- Arcussinus, 140, 165
- Arcustangens, 140, 165

- Berührungspunkt, 55
- Bernoulli-Ungleichung, 17
- beschränkt, 10
- bijektiv, 84
- Binomialreihe, 219
- Bolzano-Weierstraß, 47

- Cauchy-Folge, 50
- Cauchy-Prinzip
 - für Folgen, 50
 - für Reihen, 59
- Cauchy-Produkt für Reihen, 77
- Cosinus, 132, 133, 150, 209
- Cosinus hyperbolicus, 99
- Cotangens, 138

- De L'Hospital, 183
- dehnungsbeschränkt, 174
- Dehnungsschranke, 174
- Dichtheit von \mathbb{Q} in \mathbb{R} , 13, 56, 74
- Differentialquotient, 148

- Differenzenquotient, 147
- Differenzierbarkeit, 148
 - der Umkehrfunktion, 163
 - als lineare Approximation, 158
 - Kettenregel, 161
 - Produktregel, 156
 - Quotientenregel, 156
- Dirichlet-Funktion, 87, 193
- Dreiecksungleichung, 9
 - für Riemann-Integrale, 198
 - verkehrte, 9

- eulersche Zahl, 79
- Exponential
 - funktion, 79, 85, 122, 150, 181, 209, 214
 - funktion, komplexe, 130
 - reihe, 78, 216
 - reihe, komplexe, 130
- Extremwert, 167
 - hinreichende Bedingung, 177
 - notwendige Bedingung, 168

- Fehlerabschätzung für exp, 80
 - komplexe, 130
- Fixpunktsatz, 109
- Folge, 19
 - (streng) monoton fallende, 52
 - (streng) monoton wachsende, 52
 - beschränkt, 27
 - bestimmt divergent, 40
 - divergente, 24
 - Fibonacci, 22
 - geometrische, 22
 - komplexe, 19, 126
 - konstante, 20
 - konvergente, 23
 - reelle, 19

- uneigentlich konvergent, 40
- Folgenstetigkeit, 93
- Funktion, 84
 - beschränkte, 111
 - charakteristische, 87
 - konkave, 179
 - konstante, 84, 149
 - konvexe, 179
 - lineare, 85
 - negativer Teil, 198
 - positiver Teil, 198
 - rationale, 86, 157
- Funktionalgleichung
 - komplexe, 130
 - der Exponentialfunktion, 79
 - des Logarithmus, 119
- Gauß-Klammer, 73, 85
- Gaußglocke, 99
- geometrische Reihe, 22
- geometrische Summe, 18
- Grenzwert, 23
 - einer Funktion, 100
 - einseitig, 101
 - uneigentlich, 41, 101
- Häufungspunkt, 55
- Häufungswert einer Folge, 45
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 204
- identische Abbildung, 84
- imaginäre Einheit, 5, 6
- Induktionsprinzip, 16
- Infimum, 10
- injektiv, 84
- Integrabilitätskriterium, 194
- Integral für Treppenfunktionen, 190
- Integraltest für Reihen, 227
- Intervall, 8
 - Durchmesser, 57
 - innerer Punkt, 167
 - kompakt, 104
 - Randpunkt, 167
- Intervallschachtelungsprinzip, 57
- komplexen Konjugation, 7
- Konvergenzprinzipien, 49
- Konvergenztests für uneigentliche Integrale, 225
- Kreiszahl π , 136
- Lagrange-Form des Taylorrestglieds, 216
- Leibnitz-Kriterium, 63
- Limes superior, inferior, 49
- Lipschitz-Konstante, 174
- Lipschitz-stetig, 174
- Logarithmus, 119, 164, 181, 217
- lokale Minima, 167
- lokales Maximum, 167
 - striktes, 167
- lokales Minimum
 - striktes, 167
- Majorantenkriterium, 68
- Minorantenkriterium, 68
- Mittelwertsatz
 - der Differentialrechnung, 171
 - der Differentialrechnung, verallgemeinerter, 183
 - Integralrechnung, 200
- Momentangeschwindigkeit, 154
- Monotonie und Ableitung, 175
- Nullfolge, 24
- Nullstellensatz, 105
- Oberintegral, 193
- Ordnung
 - natürliche, 7
- Ordnungsrelation, 7
- ordnungsvollständig, 11
- Ordnungsvollständigkeit, 10, 58
- Partialsumme, 36
- Partialsummen, 35
- Partielle Integration, 210
- Peano-Axiome, 15
- periodische Dezimalzahlen, 39
- Polarkoordinaten, 6
- Polynomfunktion, 85, 181
- Quotientenfunktion, 87
- Quotiententest, 70
- Reihe, 36
 - absolut konvergent, 66
 - alternierend, 62
 - alternierende harmonische, 64
 - geometrische, 38
 - harmonische, 61
 - komplexe, 128
 - konvergente, 36
- Riemann-Integral, 193
 - Linearität, 196
 - Monotonie, 196
- Riemannsummen, 201
- Sandwich-Lemma, 33

- Satz von Dedekind, 12
- Satz von Minimum und Maximum, 111
- Satz von Rolle, 172
- Satz von Taylor, 216
- Schmiegegerade, 152
- Schranke
 - obere, 10
 - untere, 10
- Sinus, 132, 133, 150, 160, 166, 175, 177, 209
- Sinus hyperbolicus, 99
- Stützstelle, 201
- Stammfunktion, 203
- Stetigkeit, 89
 - gleichmäßige, 114
 - komplexe, 128
- striktes lokales Maximum, 167
- Substitutionsregel der Integralrechnung, 210
- Supremum, 11
- Supremumseigenschaft, 10
- surjektiv, 84

- Tangens, 138, 157
- Tangente, 148
- Tangentenproblem, 152
- Taylor-Polynom, 214
- Taylor-Reihe, 214
- Taylorformel, 213
- Teilfolge, 43

- Totalordnung, 7
- Treppenfunktion, 86, 189, 193
- Trichotomie, 7

- Umkehrfunktion, 163
- Umkehrsatz, 116
- Umordnung von Reihen, 65
- Umordnungssatz, 66
- unbeschränkt, 10
- Uneigentliche Integrale, 221, 223, 224
- Unstetigkeit, 91
- Unterintegral, 193

- Verknüpfung von Funktionen, 87
- Vollständigkeit \mathbb{C} , 127

- Wachstumsschranke, 173
- Wendestellen, 181
- Wohlordnung der natürlichen Zahlen, 16
- Wurzel, 13, 85
- Wurzeltest, 68

- Zahlen
 - komplexe, 5
 - natürliche, 15
 - reelle, 4, 7, 12
- Zwischenwertsatz, 107