Roland Steinbauer

Analysis für das Lehramt

Eine Einladung

Sommersemester 2024
(Version 15-Feb-2024)

Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Oskar-Morgenstern-Platz 1
A-1090 Wien, Österreich
roland.steinbauer@univie.ac.at
http://www.mat.univie.ac.at/ stein

Vorwort

Das vorliegende Skriptum begleitet die Vorlesung

„Analysis in einer Variable für das Lehramt"

vom Sommersemester 2024 an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien. Es ist eine leichte Weiterentwicklung meines gleichnamigen Skriptums aus den Sommersemestern 2022 bzw. 2020 und beruht auf meinen früheren handschriftlichen Vorlesungsausarbeitungen zur *"Einführung in die Analysis"* vom Sommersemester 2012 und zur *"Analysis in einer Variable für LAK"* vom Wintersemester 2012/13.

Viel Inspiration verdanke ich den Analysis-Skripten von Günther Hörmann, die wiederum Anleihen an den feinen Lehrbüchern von Otto Forster nehmen. Neben ihm haben mich in meiner Art Vorlesungen & Skripten zu gestalten vor allem mein Doktorvater Michael Grosser und Michael Kunzinger beeinflusst. Viel verdanke ich auch den Vorlesungen meines frühen akademischen Lehrers Karl Sigmund und natürlich meinem „partner in crime" Hermann Schichl. Viel gelernt habe ich von Josef Hofbauer und Andreas Kriegl, deren Vorlesungszyklen zur Analysis ich als Übungsleiter begleitet habe.

Meine Begeisterung für die Anfänger*innen-Lehre hat Hans-Christian Reichel geweckt und für die Lehre im Lehramtsstudium Stefan Götz. Von ihm und von Christoph Ableitinger habe ich ganz Wesentliches über Fachdidaktik gelernt und von Evelyn Süss-Stepancik und Sonja Kramer viel über die Mathematik in der Schule.

Die LaTeX-nische Umsetzung dieses Skriptums haben Argam Ohanyan und Liam Urban übernommen und danach Carina Aschauer und Lisa Paradeisz jeweils einen Korrekturdurchgang. Allen vier bin ich für ihre sorgfältige Arbeit zu großem Dank verpflichtet, ebenso wie den vielen Student*innen, die mich über die Jahre auf Fehler und Ungereimtheiten aufmerksam gemacht haben oder mich mit ihren Fragen herausgefordert, noch mehr nach Klarheit der Darstellung zu streben. Diesbezüglich habe ich natürlich auch viel von der Zusammenarbeit mit „meinen" Übungsleiter*innen profitiert.

Klarerweise liegt die Verantwortung für alle verbliebenen Fehler und Schwächen des Texts bei mir alleine und ich freue mich über dementsprechende Hinweise.

Wien, Februar 2024 *Roland Steinbauer*

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0
Einleitung

Zusammenfassung. In dieser Einleitung beginnen wir mit einigen inhaltlichen und methodischen Vorbemerkungen in Abschnitt 0.0. Dann legen wir in Abschnitt 0.1 den axiomatischen Grundstein, auf dem wir die gesamte Analysis aufbauen werden.

0.0 Was will und was soll die Analysis?

In diesem Skript hat jeder Absatz eine Nummer

0.0.1 (Mathematik zu Studienbeginn).
Zu Beginn jedes Mathematikstudiums stehen zwei Bereiche im Vordergrund

- Lineare Algebra und Geometrie
- Analysis

Lösen linearer Gleichungssysteme und der daraus entwickelte abstrakte Begriffsapparat

Grenzwerte, Differential- und Integralrechnung

Die Themen der Analysis sind also schon aus der Schulmathematik geläufig; sie wird an der Universität allerdings axiomatisch aufgebaut. Daher ist zu Beginn eher das *WIE* als das *WAS* ein Problem. [Für viele Studierende ist die (erste) Analysis-Vorlesung die relativ schwierigste des gesamten Studiums]

0.0.2 (Analysis – Eine erste Inhaltsbestimmung).
Der inhaltliche Kern der Analysis ist die *Differential- und Integralrechnung* (in einer und in mehreren Variablen). Etwas genauer steht im Zentrum der Analysis die Frage, wie man das *Änderungsverhalten von Funktionen verstehen, beschreiben und beherrschen* kann.
Noch genauer: Welche Begriffe eignen sich am Besten dazu, die Änderung einer

Funktion im Kleinen zu erfassen und was kann man daraus über die Funktion im Großen lernen?

für kleine Änderungen
der unabhängigen Variablen

Gesamtverlauf
der Funktion

Beispiel 0.0.3 (Fahrradfahren).
Wann und wie kann aus der Kenntnis der *Momentangeschwindigkeit* (Änderung im Kleinen) zu jedem Zeitpunkt der *Gesamtverlauf der Fahrt* (zurückgelegte Strecke, die Funktion im Großen) rekonstruiert werden? Bei einem Fahrrad werden diese Größen durch den Tachometer bzw. Tageskilometerzähler angezeigt. Aber was bedeuten diese Begriffe *wirklich* und wie kann obige Frage *systematisch* beantwortet werden? Das führt uns auf:

0.0.4 (Der Analytische Begriffsapparat).
Jede ernsthafte Untersuchung obiger Fragen führt notwendigerweise auf den

<u>***GRENZWERTBEGRIFF***</u>

und seine zahlreichen Erscheinungsformen – Er ist *das* Herzstück[1] der Analysis und liegt gleichermaßen der Differential- und Integralrechnung zugrunde!

0.0.5 (Und wozu das Ganze?).
Was hat diese (zunächst vielleicht etwas trocken scheinende) Materie mit der echten Welt zu tun?

<u>***SEHR VIEL!***</u>

Die Entwicklung der Analysis ging Hand in Hand mit der Entwicklung der modernen Physik (etwa durch Newton, Euler, Lagrange, Laplace, ...) und steht somit im Zentrum der naturwissenschaftlich-technischen Revolution, die unsere Welt und Gesellschaft in den letzten vier Jahrhunderten so tiefgreifend verändert hat. Insofern ist die Differential- und Integralrechnung eine elementare Kulturtechnik sowie die Schrift und nimmt meiner Ansicht nach ganz zu Recht viel Platz in der Schulmathematik ein.

0.0.6 (Ja schön, aber wie? Zur Methodik).
Die historische Entwicklung hat gezeigt, dass es unbedingt notwendig ist – und es ist in der Hochschulmathematik, d.h. der Mathematik als Wissenschaft, selbstverständlich – dass die Analysis, wie auch jedes andere mathematische Gebiet, nach der *axiomatischen Methode* gelehrt wird - Warum?

abstraktes Vorgehen nach dem
Definition-Satz-Beweis-Schema

(i) Nur so erreicht die Mathematik jene Sicherheit, die von ihr erwartet wird.

[1] Harro Heuser schreibt in seiner charakteristischen Sprache [8] vom „ewig jugendliche[n] Held des analytischen Dramas".

(ii) Sie macht das Erlernen eines Gebiets *leichter*!

Das ist kein Witz! : Statt in „druidischer Weise“ von einem Meister im geheimnisvollen Handwerk des intuitiv richtigen Hantierens mit „unendlich kleinen Größen“ unterwiesen zu werden, weist die axiomatische Methode einen klaren Weg:

Alle Begriffe werden durch wenige grundlegende Eigenschaften exakt *definiert*. Allgemeine Aussagen über diese Begriffe werden in mathematischen *Sätzen* formuliert. Diese werden durch logische Schlussfolgerungen *bewiesen*.

Ja, aber... *natürlich* bereitet diese Herangehensweise den Anfänger*innen große *Schwierigkeiten*! Es ist eine große Herausforderung, den deduktiven Aufbau mit dem eigenen Vorwissen, der eigenen Phantasie und Intuition und der eigenen Kreativität in Einklang zu bringen. Dazu gehört natürlich auch der selbstverständliche Gebrauch der Fachsprache. Daher ist es auch eines der Ziele dieser Vorlesung, diese methodische Herausforderung zu bewältigen. Insofern nimmt diese „Einladung in die Analysis“ den *methodischen* roten Faden der „Einführung in das mathematische Arbeiten“ [7] auf und spinnt ihn weiter. . .

0.0.7 (Axiomatik in der Analysis).
Konkret für die Analysis bedeutet die axiomatische Methode:

Die gesamte Welt der Analysis muss deduktiv aus den Grundeigenschaften der reellen Zahlen hergeleitet werden.

Dieses Fundament – die axiomatische Basis der Analysis – legen wir in den nächsten Kapiteln. Dabei nehmen wir den *inhaltlichen* Faden der „Einführung in das mathematische Arbeiten“ [7] auf und knüpfen damit den Teppich der Analysis.

0.0.8 (Bevor es wirklich losgeht – Eine letzte, auch persönliche Vorbemerkung).
Zu sehen, wie aus den wenigen Axiomen der reellen Zahlen die gesamte Welt der Analysis aufgebaut wird, ist eine geistige und ästhetische Erfahrung: Das Ineinandergreifen der verschiedenen Begriffe zu verstehen und die vielen überraschenden Querverbindungen zu entdecken kann viel Freude machen und wird nicht ganz ohne Folgen für Ihr Denken bleiben (können). Ebenso kann die Kraft der Anwendungen (auf die wir in dieser Vorlesung leider (zu) wenig eingehen können) eine große Wirkung entfalten. Die durch *reines Denken* gewonnen Erkenntnisse der Analysis haben weitreichende Anwendungen in der Physik, in anderen Naturwissenschaften, der Ökonomie etc. und sind somit höchst relevant für unser Verständnis von Natur und Gesellschaft.

0.1 Die reellen und die komplexen Zahlen—Eine Zusammenfassung

Motivation 0.1.1 (Axiomatik als Grundstein).
In diesem Abschnitt legen wir das feste Fundament, auf dem die gesamte Analysis errichtet ist: Die *axiomatische Festlegung der reellen (und komplexen) Zahlen*.

Wir wählen absichtlich diesen Ausgangspunkt, um uns nicht lange mit den mengentheoretischen Grundlagen der Zahlen befassen zu müssen — was den Rahmen dieser Einladung in die Analysis deutlich sprengen würde. Tatsächlich können die reellen (und damit auch komplexen) Zahlen nämlich aus dem Axiomensystem (ZFC) der Mengenlehre konstruiert werden (siehe etwa [7, Erweiterungsstoff im Kapitel 6] bzw. ausführlicher [6]). Die so konstruierten Mengen $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ weisen dann genau dieselben Eigenschaften auf, die wir hier axiomatisch festlegen — Daher spielt es für alles Weitere keine Rolle, *wo* wir beginnen. Wichtig ist nur, *dass* wir das Gebäude der Analysis auf einen festen axiomatischen Boden stellen.

Inhaltlich handelt es sich hier um eine Zusammenstellung der für uns wichtigsten Teile aus [7], sodass wir statt mit Beweisen mit Verweisen auf [7] arbeiten. Wir werden den Satz von Dedekind [7, Thm. 6.4.4] zur Definition erheben (siehe die Diskussion in [7, unter 6.4.4]), also die reellen Zahlen festlegen durch:

$\mathbb{R}$ ist der (bis auf Isomorphie eindeutige) ordnungsvollständige geordnete Körper, der $\mathbb{Q}$ als geordneten Unterkörper besitzt.

Alle in diesem Satz vorkommenden Begriffe werden wir nun wiederholen bzw. erklären:

Faktensammlung 0.1.2 (Die reellen Zahlen als Körper).
$(\mathbb{R},+,\cdot)$ ist ein Körper [7, Def. 4.5.1], d.h. es gelten die *Axiome der Addition*,

(A1) Assoziativgesetz: $(x+y)+z=x+(y+z) \quad \forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$
(A2) Kommutativgesetz: $x+y=y+x \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$
(A3) Existenz der Null: $\exists\, 0\in\mathbb{R} \quad \forall\, x\in\mathbb{R}: \quad x+0=x$

additiv Neutrales

(A4) Existenz von additiv Inversen: $\forall\, x\in\mathbb{R} \quad \exists -x\in\mathbb{R}: \quad x+(-x)=0$

die *Axiome der Multiplikation*,

(M1) Assoziativität: $(xy)z=x(yz) \quad \forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$
(M2) Kommutativität: $xy=yx \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$
(M3) Existenz der Eins: $\exists\, 1\in\mathbb{R}: \quad \forall\, x\in\mathbb{R}: \quad x\cdot 1=x$

multiplikativ Neutrales

(M4) Existenz von multiplikativ Inversen: $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \exists x^{-1}\in\mathbb{R}: \quad x\ x^{-1}=1$

und das *Distributivgesetz* ⟵ regelt die Verträglichkeit von $+$ und $\cdot$

(D) $x(y+z)=xy+xz \quad \forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$

Bemerkung 0.1.3 (Folgerungen aus den Körperaxiomen).

(i) Das additiv neutrale Element 0 und das multiplikativ neutrale Element 1 sind eindeutig bestimmt [7, Prop. 5.2.16].

(ii) Ebenso sind die additiven und multiplikativen Inversen $-x$ und x^{-1} eindeutig bestimmt [7, Prop 5.2.16]

(iii) Es gibt keine Nullteiler [7, Bem. 5.4.9], d.h. $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow xy \neq 0$

(iv) Endliche Summen und Produkte erfüllen (erweiterte) Versionen von Assoziativ- und Distributivgesetz [„Klammerrechnung“,$(x+y)(u-w) = ux + uy - xw - yw$ zum Beispiel] und wir verwenden die Summen- und Produktschreibweise $\sum$ bzw. $\prod$ [7, Kap. 2.3]

(v) Sei $x \in \mathbb{R}$, dann werden Potenzen x^n für $n \in N$ mittels Induktion folgendermaßen definiert: $x^0 := 1, \quad x^{n+1} := x^n x \quad$ für alle $n \geq 0$.
Daraus folgt $0^0 = 1$.
Falls $x \neq 0$ gilt, so werden negative Potenzen x^{-n}, ($n > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$) folgendermaßen definiert: $x^{-n} := (x^{-1})^n$.
Folgende Rechenregeln gelten für Potenzen, wobei n und m beliebige ganze Zahlen und x, y reelle Zahlen ungleich 0 sind:
$x^n x^m = x^{n+m}$,
$(x^n)^m = x^{nm}$,
$x^n y^n = (xy)^n$. [5, Kap. 2]

Faktensammlung 0.1.4 (Die komplexen Zahlen).

(i) Per definitionem [7, Def. 6.5.1] sind komplexe Zahlen geordnete Paare reeller Zahlen, d.h.

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ und wir schreiben } \mathbb{C} \ni z = (x, y) \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}.$$

Auf $\mathbb{C}$ sind eine Addition und eine Multiplikation definiert. Für $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ hat sie die Form

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{0.1}$$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{0.2}$$

(ii) Mit diesen Operationen ist $\mathbb{C}$ ein *Körper* [7, Thm. 6.5.2], wobei $0 := (0, 0)$ das Nullelement und $1 := (1, 0)$ das Einselement sind, d.h. für $\mathbb{C}$ gelten alle Punkte aus 0.1.2 mit $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$. [Klar, denn 0.1.2 listet ja nur allgemein die Eigenschaften von Körpern auf.]

(iii) Für $z = (x, y)$ verwenden wir auch die Schreibweise

Imaginärteil von z

$$z = x + \mathrm{i}y \quad \text{und} \quad x = \mathrm{Re}(z),\ y = \mathrm{Im}(z),$$

Realteil von z

wobei $\mathrm{i} = (0, 1)$ die *imaginäre Einheit* genannt wird [7, Defs. 6.5.5, 6.6.6].

(iv) Als Elemente von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ können komplexe Zahlen $z = (x, y)$ in natürlicher Weise als Punkte in der Ebene aufgefasst und als solche dargestellt werden, siehe Abbildung 0.1 und vgl. [7, Def. 6.5.6f]. Dabei hat die komplexe Zahl $z = (x, y)$ die kartesischen Koordinaten $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$.

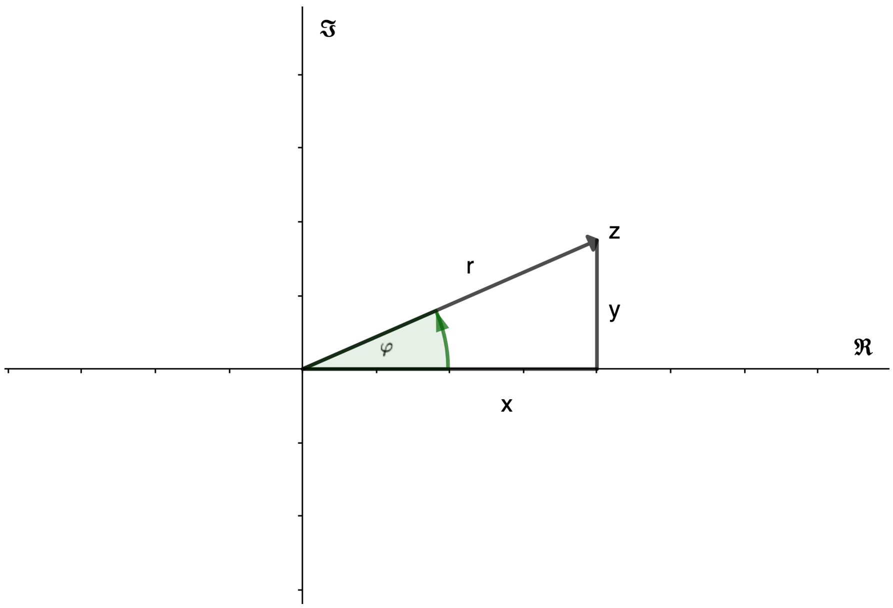


Abb. 0.1 Die komplexe Zahlenebene

Alternativ kann z auch in Polarkoordinaten beschrieben werden, d.h. durch seinen Abstand vom Ursprung und den Winkel von der positiven ersten Achse. Auf diese Weise lässt sich jede komplexe Zahl $0 \neq z = x + iy$ eindeutig als

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

schreiben (siehe Abbildung 0.1), wenn man den Winkel φ aus $[-\pi, \pi)$ wählt. Der Radius errechnet sich aus dem Satz von Pythagoras und wird auch als der *Betrag* $|z|$ der komplexen Zahl z bezeichnet,

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{0.3}$$

Der Winkel φ kann z.B. aus $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ berechnet werden, für Details siehe [7, unter Def. 6.5.6].

(v) Die imaginäre Einheit i hat die bemerkenswerte Eigenschaft

$$\underline{\mathrm{i}^2} = (0,1)^2 \stackrel{(0.2)}{=} (-1,0) = -1 + \mathrm{i}0 = \underline{-1}$$

(vi) $\mathbb{R}$ ist ein *Unterkörper* [7, Def. 5.4.13] von $\mathbb{C}$ [7, unter 6.5.4], wobei $\mathbb{R}$ mittels der Abbildung

$$\begin{aligned} \iota :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ & x \mapsto (x,0) = x + \mathrm{i}0 \end{aligned}$$

in $\mathbb{C}$ eingebettet ist (siehe die graue Box unter [7, 6.5.4]). Insbesondere können wir $0 \in \mathbb{R}$ mit $0 = (0,0) \in \mathbb{C}$ identifizieren und $1 \in \mathbb{R}$ mit $1 = (1,0) \in \mathbb{C}$. In Abbildung 0.1 entspricht also $\mathbb{R}$ der ersten Achse in $\mathbb{R}^2$, die auch reelle Achse genannt wird.

(vii) $\mathbb{C}$ besitzt mit der *komplexen Konjugation* eine vielseitige Struktur. Genauer haben wir die Abbildung [7, Def. 6.5.8]

$$\begin{aligned} \bar{\ } :\ & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z = x + iy \mapsto\ & \bar{z} = x - iy \end{aligned}$$

Sie ist ein Körperautomorphismus ([7, 5.4.20(iii)], d.h. Körperisomorphismus auf sich selbst) von $\mathbb{C}$, wobei sie ihr eigenes Inverses ist, d.h. $\bar{\bar{z}} = z$. Man sagt die Komplexkonjugation ist eine *Involution*.

Faktensammlung 0.1.5 ($\mathbb{R}$ als angeordneter Körper).
(Hier weichen wir ein wenig von [7] ab, die Zugänge sind aber äquivalent!)

(i) Auf der Menge $\mathbb{R}$ ist eine *Ordnungsrelation* $\leq$ definiert, die sogenannte *natürliche Ordnung*.
Das bedeutet, dass die Relation $\leq$ die folgenden Eigenschaften besitzt ($x, y, z \in \mathbb{R}$)
- Reflexivität: $x \leq x$,
- Transitivität: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ und
- Antisymmetrie: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$.

Für Details siehe [7, Def. 4.2.24(i)], bzw. das Erklärvideo

➤ **Video** Ordnungsrelationen

(ii) Wir verwenden die *Schreibweisen*:

$$x \geq y \ :\Leftrightarrow\ y \leq x\,, \quad x < y \ :\Leftrightarrow\ x \leq y \wedge x \neq y, \quad x > y \ :\Leftrightarrow\ y < x$$

(iii) $\leq$ ist eine *Totalordnung* [7, Def. 4.2.44 (iii)], d.h. es gilt die *Trichotomie*

(O1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt *genau eine* der Aussagen

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

Bemerkung 0.1.6. Genauer gesagt [7, Def. 4.2.24 (iii)]:
Es gilt mindestens eine der Aussagen $x \leq y$, $y \leq x$. Es gilt aber (4.2.24 (iii)) $\Leftrightarrow$ (O1):

Beweis. $\Leftarrow$ ist klar
$\Rightarrow$: Per Definition (ii) gilt mindestens eine der drei Aussagen. Wir zeigen, dass niemals zwei oder alle drei gelten können:

- $x < y \wedge x = y$ ist per definitionem nicht möglich $[x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y]$
- $x > y \wedge x = y$ ebenso
- $x < y \wedge y < x \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$, was nicht möglich ist, siehe oben.

$\square$

(iv) $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ist ein geordneter Körper [7, Def. 6.3.1], d.h. es gelten $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(O2) $x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
(O3) $x > 0 \wedge y > 0 \Leftrightarrow xy > 0$ ← $\boxed{\text{Verträglichkeit von } \leq \text{ mit } +, \cdot}$

(v) In $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ gelten die Rechenregeln [7, Prop. 6.3.2] $(x, y, z \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
x \leq y &\Leftrightarrow y - x \geq 0 \\
x \leq 0 &\Leftrightarrow -x \geq 0 \\
x \leq y \wedge z \geq 0 &\Rightarrow xz \leq yz \\
x \leq y \wedge z < 0 &\Rightarrow xz \geq yz \\
x \neq 0 &\Rightarrow x^2 > 0 \\
0 < x < y &\Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}
\end{aligned}$$

(vi) $\mathbb{C}$ ist kein angeordenter Körper. In 0.1.4(v) haben wir gesehen, dass in $\mathbb{C}$ für die imaginäre Einheit $i^2 = -1$ gilt, was den Rechenregeln in geordneten Körpern widerspricht, vgl. 0.1.5(v), vorletzte Gleichung. Daher ist $\mathbb{C}$ kein geordneter Körper, siehe auch [7, Thm. 6.5.14].

Wiederholung 0.1.7 (Intervalle).
Die Ordnung auf $\mathbb{R}$ verwendet man, um wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu definieren – die *Intervalle* [7, unter 4.2.28]. Seien $a < b \in \mathbb{R}$.

$(a,b) \equiv]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	offenes, beschränktes Intervall
$(-\infty,b) \equiv]-\infty,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	offene, halbbeschränkte Intervalle
$(a,\infty) \equiv]a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	
$(a,b] \equiv]a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	halboffene, beschränkte Intervalle
$[a,b) \equiv [a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
$(-\infty,b] \equiv]-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	abgeschlossene, halbbeschränkte Intervalle
$[a,\infty) \equiv [a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	abgeschlossenes, halbbeschränktes Intervall
$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes beschränktes Intervall

Schließlich schreiben wir $(-\infty,\infty) \equiv]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$.

Faktensammlung 0.1.8 (Der Absolutbetrag).
Ein wesentliches Werkzeug der Analysis ist die *Abstandsmessung*. Auf $\mathbb{R}$ bewerkstelligt das der Absolutbetrag (kurz: Betrag) [7, Def. 6.4.11]. Für $x \in \mathbb{R}$ definieren

wir
$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

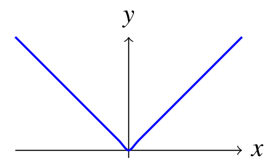


Abb. 0.2 Funktionsgraph des Absolutbetrags

Die Funktion $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ hat den obigen Graphen (vgl. Abb. 0.2) und die folgenden *grundlegenden Eigenschaften* [7, Prop. 6.4.12]

(N1) *Positive Definitheit:* Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x| \geq 0 \quad \text{und} \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0. \tag{0.4}$$

(N2) *Multiplikativität:* Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|xy| = |x|\,|y|. \tag{0.5}$$

(N3) *Dreiecksungleichung*: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x+y| \leq |x| + |y|. \tag{0.6}$$

Darüber hinaus hat der Absolutbetrag die folgenden Eigenschaften [7, 6.4.13-14] $(x, y \in \mathbb{R})$

(i) Spiegelsymmetrie:
$$|-x| = |x| \tag{0.7}$$

(ii) Verträglichkeit mit Quotienten:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0) \tag{0.8}$$

(iii) Verkehrte Dreiecksungleichung:

$$|x-y| \geq \Big||x| - |y|\Big| \quad \text{und} \quad |x+y| \geq \Big||x| - |y|\Big| \tag{0.9}$$

(iv) Darstellung von Maximum und Minimum:

$$\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{und} \quad \min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} \tag{0.10}$$

$$\max(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases}$$
wohldefiniert wegen (O1)!

analog

Faktensammlung 0.1.9 ((Über-)Abzählbarkeit). [7, Kap. 4.4]
Eine Menge M heißt *abzählbar*, falls es eine Bijektion $F : M \longrightarrow \mathbb{N}$ gibt.
Abzählbare Mengen sind: $\mathbb{N}$ (klar!), $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$

Cantorsches Diagonalverfahren, [7, Abb. 4.11]

$\mathbb{R}$ ist *nicht* abzählbar, man sagt überabzählbar [Es ist schon $(0,1)$ überabzählbar, [7, unter 4.4.5]].

Für Details zur Mächtigkeit von Mengen sowie den Begriffen abzählbar und überabzählbar siehe [7, Abschn. 4.4] bzw. die folgenden Videos:

➤ **Video** Mächtigkeit, Teil I (Gleichmächtigkeit von Mengen)

➤ **Video** Mächtigkeit, Teil II (Abzählbarkeit der rationalen Zahlen)

➤ **Video** Mächtigkeit, Teil III (Überabzählbarkeit der reellen Zahlen)

Faktensammlung 0.1.10 (Ordnungsvollständigkeit).
Eine totalgeordnete Menge M heißt *ordnungsvollständig*, falls sie die sogenannte *Supremumseigenschaft* hat. Um diese zu formulieren wiederholen wir zuerst den Begriff des Supremums bzw. Infimums, vgl. [7, Def. 4.2.32].

Sei $E \subseteq M$ eine Teilmenge einer totalgeordneten Menge $(M, \leq)$, dann heißt jedes

- $a \in M$ mit der Eigenschaft $a \leq e \; \forall e \in E$ *untere Schranke* von E (in M) und jedes
- $b \in M$ mit der Eigenschaft $b \geq e \; \forall e \in E$ *obere Schranke* von E (in M).

Wir nennen E *nach oben* bzw. *nach unten beschränkt*, falls E eine obere bzw. untere Schranke besitzt. Hat E sowohl eine obere als auch eine untere Schranke, so sagen wir E ist *beschränkt*. Andernfalls sagen wir E ist *nach oben* bzw. *nach unten unbeschränkt* bzw. *unbeschränkt*.

Betrachten wir als Beispiel das Intervall $E = (0,1]$ in $\mathbb{R}$, dann ist 0 untere und 1 obere Schranke von E und E ist beschränkt[2]. Allerdings ist z.B. auch -17 untere und 7 obere Schranke von E — es sind nur keine besonders „guten“ Schranken. Um gut über „gute“ Schranken sprechen zu können, also über solche, die möglichst “nahe“ bei der Menge selbst sind verwendet man die Begriffe Infimum und Supremum.

Formal definieren wir (wieder allgemein) für Teilmengen $E \subseteq M$ von totalgeordneten Mengen wie folgt: $\alpha \in M$ heißt *Infimum* oder größte untere Schranke von E, falls gilt

(i) α ist untere Schranke von E und

[2] Das rechtfertigt im Nachhinein die Terminologie von 0.1.7

(ii) kein $\alpha' > \alpha$ ist untere Schranke von E (formal: $\alpha' > \alpha \Rightarrow \alpha'$ ist nicht untere Schranke von E).

Wir schreiben in diesem Fall $\alpha = \inf E$. Analog dazu ist das *Supremum*, die kleinste obere Schranke β von M definiert durch

(i) β ist obere Schranke von E und
(ii) $\beta' < \beta \Rightarrow \beta'$ ist nicht obere Schranke von E.

In diesem Fall schreiben wir $\beta = \sup E$.

In unserem Beispiel $E = (0,1]$ gilt $0 = \inf E$ und $1 = \sup E$. Die anderen angegeben Schranken sind nicht Infimum bzw. Supremum. Beachte, dass es hier unerheblich ist, dass $\sup E = 1$ in E liegt, das Infimum 0 aber nicht zu M gehört.

Ein Supremum bzw. Infimum, das zur jeweiligen Menge gehört hat allerdings einen speziellen Namen, nämlich Maximum bzw. Minimum, [7, Def. 4.2.32]. Diese Definition ist für Mengen mit zwei Elementen konsistent mit 0.2.(iv). Sie sind dann jeweils das größte bzw. das kleinste Element der Menge. In unserem Beispiel $E = (0,1]$ ist 1 Maximum aber 0 nicht Minimum, denn E besitzt kein Minimum.

Nicht alle Teilmengen totalgeordneter Mengen haben ein Infimum bzw. Supremum, z.B. haben halbbeschränkten Intervalle in $\mathbb{R}$ kein sup bzw. inf: $(3,\infty)$ hat kein Supremum und $(-\infty,7]$ hat kein Infimum, weil diese Mengen ja überhaupt keine oberen bzw. unteren Schranken haben, resp. nach oben bzw. unten unbeschränkt sind. Hat eine Menge allerdings ein Supremum oder Infimum, so ist dieses eindeutig bestimmt, [7, unter 4.2.33].

Die Frage, ob wenigstens nach oben (unten) *beschränkte* Mengen ein Supremum (Infimum) haben führt uns zurück zur angekündigten Supremumseigenschaft [7, Def. 6.4.1].

(V) Eine totalgeordnete Menge $(M,\leq)$ heißt *ordnungsvollständig*, falls jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt.

Diese Definition ist übrigens nach [7, Prop. 6.4.2] äquivalent dazu, dass jede nicht-leere nach unten beschränkte Teilmenge ein Infimum hat.

Es ist eine fundamentale Tatsache, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen *nicht ordnungsvollständig* ist. Tatsächlich ist die Menge

$$E := \{q \in \mathbb{Q} : \ q > 0, q^2 < 2\}$$

nach oben beschränkt, hat aber kein Supremum, [7, Bsp. 6.4.3]. Dieses „Missgeschick“ liegt natürlich daran, dass $\sqrt{2}$ nicht zu $\mathbb{Q}$ gehört, [7, Thm. 3.2.7]. Für $\mathbb{R}$ sieht die Situation viel besser aus, wie wir am Ende unserer Tour durch die Grundlagen festhalten.

Faktensammlung 0.1.11 (Definition von $\mathbb{R}$).
Wir haben jetzt alle Begriffe wiederholt, die im Dedekindschen Satz [7, Thm 6.4.4] vorkommen. Er lautet: (vgl.0.1.1)

> Es gibt (bis auf Isomorphie geordneter Körper[2]) genau einen ordnungsvollständigen, geordneten Körper, der $\mathbb{Q}$ als geordneten Teilkörper enthält.

Wir *definieren* nun $\mathbb{R}$ als genau jenen Körper. Damit hat $\mathbb{R}$ nun alle in diesem Abschnitt vorgestellten Eigenschaften, d.h. es gelten

- die Körperaxiome (algebraische Eigenschaften) (A1) – (A4), (M1) – (M4), (D). „in $\mathbb{R}$ gelten die 4 Grundrechenarten“
- die Ordnungsaxiome (O1) – (O3) „wir haben das übliche $\leq$“
- Ordnungsvollständigkeit (V) „$\mathbb{R}$ hat im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ keine Löcher“

Zum Schluss des Abschnitts halten wir noch wichtige Folgerungen aus (V) fest.

Faktensammlung 0.1.12 (Konsequenzen aus der Ordnungsvollständigkeit).
Die Ordnungsvollständigkeit und ihre Folgen werden uns die ganze Vorlesung hindurch noch in ganz intensiver Weise beschäftigen. Hier wiederholen wir drei sehr grundlegende Konsequenzen aus [7, Ch. 6].

(i) Die *archimedische Eigenschaft*, [7, Prop. 6.4.5 (i)]

$$\boxed{\text{Seien } x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : nx > y}$$

Der Witz ist, dass x sehr klein und y sehr groß sein kann

n-faches Abtragen von x übertrifft y, vgl. Abb. 0.3

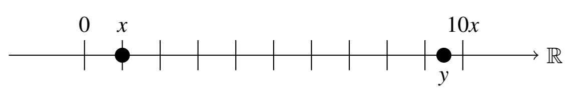


Abb. 0.3 Die archimedische Eigenschaft

---

[2] Das bedeutet, dass jeder andere Körper, der diese Eigenschaften erfüllt, als geordneter Körper „ununterscheidbar“ von $\mathbb{R}$ ist, vgl. [7, p. 234, graue Box]. Folglich ist $\mathbb{R}$ damit für alle praktischen Zwecke eindeutig!

(ii) *Dichtheit von* $\mathbb{Q}$ *und* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$ [7, Prop. 6.4.5 (ii)].

$$\text{Seien } x < y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$$
$$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x < r < y$$

Der Witz ist, dass x sehr nahe bei y sein kann

Zwischen je zwei reellen Zahlen, egal wie nahe sie beieinander liegen, gibt es immer noch eine rationale Zahl und eine irrationale Zahl, vgl. Abb. 0.4

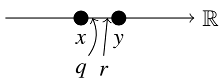


Abb. 0.4 Dichtheit von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

(iii) *Existenz und Eindeutigkeit von Wurzeln*: Sei $0 < a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. $\Rightarrow \exists!\, x \in \mathbb{R}, x > 0$ mit $x^n = a$ [7, Prop. 6.4.7]. Wir schreiben $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ und nennen x die *n-te Wurzel aus a*

Kapitel 1
Folgen und Reihen — Konvergenz

Zusammenfassung. In diesem Kapitel legen wir *den* Grundstein der Analysis: den *Konvergenzbegriff* für Folgen. Wir werden also definieren was es für eine Folge reeller bzw. komplexer Zahlen bedeutet, gegen einen Grenzwert zu konvergieren.

Dann werden wir lernen, Folgen auf Konvergenz zu untersuchen und mit konvergenten Folgen zu rechnen. Weiters werden wir Folgen als Werkzeug verwenden, um den zentralen Begriff der (Ordnungs-)Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ besser zu verstehen.

Schließlich werden wir uns mit (unendlichen) Reihen, also Summen von (abzählbar) unendlich vielen Zahlen befassen. Wir werden sie als spezielle Folgen entlarven und unser diesbezügliches Wissen verwenden, um die Konvergenz von Reihen zu untersuchen. Rechnen mit konvergenten Reihen wird sich im Weiteren als ein mächtiges Werkzeug erweisen.

Wir beginnen damit, den Folgenbegriff zu präzisieren. Folgen sind Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$ oder M, eine beliebige Menge) - die offizielle Definition kommt später. Daher wiederholen wir kurz die Definition der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und kümmern uns um gewisse Folgerungen aus der Archimedischen Eigenschaft - damit wirklich alles auf einem festen Fundament steht.

1.1 $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ und einige Konsequenzen aus der Archimedischen Eigenschaft

Wiederholung 1.1.1 (Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$).
In [7, 6.1.1] wurde $\mathbb{N}$ als Menge definiert, die die *Peano-Axiome* erfüllt und in [7, 6.1.7] wird aus (ZFC) bewiesen, dass es genau eine solche Menge gibt. Beachte, dass dies die analoge Vorgehensweise zu unserem Umgang mit $\mathbb{R}$ ist, vgl. 0.1.1.

Es ist also $\mathbb{N}$ jene eindeutig bestimmte Menge, die zusammen mit der auf $\mathbb{N}$ definierten Nachfolgeabbildung S die Axiome

(PA1) $0 \in \mathbb{N}$.

(PA2) $\forall n \in \mathbb{N} : S(n) \in \mathbb{N}$ (d.h. $S(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$).

(PA3) $\nexists n \in \mathbb{N} : S(n) = 0$ (d.h. 0 ist kein Nachfolger).

(PA4) S ist injektiv, d.h. für alle $m, n \in \mathbb{N} : S(m) = S(n) \Rightarrow m = n$.

(PA5) *Induktionsprinzip*: Falls $M \subseteq \mathbb{N}$ und (PA1), (PA2) für M gelten [man sagt M ist *induktiv*: Es gilt $0 \in M$ und mit $m \in M$ ist auch $S(m) \in M$], dann gilt schon $M = \mathbb{N}$.

(PA5) sagt, dass die vollständige Induktion funktioniert!

Bemerkung 1.1.2 (Wohlordnung von $\mathbb{N}$).

Klarerweise ist $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ (für Details siehe [7, Kapitel 6, Erweiterungsstoff]). Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ besitzt $\mathbb{N}$ die Eigenschaft der *Wohlordnung*:

Jede nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{N}$ hat ein Minimum.

Beweis. (1) Falls A endlich ist, dann gibt es klarerweise ein Minimum (es kann nach endlich vielen „Vergleichsschritten“ gefunden werden).

(2) Falls A unendlich ist, wählen wir ein beliebiges $a \in A$ und zerlegen A in zwei Teilmengen

$$B := \{x \in A : x \leq a\}, \quad C := A \setminus B.$$

Nun gilt $A = B \cup C$ und B ist endlich, somit hat es (wegen (1)) ein Minimum $\min B$. Außerdem gilt laut Konstruktion $b < c$ für jedes $b \in B$ und für jedes $c \in C$. Somit ist also $\min B = \min A$. □

Als nächstes halten wir einige einfache aber wichtige Folgerungen der Archimedischen Eigenschaft fest:

Der Witz an „$\forall \varepsilon > 0$ “ ist,
dass ε beliebig nahe bei 0 sein kann
(i) sagt also: „ $\frac{1}{n}$ wird beliebig klein“
(ii) sagt: „Zwischen $\{\frac{1}{n} \mid 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$ und 0
ist kein Platz“

Theorem 1.1.3 (Die Macht von $\frac{1}{n}$).

(i) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(ii) Sei $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$. *Falls* $r < \frac{1}{n}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, *dann gilt schon* $r = 0$.

Beweis. (i) In der Archimedischen Eigenschaft 0.1.12(i) setze $x = \varepsilon$ und $y = 1$. Dann gilt: $\exists n \in \mathbb{N}$: $n\varepsilon > 1$, also $\varepsilon > 1/n$.

(ii) Sei $r \geq 0$. Falls $r > 0$, dann folgt mit (i) und $r = \varepsilon$, dass es ein $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ gibt mit $\frac{1}{m} < r$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Also gilt $r = 0$. □

Lemma 1.1.4 (Bernoulli-Ungleichung).
Sei $-1 \leq x \in \mathbb{R}$, *dann gilt* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1+nx.}$$

Induktionsvoraussetzung
und $1+x \geq 0$

Beweis. Beweis per Induktion:
$n=0: \ (1+x)^0 = 1 \geq 1+0x.$
$n \to n+1:$

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)\\ &= 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x. \qquad \square\end{aligned}$$

(i) sagt: Für $b>1$ wird b^n größer
als jede vorgegebene Zahl
(ii) sagt: Für $0<b<1$ wird b^n kleiner
als jede positive Zahl

Proposition 1.1.5 (Wachstum von Potenzen).
Sei $b \in \mathbb{R}$.
(i) Falls $b>1$, *dann gilt*

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad b^n > K.$$

(ii) Falls $0<b<1$, *dann gilt*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad b^n < \varepsilon.$$

Beweis. (i) Setze $x=b-1$, dann ist $x>0$ und wir können die Bernoulli-Ungleichung 1.1.4 verwenden. Somit

$$b^m = (1+x)^m \geq 1+mx \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Sei nun $K \in \mathbb{R}$ (wobei der Witz ist, dass K sehr groß sein kann). Nach Archimedes 0.1.12(i) (beachte: $x>0$):

$$\exists n \in \mathbb{N}: \quad nx > K. \tag{1.2}$$

Nun setze $m=n$ in (1.1). Dann gilt

$$b^n \overset{(1.1)}{\geq} 1+nx \overset{(1.2)}{>} 1+K > K.$$

(ii) Dies folgt aus (i). Genauer, sei $\varepsilon>0$. Setze $b_1 := \frac{1}{b}$, dann gilt $b_1>1$ (wegen 0.1.5(v) letzte Zeile) und somit folgt aus (i) (setze dort $b=b_1$ und $K=\frac{1}{\varepsilon}$)

$$\exists n \in \mathbb{N}: \ b_1^n > K = \frac{1}{\varepsilon} \text{ und somit (wieder 0.1.5(v) letzte Zeile)} b^n = \frac{1}{b_1^n} < \varepsilon. \qquad \square$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir *geometrische Summen* — ein ganz wichtiges Werkzeug.

1.1.6 (Geometrische Summen).
Sei $n \in \mathbb{N}$ fix. Wir definieren die Funktion

$$s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

(i) Für $x = 1$ erhalten wir

$$s_n(1) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1.$$

(ii) Um $s_n(x)$ für $x \neq 1$ zu berechnen schreiben wir

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n, \\ x s_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = \phantom{1+{}} x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n + x^{n+1}. \end{aligned}$$

Daher ist [3] $(1-x)s_n(x) = s_n(x) - x s_n(x) = 1 - x^{n+1}$. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}. \tag{1.3}$$

(iii) Wir untersuchen das Verhalten von $s_n(x)$ für große n (und $x \neq 1$). Dazu schreiben wir (1.3) um zu

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{unabhängig von } n} - \underbrace{\frac{x^{n+1}}{1-x}}_{\text{interessanter Term}}. \tag{1.4}$$

(iv) Für $|x| < 1$ besagt 1.1.5(ii), dass der interessante Term in (1.4) betragsmäßig beliebig klein wird. Genauer

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \overset{1.1.5(ii),\, b=|x|}{\Longrightarrow} \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad |x|^N < \varepsilon_1. \tag{1.5}$$

---

[3] Solche Ausdrücke bezeichnet man gerne als Teleskopsummen - es bleiben nur der 1. und der letzte Term übrig.

Klarerweise gilt (1.5) auch für alle $n \geq N$ und daher

$$\left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| \overset{|x|<1}{=} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \frac{\varepsilon_1}{1-x} \quad \forall n \geq N. \tag{1.6}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig (klein; Witz!), setze $\varepsilon_1 := \varepsilon(1-x)$. Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$\left|s_n(x) - \frac{1}{1-x}\right| \overset{(1.4)}{=} \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| \overset{(1.6)}{<} \frac{\varepsilon_1}{1-x} \overset{\varepsilon_1=\varepsilon(1-x)}{=} \varepsilon.$$

Zusammengefasst ist also $s_n(x)$ für $|x| < 1$ und große n sehr nahe an $\frac{1}{1-x}$, und zwar im folgenden präzisen Sinn:

Zu jeder beliebig vorgegebenen „Toleranzgrenze“ ε können wir einen Index N („Anzahl von Berechnungsschritten“) finden, sodass der Fehler

$$\left|s_n(x) - \frac{1}{1-x}\right|$$

kleiner als die Toleranz ε ist, falls $n \geq N$.

Diese Formulierung stößt uns geradezu mit der Nase auf den kommenden Grenzwertbegriff bzw. nimmt diesen geradezu vorweg.

1.2 Folgen und Grenzwerte

Jetzt geht es los - und zwar mit der offiziellen

Definition 1.2.1 (Folge).
Sei M eine Menge. Eine *Folge* in M ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to M.$$

Gilt $M = \mathbb{R}$ bzw. $M = \mathbb{C}$, so nennen wir a eine *reelle* bzw. *komplexe Folge*. [Zunächst wird fast immer $M = \mathbb{R}$ sein].

1.2.2 (Schreibweise).
Nachdem eine Folge als eine spezielle Funktion (mit eigenartig-speziellem Definitionsbereich) definiert ist, ist alles was wir über Funktionen wissen (vgl. [7, 4.3]) hier gültig.
Wegen des speziellen Definitionsbereichs haben sich einige Schreibweisen eingebürgert:
(i) Statt $a(1)$, $a(2)$, usw. schreiben wir a_1, a_2, usw.

(ii) Für die ganze Folge schreiben wir statt a oft auch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n)_{n=0}^{\infty} \text{ oder kürzer } (a_n)_n \text{ oder nur } (a_n).$$

(iii) Immer wieder werden Folgen auftreten, die erst bei $n = 1$ oder noch *später beginnen* - das bringen wir durch die Schreibweise $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder etwa $(a_n)_{n=17}^{\infty}$ zum Ausdruck.
Ja aber: Dürfen Folgen später anfangen? Soll heißen: Sind das dann überhaupt folgen im Sinne der Definition?
Ja schon, denn sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ eine Folge, die erst bei n_0 beginnt. Dann ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := a_{n+n_0}$ eine „echte" Folge und es zahlt sich nicht aus, zwischen (a_n) und (b_n) zu unterscheiden.

Beispiel 1.2.3 (Einfache Folgen).

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ setze $a_n = 2n$. Das ergibt die Folge der geraden natürlichen Zahlen

$$(a_n)_n = (2n)_n = (0,2,4,6,8,\dots).$$

(ii) Sei $c \in \mathbb{R}$. Mit $b_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir die sog. *konstante* (reelle) Folge

$$(b_n) = (c)_n = (c,c,\dots).$$

(iii) Mit $c_n = \frac{1}{n}$ $(1 \leq n \in \mathbb{N})$ erhalten wir

$$(c_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} = \left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right).$$

1.2.4 (Veranschaulichung von Folgen).
Es gibt zwei Wege, um Folgen in prägnanter Weise zu veranschaulichen.

(i) *„Spaziergang" in M*: Man trägt die Werte a_n der Reihe nach in M ein, wie in Abbildung 1.1 zu sehen ist.

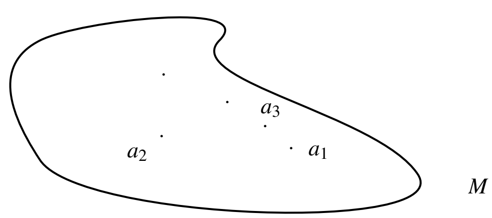


Abb. 1.1 Eine Folge als „Spaziergang" in einer Menge M

Für reelle Folgen nimmt das die Form eines „Spaziergangs“ auf der Zahlengeraden an, den wir in Abbildung 1.2 explizit für die Folgen aus Beispiel 1.2.3 darstellen.

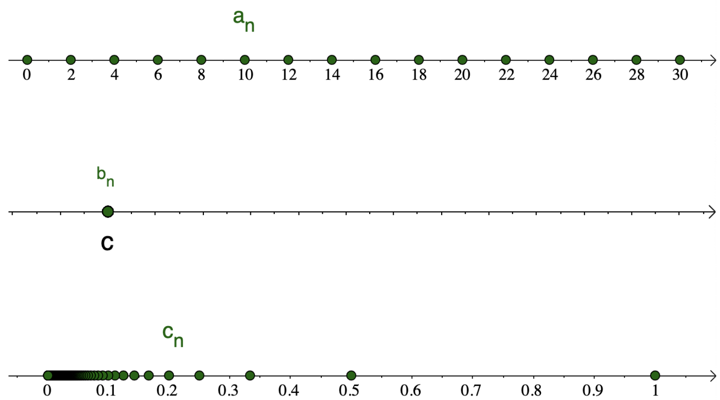
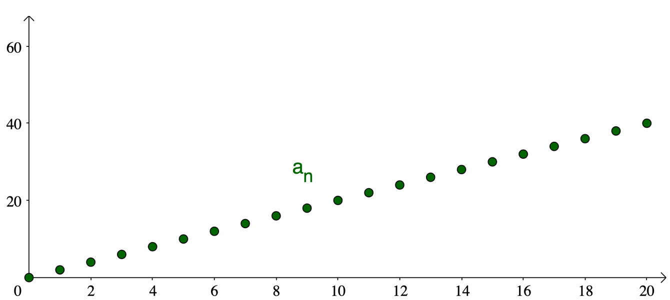


Abb. 1.2 Die Folgen aus Beispiel 1.2.3 als „Spaziergang“ in $\mathbb{R}$

Mathematisch ausgedrückt wird hier das Bild der Folge also $im(a) = \{a_0, a_1, ..., a_n, ...\}$ dargestellt, vgl. [7, 4.3.11]. Bei dieser Darstellung kann allerdings die Reihenfolge der Folgenglieder nicht abgelesen werden.

(ii) (Für reelle Folgen) *Graph der Folge:* Für die Beispiele aus 1.2.3 ergeben sich die Graphen in Abbildung 1.3.



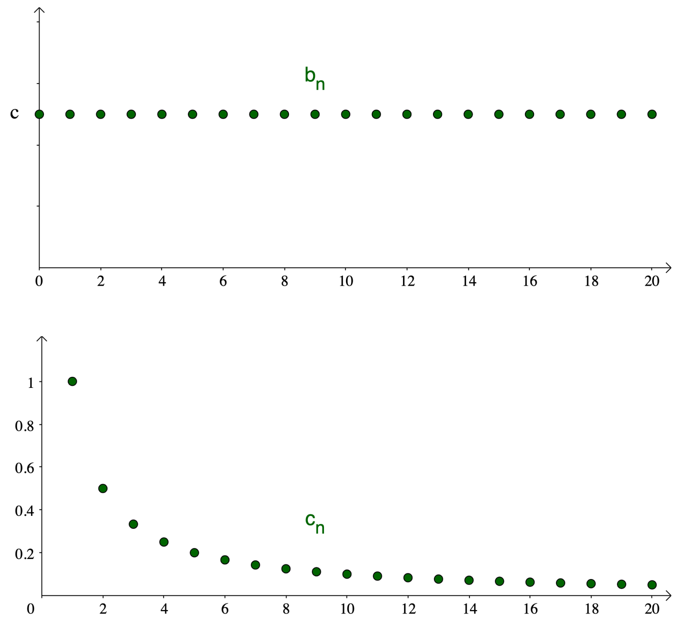


Abb. 1.3 Die Folgen aus Beispiel 1.2.3 als Graphen dargestellt

Je nach Aufgabenstellung wird es manchmal hilfreicher sein (i) zu verwenden, manchmal (ii).

Beispiel 1.2.5 (Einige wichtige Folgen).

(i) $a_n = (-1)^n$, $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ („die Vorzeichenmaschine").

(ii) $b_n = \frac{n}{n+1}$, $(b_n) = \big(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\big)$.

(iii) $c_n = \frac{n}{2^n}$, $(c_n) = \big(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \dots\big)$.

(iv) Die *Fibonacci-Folge* (auch Fibonacci-Zahlen) ist rekursiv definiert gemäß

$$f_0 := 0, \quad f_1 := 1, \quad f_n := f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

f_n ist die Summe
seiner beiden Vorgänger

(v) *Geometrische Folge:* Sei $x \in \mathbb{R}$; setze $d_n = x^n$, $(d_n) = (1, x, x^2, \dots)$.

(vi) *Geometrische Reihe:* (siehe 1.1.6 — war ja als wichtig angedroht!)
Sei wieder $x \in \mathbb{R}$ und definiere

(v)

$$s_n(x) \equiv s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} d_k = (1,\ 1+x,\ 1+x+x^2,\ 1+x+x^2+x^3, \dots).$$

Jetzt geht es wirklich los: Die folgende Definition ist die wichtigste der gesamten Analysis; sie ist ihr Start- und Angelpunkt.

Definition 1.2.6 (Grenzwert).
Sei (a_n) eine reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen, (a_n) *konvergiert gegen* a, falls

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.} \tag{1.7}$$

In diesem Fall heißt a *Grenzwert* (oder *Limes*) der Folge (a_n) und wir schreiben

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{bzw. kürzer} \quad a = \lim a_n \quad \text{und}$$

$$a_n \to a \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad \text{bzw. kürzer} \quad a_n \to a\,(n \to \infty) \quad \text{oder ganz kurz} \quad a_n \to a.$$

sprich: a_n geht gegen a

1.2.7 (Geometrische Veranschaulichung und Sprechweisen).
Für $\varepsilon > 0$ versteht man unter der ε-*Umgebung* $U_\varepsilon(a)$ von $a \in \mathbb{R}$ alle Zahlen in $\mathbb{R}$, die von a Abstand kleiner als ε haben, also das offene Intervall, vgl. Abb. 1.4.

$$U_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}.$$

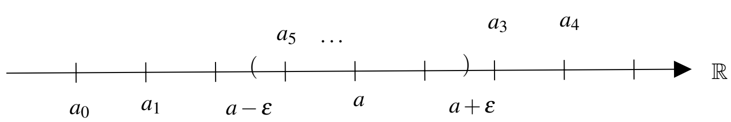


Abb. 1.4 ε-Umgebung von a

Die Konvergenzbedingung 1.7 sagt nun:

Zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ gibt es einen Folgenindex N, sodass alle späteren Folgenglieder a_n (d.h. alle a_n mit $n \geq N$) in der ε-Umgebung des Grenzwerts a liegen, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \forall n \geq N$.

Andere Sprechweisen für die Konvergenzbedingung 1.7 sind:

- Die Folgenglieder a_n liegen *schließlich* in jeder (noch so kleinen!) ε-Umgebung des Grenzwerts a.

soll heißen:
ab einem bestimmten
N also $\forall n \geq N$

- In jeder (noch so kleinen!) ε-Umgebung des Limes a liegen fast alle Folgenglieder a_n.

soll heißen: alle bis auf endlich viele; nämlich bis auf $a_1, \dots a_{N-1}$

Weitere gültige und ungültige Formulierungen werden wir in den Übungen besprechen.

Wir machen noch die folgenden Sprechweisen offiziell.

Definition 1.2.8 (Divergenz, Nullfolge).

(i) Ist eine Folge (a_n) nicht konvergent (d.h. $\nexists a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$), dann heißt (a_n) *divergent*.

(ii) Gilt $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, dann heißt (a_n) *Nullfolge*.

1.2.9 (Behandlung von Beispielen).
Alles schön und gut, aber wie weist man konkret nach, dass $a_n \to a$?

(i) Will ich konkret für eine gegebene Folge (a_n) und ein gegebenes a zeigen, dass $a_n \to a$, dann muss für jedes $\varepsilon > 0$ ein Folgenindex N gefunden werden,sodass die Abschätzung

i.A. schwieriger für kleine ε

darf ruhig von ε abhängen und wird es i.A. auch tun; oft schreibt man deshalb $N(\varepsilon)$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle a_n nach a_N gilt.
Beachte in diesem Zusammenhang die folgende

GROSSE FETTE WARNUNG:

Niemals darf umgekehrt ε von N abhängen. Die Reihenfolge der Quantoren ist hier also essentiell, vgl. [7, 3.2,3.3].

(ii) Will ich hingegen zeigen, dass $a_n \not\to a$, so muss (nur) ein Versager-ε gefunden werden, sodass die a_n beliebig spät aus der ε-Umgebung raushüpfen. Das ergibt sich nämlich aus der Verneinung der Konvergenzbedingung:

$$\neg\,(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: \quad |a_n - a| < \varepsilon) =$$
$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N: \quad |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

Es gibt zumindest ein Versager-ε

sodass egal wie spät

es immer noch ein n gibt

sodass a_n nicht in $U_\varepsilon(a)$ liegt

(iii) Bei konkreten Beispielen ist es also förderlich, zuerst eine Vermutung über Konvergenz oder Divergenz anzustellen und diese dann nachzuweisen, also entweder
- zu jeden $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon)$ zu finden, ab dem alles gut ist, oder
- ein Versager-ε zu finden, für das auch beliebig späte Folgenglieder a_n aus der ε-Umgebung abhauen.

Bevor wir jetzt endlich mit konkreten Beispielen anfangen, noch eine einfache aber wichtige

Beobachtung 1.2.10 (Der Folgenanfang ist egal).
Aus der Definition 1.2.6 ist unmittelbar klar, dass sich weder Konvergenz noch Grenzwert einer Folge (a_n) ändern, wenn endlich viele Folgenglieder verändert oder ganz weggelassen werden (d.h. $\exists M \in \mathbb{N}$ sodass $\forall n \geq M$ die a_n gleich bleiben - es wird also nur am Folgenanfang herumgebastelt).

banales Beispiel!

Beispiel 1.2.11.

(i) *Konstante Folgen konvergieren:* Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und $b_n = c\ \forall n \in \mathbb{N}$ (vgl. 1.2.3 (ii)). Dann gilt $\lim b_n = c$.
Denn sei $\varepsilon > 0$ beliebig, wähle $N = 0$, dann gilt

So banal, dass N von ε unabhängig wählbar ist

$$|b_n - c| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Das Erzbeispiel; anschaulich klar, vgl. 1.2.3(iii)

(ii) $\left(\frac{1}{n}\right)$ *ist eine Nullfolge:*

$$\text{Sei} \quad \varepsilon > 0 \quad \overset{1.1.3(i)}{\Longrightarrow} \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \frac{1}{N} < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \geq N: \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

dahinter steckt letztlich das Archimedische Axiom

anschaulich klar, oder?

(iii) *Die Vorzeichenmaschine divergiert:*
Sei $a_n = (-1)^n$, dann gibt es kein $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$. Wir beweisen das indirekt. Angenommen, es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$. Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}$

$$\overset{1.2.6}{\Longrightarrow} \quad \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall n \geq N. \tag{1.8}$$

Zusätzlich bemerke

$$|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = |(-1)^n(-1-1)| = 2.$$

Damit ergibt sich $\forall n \geq N$

fieser Trick!

$$
\begin{aligned}
2 = |a_{n+1} - a_n| &= |a_{n+1} - a + a - a_n| \\
&\overset{\triangle-\text{Ungl.}}{\leq} |a_{n+1} - a| + |a - a_n| \\
&\overset{(1.8)}{<} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,
\end{aligned}
$$

und somit der Widerspruch $2 < 1$. Also divergiert die Vorzeichenmaschine.

(iv) $\lim \frac{n}{n+1} = 1$. (Diese Konvergenz kann nach 1.2.5(ii) bzw. UE vermutet werden.) Denn sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 1/\varepsilon$ (vgl. (ii)). Dann gilt $\forall n \geq N$

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Wie das Amen im Gebet

(v) $\lim \frac{n}{2^n} = 0$. (Vermutung wiederum nach 1.2.5(iii))
Wir verwenden folgende Tatsache

$$\forall n \geq 4 : n^2 \leq 2^n. \tag{1.9}$$

Es gilt also

$$\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 4. \tag{1.10}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und wähle $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$N \geq \max\left(4, \frac{2}{\varepsilon}\right). \tag{1.11}$$

Dann gilt $\forall n \geq N$:

$$\left|\frac{n}{2^n} - 0\right| = \frac{n}{2^n} \overset{(1.10)}{\leq} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \overset{(1.11)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Motivation 1.2.12 (Naja - zum Teil ganz schön trickreich...).
Wir haben gesehen, dass beim Bearbeiten von konkreten Beispielen einiges an Kreativität und auch Übung nötig ist. Bevor wir weitere wichtige Beispiele angehen, erweitern wir unseren Begriffsapparat - was uns nicht nur theoretisch weiterhilft, sondern auch beim konkreten Berechnen von Grenzwerten.

Definition 1.2.13 (Beschränkte Folge).
Eine reelle Folge (a_n) heißt *nach oben bzw. nach unten beschränkt*, falls $\exists K \in \mathbb{R}$, sodass

$$a_n \leq K \quad \text{bzw.} \quad a_n \geq K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sie heißt *beschränkt*, falls (a_n) nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beobachtung 1.2.14 (Beschränkte Folgen sind eingesperrt).
Definition 1.2.13 besagt:

$$(a_n) \quad \text{beschränkt} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists K > 0: \quad |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[Wähle hierfür das Maximum der K's in 1.2.13 für oben bzw. unten.] Geometrisch bedeutet das, dass alle a_n im Intervall $[-K, K]$ liegen (also dort eingesperrt sind, vgl. Abb. 1.5).

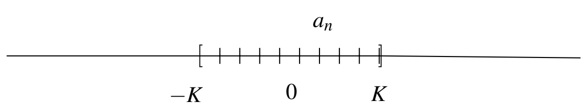


Abb. 1.5 (a_n) ist durch K beschränkt

d.h. K kann 0 gewählt werden

Beispiel 1.2.15 ((un-)beschränkte Folgen).

(i) $a_n = n$ ist nach unten durch 0 beschränkt ($a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$), aber nicht nach oben. [Folgt direkt aus dem Archimedischen Axiom: $\forall K > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$: $n > K$ ($x = 1, y = K$ in 0.1.12(i))].

(ii) $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist beschränkt:
$\left(\frac{1}{n}\right)$ ist durch 0 n.u.b (= nach unten beschränkt), denn

$$0 < \frac{1}{n} \quad \forall \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1$$

und durch 1 n.o.b (= nach oben beschränkt), denn

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1.$$

Die Tatsache, dass die *konvergente* Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ beschränkt ist, ist kein Zufall sondern ein allgemeines Prinzip wie das nächste Resultat zeigt.

Satz 1.2.16 (konvergent $\Rightarrow$ beschränkt).

$\boxed{\textit{Jede konvergente reelle Folge ist beschränkt.}}$

Beweis. Sei $a = \lim a_n$.

$$\overset{1.2.6}{\underset{\varepsilon=1}{\Longrightarrow}} \quad \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq N$$
$$\Longrightarrow \quad |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \quad \forall n \geq N.$$

Nun setze $K := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a|+1\}$.
Dann gilt $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

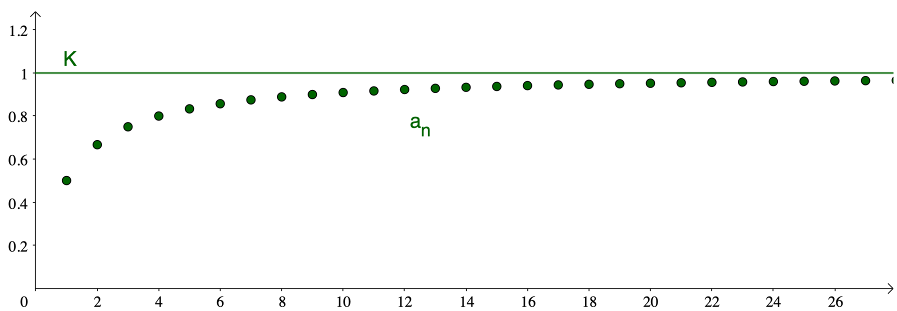


Abb. 1.6 Eine konvergente Folge ist beschränkt.

Warnung 1.2.17 (beschränkt $\not\Rightarrow$ konvergent).
Die Umkehrung von 1.2.16 ist FALSCH. Ein Gegenbeispiel ist etwa die Vorzeichenmaschine $a_n = (-1)^n$:

$$|a_n| \leq 1 \text{ für alle } n, \text{ aber } (a_n) \text{ ist divergent nach 1.2.11(iii).}$$

Andererseits gilt aber natürlich schon, dass unbeschränkte Folgen divergent sind!

Wir arbeiten nun unsere Beispielliste aus 1.2.5 weiter ab.

Beispiel 1.2.18. (i) *Die Fibonaccifolge (f_n) ist divergent.*
Zuerst erinnern wir uns, dass laut 1.2.5(iv) $f_0 = 0, f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $\forall n \geq 2$ gilt. Wir zeigen, dass (f_n) unbeschränkt und somit nach 1.2.16 divergent ist. Genauer behaupten wir:

$$f_n \geq n \quad \forall n \geq 6.$$

Beweis mittels Induktion:

$$n = 5: \quad f_6 = 8 \quad \text{vgl. 1.2.5(iv).}$$

$$n \to n+1: \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \overset{\text{(IV)}}{\geq} n + (n-1) \overset{n \geq 6}{\geq} n + (2-1) = n+1.$$

(ii) Für ein (beliebiges aber fixiertes) $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die *geometrische Folge* $d_n = x^n$. Wenig überraschend hängt das Konvergenzverhalten von x ab. Wir unterscheiden die drei Fälle $|x| > 1$, $|x| = 1$ und $|x| < 1$.
1.Fall: $|x| > 1 \Rightarrow x^n$ divergent. Denn:

$$\begin{aligned} |x| > 1 \quad &\overset{1.1.5(i)}{\underset{b=|x|}{\Longrightarrow}} \quad \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad |x|^n > K \\ &\Longrightarrow \quad x^n \quad \text{unbeschränkt} \quad \overset{1.2.16}{\Longrightarrow} \quad x^n \quad \text{divergent.} \end{aligned}$$

Wachstum
von Potenzen

2.Fall: $|x| = 1$, also

$$\begin{aligned} \text{entweder} \quad x = 1 \quad &\Longrightarrow \quad d_n = 1 \quad \forall n \overset{1.2.11(i)}{\Longrightarrow} \quad d_n \to 1, \\ \text{oder} \quad x = -1 \quad &\Longrightarrow \quad d_n = (-1)^n \quad \overset{1.2.11(iii)}{\Longrightarrow} \quad \text{divergent.} \end{aligned}$$

3.Fall: $|x| < 1 \Rightarrow x^n \to 0\,(n \to \infty)$. Denn:

$$\text{Falls} \quad x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^n = 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \overset{1.2.11(i)}{\Longrightarrow} \quad d_n \to 0.$$

Das ist endlich
der interessante Fall

das war
leicht

Es bleibt also nur der Fall $0 < |x| < 1$. Sei $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} &\overset{1.1.5(ii)}{\underset{b=|x|}{\Longrightarrow}} \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |x|^N < \varepsilon, \quad \text{und damit} \\ &\forall n \geq N: \quad |x^n - 0| = |x^n| \geq |x|^N < \varepsilon. \end{aligned}$$

vgl. die Anmerkungen in
[7, graue Box, p.118]

1.2.19 (Hoppala). (Der Grenzwert?)
Wir haben bisher immer von dem Grenzwert einer reellen Folge geredet. Können wir aber sicher sein, dass eine reelle Folge höchstens einen Limes besitzt und nicht etwa zwei oder drei? Zum Glück gilt...

Satz 1.2.20 (Eindeutigkeit des Limes).

$$\boxed{\textit{Jede konvergente reelle Folge hat genau einen Limes.}}$$

Beweis. Wie so oft bei Eindeutigkeitsbeweisen nehmen wir an es gäbe zwei verschiedene Limiten und folgern daraus einen Widerspruch.
Angenommen, $a_n \to a$ und $a_n \to b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Dann ist

$$\varepsilon := \frac{|a-b|}{3} > 0 \quad (\text{weil } a \neq b!).$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} a_n \to a \quad &\Longrightarrow \quad \exists N_1 : \quad \forall n \geq N_1 : \quad |a_n - a| < \varepsilon, \\ a_n \to b \quad &\Longrightarrow \quad \exists N_2 : \quad \forall n \geq N_2 : \quad |a_n - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit gilt für alle $n \geq N := \max(N_1, N_2)$

$$\begin{aligned} &|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a-b| \\ &\overset{a \neq b}{\Longrightarrow} \quad 1 < \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. □

Motivation 1.2.21 (Weitere theoretische Hilfestellung mit großer praktischer Relevanz).
Ganz im Sinne von 1.2.12 haben wir beim konkreten Berechnen von Limiten weitere Hilfestellungen bitter nötig. Wir leiten nun einige Resultate für das Rechnen mit konvergenten Folgen her, die wir gut verwenden können, um Grenzwerte komplizierter Folgen zu berechnen.

Satz 1.2.22 (Summen und Produkte konvergenter Folgen).
Seien (a_n) und (b_n) konvergente (reelle) Folgen. Dann konvergiert auch $(a_n + b_n)_n$ und $(a_n \cdot b_n)_n$ und es gilt

$$\begin{aligned} \lim(a_n + b_n) &= \lim a_n + \lim b_n, \\ \lim(a_n b_n) &= \lim a_n \cdot \lim b_n. \end{aligned}$$

Die Summe konvergenter Folgen
konvergiert gegen die Summe
der Grenzwerte;
detto für das Produkt

Beweis. Sei $a := \lim a_n$, $b := \lim b_n$.
Summe: Wir müssen zeigen, dass $a_n + b_n \to a + b$. Sei hierfür $\varepsilon > 0$, dann ist auch $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ und daher

$$\begin{aligned} &\exists N_1 : \quad \forall n \geq N_1 : \quad |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{und} \\ &\exists N_2 : \quad \forall n \geq N_2 : \quad |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Somit gilt für alle $n \geq N := \max(N_1, N_2)$

$$\underset{\sim\sim\sim}{|(a_n+b_n)-(a+b)|} = |(a_n-a)+(b_n-b)| \overset{\triangle-\text{Ungl.}}{\leq} |a_n-a|+|b_n-b| \lesssim \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \underset{\sim}{\varepsilon}.$$

Produkt: Wir müssen zeigen: $a_nb_n \to ab$. Da (a_n) konvergiert, ist (a_n) beschränkt nach 1.2.16. Genauer:

$$\exists K_1 > 0: \quad |a_n| \leq K_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definiere $K := \max(K_1, |b|) > 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$, dann auch $\frac{\varepsilon}{2K} > 0$ und wegen $a_n \to a$, $b_n \to b$ gilt

$$\exists M_1 \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \forall n \geq M_1,$$
$$\exists M_2 \in \mathbb{N}: \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \forall n \geq M_2.$$

Somit gilt für alle $n \geq M := \max(M_1, M_2)$

$$\begin{aligned}|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\overset{\triangle-\text{Ungl.}}{\leq} |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \\ &< K\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K}K = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.2.23 (Polierte Beweise).
Natürlich ist insbesondere der letzte Beweis POLIERT, in dem Sinn, dass ε und K so gewählt wurden, dass am Schluss $\cdots < \varepsilon$ steht und nicht etwa $\cdots < 2K\varepsilon$. Letzteres wäre zwar auch okay [→UE], aber eben nicht ganz so lässig.

Man spricht im Zusammenhang mit dem Auftreten der △-Ungleichung in der entscheidenden Abschätzung von $\frac{\varepsilon}{2}$-Beweisen [vgl. Summe in 1.2.22]. Wir werden aber sehr bald auch $\frac{\varepsilon}{3}$-Beweise sehen; so wird ein zweimaliges Anwenden der △-Ungleichung angedeutet.
Wir setzen mit (einfachen) Folgerungen aus 1.2.22 fort.

Korollar 1.2.24 (Linearkombinationen konvergenter Folgen).
Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente (reelle) Folgen und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert auch die Folge $(\lambda a_n + \mu b_n)$ und es gilt

$$\lim(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim a_n + \mu \lim b_n.$$

Beweis. Das Korollar folgt aus 1.2.22 mittels eines Tricks: Wir interpretieren die Folge $(\lambda a_n)_n$ als Produkt zweier Folgen:

$$\begin{aligned}(\lambda a_n)_n &= (\lambda)_n \cdot (a_n)_n \\ &\overset{1.2.22}{\Longrightarrow} \quad \lambda a_n \to \lambda \lim a_n.\end{aligned}$$

Analog folgt $\mu b_n \to \mu \lim b_n$ und mit dem Summenteil in 1.2.22 haben wir insgesamt

$$(\lambda a_n) + (\mu b_n) \to \lambda \lim a_n + \mu \lim b_n. \qquad \square$$

Satz 1.2.25 (Quotienten konvergenter Folgen).
Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente (reelle) Folgen mit $\lim b_n =: b \neq 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, die Quotientenfolge

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$$

$\exists \frac{1}{b_n}$?
Ja, für n groß genug

konvergiert und es gilt

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

Beweis. Sei $a := \lim a_n$.

(1) Wir beweisen zunächst die Aussage, dass $b_n \neq 0$ für große n: Da $b \neq 0$, gilt $\frac{|b|}{2} (=: \varepsilon') > 0$. Somit:

$$\begin{aligned} &\overset{b_n \to b}{\Longrightarrow} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq n_0 \\ &\Longrightarrow \quad \forall n \geq n_0: \quad \frac{|b|}{2} > |b_n - b| \geq |b| - |b_n| \\ &\Longrightarrow \quad |b_n| > \frac{|b|}{2} > 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

umgekehrte
$\triangle$-Ungl.

Achtung: Schon
wieder poliert

(2) Wir zeigen $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \geq n_0} \to \frac{1}{b}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\varepsilon'' := \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} > 0$.

$$\overset{b_n \to b}{\Longrightarrow} \quad \exists N_1 \in \mathbb{N}: \quad |b_n - b| < \varepsilon'' = \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1. \tag{1.13}$$

Also gilt für alle $n \geq N := \max(n_0, N_1)$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} = \frac{1}{|b_n|} \frac{1}{|b|} \, |b_n - b| \underset{(1.13)}{\overset{(1.12)}{<}} \frac{2}{|b|} \, \frac{1}{|b|} \, \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

konstante Folge:
$(\lambda)_n \to \lambda$,
vgl. 1.2.11(i)

(3) Aus Satz 1.2.22 folgt sofort

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \ \frac{1}{b_n} \to a \ \frac{1}{b} = \frac{a}{b}. \qquad \square$$

Beispiel 1.2.26 (Im Sinne von 1.2.21).

$$\lim \frac{3n^2 + 13n}{n^2 + 2} = \lim \frac{3 + \frac{13}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} \overset{1.2.25}{=} 3.$$

<u>Trick:</u> dividiere Zähler und Nenner durch die jeweils höchste n-Potenz

Folgende Überlegungen fließen im letzten Schritt gemeinsam mit Satz 1.2.25 in die Rechnung mit ein

$$3 + \frac{13}{n} = 3 + 13\frac{1}{n} \underset{1.2.25}{\overset{1.2.24}{\longrightarrow}} 3 + 13 \cdot 0 = 3 \quad \text{und}$$
$$1 + \frac{2}{n^2} = 1 + 2\frac{1}{n}\frac{1}{n} \underset{1.2.22,1.2.24}{\overset{1.2.25}{\longrightarrow}} 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 1.$$

Satz 1.2.27 (Größenvergleich konvergenter Folgen).
Seien $(a_n), (b_n)$ (reelle) konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ für fast alle n (d.h.: $\exists n_0 : a_n \leq b_n \ \forall n \geq n_0$). Dann gilt

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

Beweis. (1) Setze $c_n := b_n - a_n$, dann ist $c_n \geq 0$ für fast alle n. Nach 1.2.24 ist (c_n) konvergent mit $c := \lim c_n = \lim b_n - \lim a_n$. Daher genügt es zu zeigen, dass $c \geq 0$.

(2) Wir nehmen indirekt an, dass $c < 0$ gilt. Setze $\varepsilon := -c > 0$. Nach 1.2.6: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$:

$$\varepsilon > |c_n - c| = |c_n - (-\varepsilon)| = |c_n + \varepsilon| \underset{\varepsilon > 0}{\overset{c_n \geq 0}{=}} c_n + \varepsilon$$

Daher gilt $0 > c_n \quad \forall n \geq N$, ein Widerspruch. $\square$

Satz 1.2.28 (Sandwich-Lemma).
Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ (reelle) Folgen. Angenommen es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq n_0.$$

Weiters gelte $a_n \to a$ und $c_n \to a$. Dann ist auch (b_n) konvergent und es gilt

$$b_n \to a.$$

Wir können dieses Resultat auch sehr einprägsam symbolisch darstellen durch die Schreibweise:

$$\begin{array}{ccccc} a_n & \le & b_n & \le & c_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & & a & & a \end{array}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq N_0$

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$
$$|c_n - a| < \varepsilon.$$

Somit gilt für alle $n \geq N := \max(n_0, N_0)$

$$\begin{aligned} & a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon \\ \overset{-a}{\Longrightarrow} \quad & -\varepsilon < b_n - a < \varepsilon \\ \Longrightarrow \quad & |b_n - a| < \varepsilon \\ \Longrightarrow \quad & b_n \to a. \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.2.29 (Wieder im Sinne von 1.2.21; mit einem Bonus).
Sei $n \geq 1$ und setze

$$b_n := \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}.$$

Es gilt $n + 1 \leq k \leq 2n$ und daher

$$n < k \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{k} < \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n^2}.$$

Somit

$$0 < b_n < \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}}_{n\,\text{mal}} = n\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Somit folgt nach dem Sandwich-Lemma (mit $a_n = 0, c_n = \frac{1}{n}$) $b_n \to 0$.

Warnung 1.2.30 (Kein 1.2.27 für $<$ statt $\leq$).
Sind $(a_n), (b_n)$ konvergent und gilt (sogar) $a_n < b_n$ für alle n, so lässt sich daraus <u>nicht</u> $\lim a_n < \lim b_n$ schlussfolgern, wie 1.2.29 zeigt. Mit 1.2.27 folgt aber $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Beispiel 1.2.31 (Wurzelfolgen- alles was gut und teuer ist!).

(i) Für alle $a > 1$ gilt

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad (n \to \infty). \tag{1.14}$$

Zunächst gilt wegen der Monotonie der Wurzel [7, 6.4.9]: $1 < a \;\; \Rightarrow \;\; 1 < \sqrt[n]{a}$. Nun schreiben wir $1 < \sqrt[n]{a} =: 1 + x_n$ für ein passendes x_n (d.h. wir setzen $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$). Dann gilt wegen der Bernoulli Ungleichung

$$a = (\sqrt[n]{a})^n = (1 + x_n)^n \geq 1 + n x_n \tag{1.15}$$

und daher mit dem Sandwich Lemma 1.2.28 in der instruktiven Schreibweise:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & < & x_n & \overset{(1.15)}{\leq} & \dfrac{a-1}{n} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ 0 & & 0 & & 0. \end{array}$$

$$\boxed{\tfrac{a-1}{n} = (a-1) \cdot \tfrac{1}{n} \overset{1.2.22}{\to} 0}$$

Also gilt $x_n \to 0$ und daher $1 \overset{(1.2.23)}{=} \lim(1 + x_n) = \lim(\sqrt[n]{a})$, wie behauptet.

(ii) Es gilt sogar die viel stärkere Aussage

$$\sqrt[n]{n} \to 1 \quad (n \to \infty), \tag{1.16}$$

die wie in den Übungen beweisen werden.

Motivation 1.2.32 (Unendliche Reihen - Formulierung).

Einige der bisher untersuchten Folgen waren als Summen gegeben (z.B. 1.2.5 - die geometrische Reihe, oder 1.2.29). Genauer, sei $(a_n)_n$ eine Folge. Daraus entsteht eine (unendliche) Reihe (offizielle Definition unten) durch Summieren:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + \ldots$$

Dieser Ausdruck ist sehr vage - um ihn genauer zu fassen, betrachten wir die sogenannten *Partialsummen* s_m für ein $m \in \mathbb{N}$

$$s_m := a_0 + a_1 + \cdots + a_m = \sum_{k=0}^{m} a_k$$

und fassen $(s_m)_m$ als Folge auf. Durch diesen Trick können wir unendliche Reihen als spezielle Folgen - nämlich als die Folge der Partialsummen - auffassen und so alles, was wir über Folgen schon herausgefunden haben, verwenden. Nun offiziell:

Definition 1.2.33 (Reihe).
Sei $(a_n)_n$ eine Folge.

(i) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ definieren wir die m-te *Partialsumme* (der a_n's) ab

$$s_m := \sum_{n=0}^{m} a_n.$$

(ii) Die Folge $(s_m)_m$ der Partialsummen heißt *(unendliche) Reihe* mit Gliedern a_n und wird mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{oder kurz} \quad \sum a_n$$

bezeichnet.

(iii) Konvergiert $(s_m)_m$, so sagen wir auch die *Reihe konvergiert*. Wir bezeichnen $\lim s_m$ ebenfalls mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (kurz $\sum a_n$) und nennen ihn die *Summe der Reihe*.

leider, aber das ist allgemein so üblich

Bemerkung 1.2.34 (Zur Notation).
Das Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (bzw. $\sum a_n$) steht also für zwei Dinge:

(i) die Reihe selbst, also die Folge $(s_m)_m$ der Partialsummen, und

(ii) im Falle der Konvergenz für den Grenzwert

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n.$$

Ganz analog zu Folgen betrachten wir auch Reihen

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

für ein beliebiges $1 \leq k \in \mathbb{N}$.

Beispiel 1.2.35.
Sei $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ $(n \geq 1)$. Die korrespondierende Reihe ist dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Bemerke, dass

$$a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}.$$

[Tatsächlich gilt $\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{n^2-n^2-n+n+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}\right)$.]
Daher gilt für die Partialsummen

$$\begin{aligned}
s_m &= \sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}-0\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)+\dots\\
&\quad \dots+\left(\frac{m-1}{m}-\frac{m-2}{m-1}\right)+\left(\frac{m}{m+1}-\frac{m-1}{m}\right)=\frac{m}{m+1} \xrightarrow[\text{bzw. 1.2.11(iv)}]{\text{wie in 1.2.26}} 1.
\end{aligned}$$

Also ist die Reihe konvergent und es gilt

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{m\to\infty} s_m = 1.}$$

1.2.36 (Hoppala). (Reality check)
Wie können wir <u>intuitiv</u> verstehen, dass eine Summe von unendlich vielen positiven Gliedern <u>nicht</u> unendlich ergibt, also konvergiert - so wie das in 1.2.35 passiert ist? Es gilt nach obigen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots=1.$$

Natürlich werden die a_n immer kleiner; es gilt sogar

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}\to 0. \qquad \left(0<\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n}\to 0, \quad \text{dann Sandwich-Lemma}\right)$$

Aber warum (bzw. wann) reicht das?

Für eine *intuitive Antwort* betrachten wir eine Torte. Zunächst essen wir die halbe Torte, dann (sparsamerweise) von der verbliebenen Hälfte die Hälfte usw. Es ergibt sich die Reihe

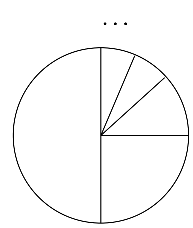


Abb. 1.7 Tortendiagramm

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

deren Summe höchstens 1 sein kann - wir hatten ja nur eine Torte! Als Grenzwert ergibt sich tatsächlich 1, wie wir unter anderem im nächsten Beispiel sehen werden.

Beispiel 1.2.37 (Die geometrische Reihe). DAS Erzbeispiel
Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix. Wir betrachten

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Praktischerweise haben wir in 1.1.6 schon die Partialsummen s_m ausgerechnet:

$$s_m(x) = \sum_{n=0}^{m} x^n = \begin{cases} m+1 & (x=1) \\ \frac{1-x^{m+1}}{1-x} & (x \neq 1) \end{cases} \tag{1.17}$$

Wir unterscheiden Fälle wie schon in 1.2.18(ii) (wo wir praktischerweise schon das Konvergenzverhalten der Glieder x^n berechnet haben).
FALL(1): $|x| > 1 \Rightarrow \sum x^n$ divergent. Denn:

$$s_m \overset{(1.17)}{=} \underbrace{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x}}_{\text{unabhängig von } m} x^{m+1} \quad \Longrightarrow \quad s_m \quad \text{unbeschränkt} \quad \overset{1.2.16}{\Longrightarrow} \quad s_m \quad \text{divergent.}$$

unbeschränkt nach 1.2.18(ii)

FALL(2): $|x| = 1 \Rightarrow \sum x^n$ divergent. Denn:
Sei $x = 1$, dann ist $s_m \overset{(1.17)}{=} m+1$, also unbeschränkt und somit divergent.
Sei $x = -1$, dann gilt

$$s_m \overset{(1.17)}{=} \frac{1-x^{m+1}}{1-x} = \frac{1-(-1)^{m+1}}{2} = \begin{cases} 1 & (m \text{ gerade}) \\ 0 & (m \text{ ungerade}) \end{cases}.$$

Somit ist s_m divergent (analog zur Vorzeichenmaschine, vgl. 1.2.11(iii)).

FALL(3): $|x| < 1$, dann gilt

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.}$$

Das ist der wichtigste Fall und eine der wichtigsten Formeln der VO

Denn

$$s_m \overset{(1.17)}{=} \frac{1}{1-x} - \frac{\overbrace{x^{m+1}}^{\to 0}}{1-x} \xrightarrow[1.2.22]{1.2.18(ii)} \frac{1}{1-x}.$$

Als Spezialfälle von Fall(3) betrachten wir $x = \pm\frac{1}{2}$. Wir erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = \frac{1}{1-1/2} = 2,$$

vgl. Torte 1.2.36

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots = \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}.$$

Bemerkung 1.2.38 (Konvergenz von Reihen).
Im Vergleich zu „normalen“ Folgen ist es oft schwieriger, die Konvergenz von Reihen zu zeigen. Noch schwieriger ist es, die Summe einer Reihe tatsächlich auszurechnen und wir werden uns damit später noch ausführlich befassen.

Hier halten wir nur ein einfaches strukturelles Resultat für Summen (Linearkombinationen) konvergenter Reihen fest - Produkte sind komplizierter, dazu später mehr.

Proposition 1.2.39 (Linearkombinationen konvergenter Reihen).
Seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergente Reihen und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist auch

$$\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$$

konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \mu\sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Beweis. Wende Korollar 1.2.24 auf die Partialsummen an. [UE]

Beispiel 1.2.40 (Periodische Dezimalzahlen).
Unendliche Dezimalzahlen sind spezielle Reihen. Hier betrachten wir die periodische Dezimalzahl $x = 0.08636363\overline{63}$.
Das bedeutet, dass x den folgenden Wert hat:

Schreibweise: 63 wiederholt sich immer wieder.

$$\begin{aligned} x &= \frac{8}{100}+\frac{63}{10000}+\frac{63}{1000000}+\dots \\ &= \frac{8}{100}+\frac{63}{10^4}+\frac{63}{10^6}+\cdots = \frac{8}{100}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{63}{10^{4+2k}}. \end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{63}{10^{4+2k}} \overset{1.2.39}{=} \frac{63}{10^4}\sum_{k=0}^{\infty}(10^{-2})^k \overset{1.2.37}{=} \frac{63}{10^4}\frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{63}{10000}\frac{100}{99} = \frac{63}{9900}$$

und somit

$$x = \frac{8}{100}+\frac{63}{9900} = \frac{855}{9900} = \frac{19}{220}.$$

Motivation 1.2.41 (Ein genauer Blick auf divergente Folgen).
Zum Abschluss dieses langen Abschnitts werfen wir einen Blick auf die verschiedenen Arten der Divergenz von Folgen. Bisher haben wir etwa folgende divergente Folgen betrachtet:

- die Vorzeichenmaschine $(-1)^n$ ist divergent aber beschränkt;
- $a_n = n$ ist unbeschränkt und (daher) divergent.

Wir führen nun für diese zweite Art - nämlich das über alle Schranken hinauswachsen - der Divergenz einen eigenen Begriff ein und untersuchen diese „bestimmte“ Divergenz.

Definition 1.2.42 (Bestimmte Divergenz, uneigentliche Konvergenz).

(i) Eine (reelle) Folge (a_n) heißt *uneigentlich konvergent* oder *bestimmt divergent gegen* $+\infty$ (oder kurz ∞), falls

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad a_n > K \quad \forall n \geq N.$$

a_n wächst schließlich über jede Schranke hinaus

In diesem Fall schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (bzw. $a_n \to \infty$).

(ii) Wir sagen (a_n) *konvergiert uneigentlich* bzw. *divergiert bestimmt gegen* $-\infty$, falls $(-a_n) \to \infty$ und schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (bzw. $a_n \to -\infty$).

Beobachtung 1.2.43 (Bestimmte Divergenz und Schranken).

(i) $a_n \to -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N} : a_n < K\ \ \forall n \geq N.$

(ii) Aus der Definition folgt, dass bestimmt divergente Folgen unbeschränkt sind, genauer:

$$\begin{aligned} a_n \to \infty &\quad \Longrightarrow \quad (a_n) \quad \text{nach oben unbeschränkt,} \\ a_n \to -\infty &\quad \Longrightarrow \quad (a_n) \quad \text{nach unten unbeschränkt.} \end{aligned}$$

Beispiel 1.2.44 (Bestimmt divergente Folgen).

(i) $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(-n^2) = -\infty$.

(ii) $a_n = (-1)^n n$ ist unbeschränkt daher divergent aber <u>nicht</u> bestimmt divergent, denn $a_{2n} \to \infty$ und $a_{2n+1} \to -\infty$.
Etwas genauer gilt nämlich:

$$\begin{aligned} &\forall K \in \mathbb{R}\ \exists N : \ \ a_{2n} > K\ \ \forall n \geq N \ \text{ und} \\ &\forall K \in \mathbb{R}\ \exists N : \ \ a_{2n-1} < K\ \ \forall n \geq N. \end{aligned}$$

Also ist die Umkehrung von 1.2.43(ii) falsch und es gilt insgesamt:

$$\boxed{\text{bestimmt divergent} \ \ \substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow} \ \ \text{unbeschränkt}}$$

Proposition 1.2.45 (Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte).
Seien $(a_n),(b_n),(c_n)$ (reelle) Folgen mit $a_n \to a \in \mathbb{R}$, $b_n, c_n \to \infty$. Dann gilt:

(i) $\lim(a_n + b_n) = \lim(b_n + a_n) = \infty$

(ii) $\lim(b_n + c_n) = \lim(c_n + b_n) = \infty$

(iii) $\lim(a_n - b_n) = \lim(-b_n + a_n) = -\infty$

(iv) *falls* $a > 0 : \lim(a_n b_n) = \lim(b_n a_n) = \infty$

(v) $\lim(b_n c_n) = \lim(c_n b_n) = \infty$

Beweis. (UE).

Warnung 1.2.46.
Es gibt keine analogen Rechenregeln für die Differenz uneigentlich konvergenter Folgen bzw. für das Produkt von uneigentlich konvergenten Folgen mit Nullfolgen.

- Es gilt z.B. für die Folgen $a_n = n$, $b_n = n^2$, die beide bestimmt gegen $+\infty$ divergieren:

$$\lim(a_n - a_n) = \lim(n - n) = 0, \text{ aber} \tag{1.18}$$
$$\lim(a_n - b_n) = \lim(n - n^2) = -\infty. \tag{1.19}$$

- Bzgl. des Produkts gilt z.B. für (a_n) und die beiden Nullfolgen $c_n = 1/n$ und $d_n = 1/n^2$:

$$\lim(a_n c_n) = \lim\left(n\frac{1}{n}\right) = \lim 1 = 1, \text{ aber} \tag{1.20}$$
$$\lim(a_n d_n) = \lim\left(n\frac{1}{n^2}\right) = \lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0. \tag{1.21}$$

Proposition 1.2.47 (Kehrwerte bestimmt divergenter Folgen und Nullfolgen).
Sei (a_n) eine (reelle) Folge. Falls $\lim(a_n) = \infty$ (oder $-\infty$), dann gilt:

(i) $\lim a_n = \infty\,(oder\ -\infty) \quad \Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad a_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$

und $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq n_0} \to 0.$

(ii) $\lim a_n = 0,\, a_n > 0\,(bzw.\, a_n < 0) \quad \forall n \quad \Longrightarrow \quad \lim\left(\frac{1}{a_n}\right) = \infty\,(bzw.\ -\infty).$

Beispiel 1.2.48.

$$\lim\left(\frac{n}{2^n}\right) \underset{\boxed{1.2.11(v)}}{=} 0 \quad \overset{1.2.47(ii)}{\underset{\boxed{\frac{n}{2^n} > 0\,\forall n}}{\Longrightarrow}} \quad \lim\left(\frac{2^n}{n}\right) = \infty$$

Beweis. (i) Es genügt $a_n \to +\infty$ zu betrachten [vgl. Definition 1.2.42(ii)].

Der erste Teil der Behauptung stellt sicher, dass wir $\frac{1}{a_n}$ zumindest für große n

bilden können. Er folgt unmittelbar aus der Definition 1.2.42(i) mit $K = 0$:

$$K := 0 \quad \overset{1.2.42(i)}{\Longrightarrow} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad a_n > K = 0 \quad \forall n \geq n_0.$$

Bemerke, dass daher $\frac{1}{a_n} > 0 \; \forall n \geq n_0$ gilt.
Wir zeigen nun $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq n_0} \to 0$. Sei $\varepsilon > 0$, setze $K := \frac{1}{\varepsilon}$

$$\overset{1.2.42(i)}{\Longrightarrow} \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}: \quad a_n > K = \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall n \geq N_0$$
$$\Longrightarrow \quad \forall n \geq N := \quad \max(n_0, N_0): \quad -\varepsilon < \frac{1}{a_n} < \varepsilon.$$

(ii) UE. $\square$

Bemerkung 1.2.49 (Bestimmte Divergenz vererbt sich nach oben resp. unten).
Falls $a_n \leq b_n$ für fast alle n und $a_n \to \infty$, dann folgt (direkt aus Definition 1.2.42(i)) $b_n \to \infty$.
Analog für $a_n \leq b_n$ und $b_n \to -\infty$.

1.3 Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, Konvergenzprinzipien

Motivation 1.3.1 (Ordnungsvollständigkeit).
Wir haben in unseren Untersuchungen die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ (auch Supremumseigenschaft; vgl. 0.1.10)

(V) Jede nichtleere nach oben (unten) beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (Infimum)

an wesentlichen Stellen verwendet. Zum Beispiel folgt die essentielle Archimedische Eigenschaft aus (V) [vgl. 0.1.12] und diese wiederum impliziert $\frac{1}{n} \to 0$.
In diesem Abschnitt wollen wir (V) und seinen Konsequenzen weiter nachspüren - (V) ist der <u>rote Faden</u>, der sich durch die gesamte Analysis zieht.
Zu diesem Zweck benötigen wir erst einmal zwei neue Begriffe, nämlich Teilfolge und Häufungswert, um zum ersten Hauptresultat der VO zu gelangen, dem Satz von <u>Bolzano-Weierstraß</u>.

Motivation 1.3.2 (Teilfolge).
Wir lernen hier ein Verfahren kennen, um aus einer gegebenen Folge eine neue Folge zu basteln - dieses ist intuitiv sehr einfach zu verstehen, seine exakte Definition allerdings etwas technisch (und daher evtl. verwirrend).
Eine *Teilfolge* einer gegebenen Folge (a_n) erhält man, wenn man gewisse, unzwar unendlich viele, Glieder von (a_n) auslässt, z.B. $(a_n) = (2n) = (0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$

hat etwa die Teilfolgen

$$(0,4,8,16,\dots),\ (0,6,12,18,\dots),\quad \text{(alle durch 2 teilbar)}$$
$$(0,4,10,18,\dots).\quad (a_1 \text{ ausgelassen, } a_3,a_4 \text{ ausgelassen,}\dots)$$

Wesentlich dabei ist es, dass

- unendlich viele Glieder der Ausgangsfolge (a_n) verwendet werden und zwar jeweils höchstens einmal,
- die Reihenfolge erhalten bleibt.

Sonst gibt es keinerlei Einschränkungen. Insbesondere können alle Folgenglieder a_n verwendet werden (also: Jede Folge ist Teilfolge von sich selbst) oder beliebig große verschiedene Lücken gelassen werden. Keine Teilfolgen von $(a_n) = (2n)$ sind z.B.

Reihenfolge verändert

$$(0,1,2,4,6,\dots) \quad \text{oder} \quad (0,2,6,4,\dots)$$
$$\text{bzw.} \quad (0,2,2,4,6,\dots).$$

kommt in (a_n) nicht vor

kommt doppelt vor

Technisch beschreibt man diesen Prozess, indem man aus der Menge der Indizes $0,1,2,3,\dots$ gewisse auswählt, also z.B. $1,3,5,7,\dots$, und damit die zugehörigen a_n, also $a_1,a_3,a_5,a_7,\dots$. D.h. aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gewisse $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ (hier $n_0 = 1, n_1 = 3, n_2 = 5, n_3 = 7$) mit $n_0 < n_1 < \dots < n_l < n_{l+1} < \dots$

Nun offiziell:

Definition 1.3.3 (Teilfolge).
$(a_n)_n$ ist eine Folge in $\mathbb{R}$. Ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}$ (d.h. eine Folge natürlicher Zahlen) mit der Eigenschaft $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ (d.h. $n_k < n_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}$), dann heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$$

Teilfolge (TF) der Folge (a_n).

Beispiel 1.3.4 (Teilfolgen).
(i) $a_n = (-1)^n$ hat, wie in Abb. 1.8 dargestellt, z.B. die Teilfolgen

$$(a_{2k})_k = (1,1,\dots) = (1)_k, \quad \text{und} \quad (a_{2k+1})_k = (-1,-1,\dots) = (-1)_k.$$

d.h. $n_k = 2k+1$

d.h. $n_k = 2k$

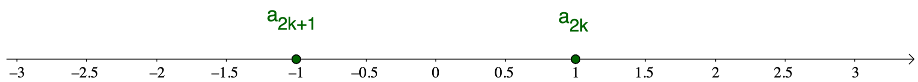


Abb. 1.8 Zwei Teilfolgen von $a_n = (-1)^n$

(ii) $(b_n) = \big((-1)^n(1+\frac{1}{n})\big)_{n\geq 1} = \big(-2, 1+\frac{1}{2}, -1-\frac{1}{3},\ \dots\big)$ hat etwa als Teilfolgen (vgl. Abb.1.9)

$$(b_{2k})_k = \left(1\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right)_{k\geq 0} = \left(1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}, 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4},\ \dots\right),$$
$$(b_{2k+1})_k = \left(-1\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)\right)_{k\geq 1} = \left(-1\left(1+\frac{1}{1}\right) = -2, -1\left(1+\frac{1}{3}\right),\ \dots\right).$$

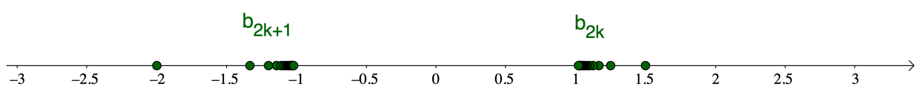


Abb. 1.9 Zwei Teilfolgen der Folge $(b_n) = \big((-1)^n(1+\frac{1}{n})\big)_{n\geq 1}$

(iii) $(c_n)_{n\geq 1} = \big(1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \dots\big) = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$
hat etwa Teilfolgen $(c_{2k})_{k\geq 1} = (2k)$, $(c_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} = \big(\frac{1}{2k+1}\big)$.

(iv) Im Allgemeinen gibt es mehrere Wahlen von $(n_k)_k$ um dieselbe Teilfolge zu erzeugen. So ist etwa auch $(a_{4k}) = (1)_k$.

(v) Keine Teilfolge von (a_n) ist $(-1, 0, -1, 0, \dots)$ [0 kommt in a_n nicht vor].
Keine Teilfolge von (b_n) ist $\big(1+\frac{1}{n}\big)_{n\geq 1}$ [$1+\frac{1}{3}$ kommt z.B. nicht vor] bzw. $\big(-1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{5}, \dots\big)$ [Reihenfolge falsch, d.h. $\nexists$ Wahl von n_k mit $n_k < n_{k+1}$].

Motivation 1.3.5 (Häufungswert).
In 1.3.4(i) und (ii) haben die Punkte ± 1 eine spezielle Rolle: Sie sind jeweils Grenzwerte von Teilfolgen, denn es gilt

- $a_{2k} = (1)_k \to 1$ und $a_{2k+1} = (-1) \to -1$, sowie
- $b_{2k} = \big(1+\frac{1}{2k}\big) \to 1$ und $b_{2k+1} = \big(-1+\frac{1}{2k+1}\big) \to -1$.

Solche Punkte sind interessant und verdienen einen eigenen Namen:

Definition 1.3.6 (Häufungswert einer Folge).
Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$. Die Folge (a_n) hat a als *Häufungswert* (HW) (bzw. a ist Häufungswert von (a_n)), falls eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von (a_n) existiert für die

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$$

gilt.

Beispiel 1.3.7 (Häufungswerte).
(i) Sei $a = \lim a_n$, dann ist a [faderweise, weil siehe 1.3.2 ganze Folge als Teilfolge] auch ein Häufungswert.
(ii) Die Vorzeichenmaschine $a_n = (-1)^n$ hat die beiden Häufungswerte ± 1.
(iii) $b_n = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ hat ebenso die beiden Häufungswerte ± 1.
(iv) $c_n = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$ hat 0 als einzigen Häufungswert.

Motivation 1.3.8 (Wie viele Folgenglieder sind nahe zum Häufungswert?).
Sei $a = \lim a_n$, dann liegen in jeder ε-Umgebung von a fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) a_n, vgl. 1.2.7].
Ist a (lediglich) ein Häufungswert von (a_n), dann heißt das (nur), dass es eine Teilfolge (a_{n_k}) gibt mit $a_{n_k} \to a$; also liegen alle bis auf endlich viele der a_{n_k} in jedem U_ε - das sind zumindest unendlich viele der a_n. Diese Eigenschaft ist charakterisierend für Häufungswerte - wie die nächste Proposition lehrt. Vorher noch eine
WARNUNG: In der obigen Situation müssen die „alle bis auf endlich vielen“ a_{n_k} nicht schon „alle bis auf endlich viele“ der a_n sein! Mit anderen Worten

$$a \text{ Häufungswert von } (a_n) \quad \overset{1.3.7(i)}{\Longleftarrow} \atop \not\Longrightarrow \quad a = \lim a_n.$$

Ein explizites Gegenbeispiel ist etwa $b_n = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$ mit Häufungswerten ± 1 (vgl. 1.3.7(iii)). In jedem $U_\varepsilon(1), U_\varepsilon(-1)$ liegen unendlich viele b_n. Aber für $\varepsilon < 1$ gilt $U_\varepsilon(1) \cap U_\varepsilon(-1) = \emptyset$ und daher können in keiner der beiden Mengen fast alle b_n liegen — es blieben für die andere viel zu wenige b_n übrig! Siehe Abbildung 1.10.

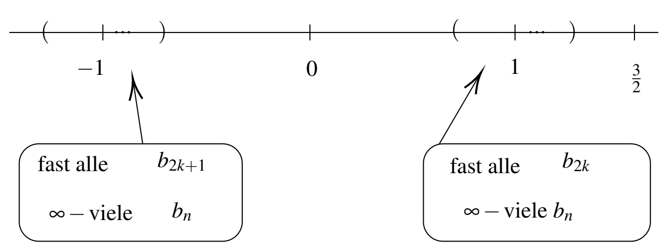


Abb. 1.10 Häufungswerte von b_n

Proposition 1.3.9 (Charakterisierung von Häufungswerten).
Sei (a_n) eine (reelle) Folge und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a ist Häufungswert von (a_n) $\iff$ *Jede $\varepsilon-$Umgebung von a enthält unendlich viele a_n, d.h.* $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N: a_n \in U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

die Folge kommt immer wieder in $U_\varepsilon(a)$ vorbei

Beweis. (Da es sich um eine Äquivalenz handelt...)
$\Rightarrow$: Sei a ein Häufungswert von (a_n) und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir zeigen, dass die Bedingung auf der rechten Seite der Behauptung gilt.
Wegen 1.3.6 existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von (a_n) mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Daher gilt mit Definition 1.2.6

$$\exists K: \quad \forall k \geq K: \quad a_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$$

Sei nun $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt wegen Definition 1.3.3

$$\exists k \geq K: \quad n_k \geq N.$$

$n_{k-1} < n_k < n_{k+1} < \dots$

Also gilt für $n = n_{k_1}$: $a_n = a_{n_{k_1}} \in U_\varepsilon(a)$.
$\Leftarrow$: Es gelte die Bedingung auf der rechten Seite der Äquivalenz, also

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N: \quad a_n \in U_\varepsilon(a). \tag{1.22}$$

(1) Wir konstruieren induktiv eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ von (a_n) mit $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$, wie in Abbildung 1.11 dargestellt.
$k = 1$: Setze $\varepsilon = 1 = N \overset{(1.22)}{\Longrightarrow} \exists n_1 \geq 1: a_{n_1} \in U_1(a)$.
$k \mapsto k+1$: Sei $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$ schon definiert. Setze $\varepsilon = \frac{1}{k+1}, N = n_k + 1 \overset{(1.22)}{\Longrightarrow}$ $\exists n_{k+1} \geq N > n_k$: $a_{n_{k+1}} \in U_{\frac{1}{k+1}}(a)$.
(2) Wir zeigen $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$:
Sei $\varepsilon > 0$ und sei $K \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{K} < \varepsilon$ (vgl. 1.1.3(i)). Dann folgt

$$\forall k \geq K: \quad |a_{n_k} - a| \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon. \qquad \square$$

Da nach Konstruktion $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$

Motivation 1.3.10 (In Richtung Bolzano-Weierstraß).
Wir wissen schon (siehe 1.2.16,1.2.17): (a_n) beschränkt $\overset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ (a_n) konvergent.

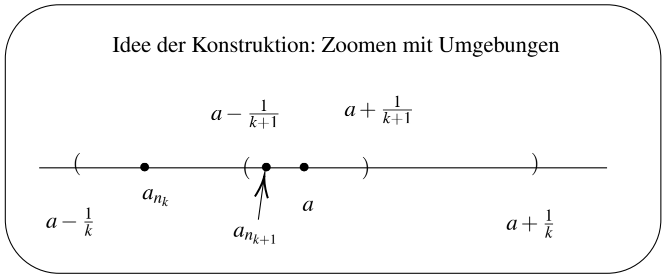


Abb. 1.11 Konstruktion der Teilfolge a_{n_k}

Aber wenn eine Folge beschränkt ist, dann müssen sich alle (abzählbar vielen) Folgenglieder in einem beschränkten Intervall tummeln - und dann müssen sich zumindest manche nahe kommen und einen Häufungswert bilden, wie der nächste Satz lehrt, der zentral für unser Verständnis reeller Folgen ist.

Theorem 1.3.11 (Satz von Bolzano-Weierstraß).

Jede beschränkte (reelle) Folge hat einen Häufungswert.

Beweis. (1) Wir verwenden die Ordnungsvollständigkeit, um einen Kandidaten für einen Häufungswert zu bekommen. (V) als "Existenzmaschine"

$$(a_n) \text{ beschränkt} \quad \overset{1.2.13}{\Longrightarrow} \quad \exists K > 0: \quad |a_n| \le K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wir betrachten die Menge

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid a_n > x \text{ gilt für höchstens endlich viele } n\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Idee

Es gilt:

- $A \neq \emptyset$, da $K \in A$ (denn kein a_n erfüllt $a_n > K$).
- A ist nach unten beschränkt, denn falls $x < -K$, dann ist $x \notin A$, da $a_n \ge -K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also kann z.B. $-K-1$ als untere Schranke gewählt werden.

$$\overset{(V)}{\Longrightarrow} \quad \exists a := \inf A.$$

Hier passiert es!

(2) Wir zeigen, dass a Häufungswert der Folge (a_n) ist: Sei $\varepsilon > 0$.

- Da $a+\varepsilon > a$, ist $a+\varepsilon$ keine untere Schranke für A (es ist ja $a = \inf A$). Somit gibt es ein $x \in A$ mit $a < x < a+\varepsilon$.

$$\overset{\text{Def. von } A}{\Longrightarrow} \quad a_n \leq x < a+\varepsilon \quad \text{für fast alle } n, \text{ d.h.}$$
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq n_0: \quad a_n < a+\varepsilon. \tag{1.23}$$

- Da a eine untere Schranke von A ist, gilt $a-\varepsilon \notin A$, also nach der Definition von A: $a_n > a-\varepsilon$ für unendlich viele n, d.h.
$$\forall n_1 \in \mathbb{N} \quad \exists m \geq n_1: \quad a-\varepsilon < a_m. \tag{1.24}$$
- Die Kombination von (1.23) und (1.24) liefert die Behauptung:
Sei nämlich $N \in \mathbb{N}$ gegeben, dann wähle $n_1 := \max(n_0, N)$. Damit ergibt sich:
$$\left.\begin{array}{l} (1.24) \Longrightarrow \quad \exists m \geq n_1 \geq N: \quad a-\varepsilon < a_m \\ m \geq n_1 \geq n_0,\ (1.23) \Longrightarrow \quad a_m < a+\varepsilon \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad a_m \in U_\varepsilon(a).$$

Wir haben also für beliebiges $\varepsilon > 0$ und beliebiges $N \in \mathbb{N}$ ein $m \geq N$ gefunden, sodass $a_m \in U_\varepsilon(a)$. $\square$

Abbildung 1.12 zeigt die Skizze zur Konstruktion:

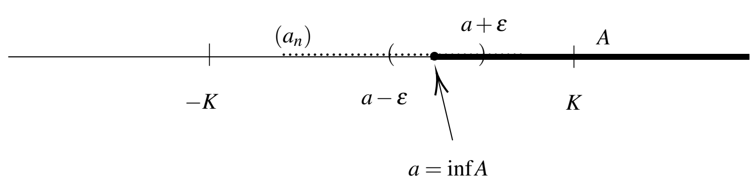


Abb. 1.12 Konstruktion der Menge A

Bemerkung 1.3.12 (a ist der größte Häufungswert).
Das im obigen Beweis konstruierte a ist der größte Häufungswert von (a_n).
Denn sei $b > a$. Da $a = \inf A$, gibt es ein $c \in A$ mit $a \leq c < b$. Setze $\varepsilon := b - c\ (> 0)$.
Nach der Definition von A enthält $U_\varepsilon(b)$ höchstens endlich viele a_n (für diese gilt ja $a_n > c \in A$). Somit ist b kein Häufungswert von (a_n), vgl. Abb.1.13.

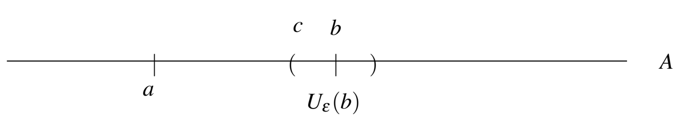


Abb. 1.13 Der Punkt b ist kein Häufungswert von a_n

Analog dazu können wir auch den kleinsten Häufungswert von (a_n) konstruieren [dieser könnte gleich dem größten sein...]
Diese speziellen Häufungswerte verdienen einen eigenen Namen:

Definition 1.3.13 (lim inf, lim sup).

(i) Sei (a_n) eine beschränkte (reelle) Folge. Der größte (bzw. kleinste) Häufungswert a von (a_n) [der wegen des Beweises von 1.3.11 existiert] heißt *Limes superior* (bzw. *Limes inferior*) oder kürzer lim sup (bzw. lim inf) und wir schreiben

$$a = \limsup a_n \equiv \overline{\lim}\ a_n \quad (\text{bzw. } \liminf a_n \equiv \underline{\lim}\ a_n).$$

(ii) Falls (a_n) nicht nach oben (bzw. unten) beschränkt ist, setzen wir

$$\overline{\lim}\ a_n := \infty \quad (\text{bzw. } \underline{\lim}\ a_n := -\infty).$$

Beispiel 1.3.14 (lim inf, lim sup).

(i) $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$: $\overline{\lim}\ a_n = 1$, $\underline{\lim}\ a_n = -1$, vgl. Abb.1.14.

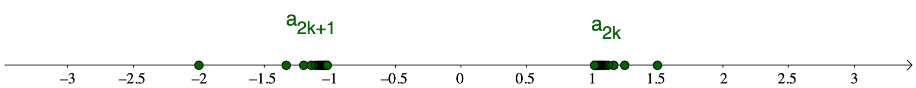


Abb. 1.14 lim inf und lim sup von a_n

(ii) $a_n = n$ hat keinen Häufungswert. Es gilt $\overline{\lim}\ a_n = \infty$ und $\underline{\lim}\ a_n$ existiert nicht.

Motivation 1.3.15 (Konvergenzprinzipien).
Erinnern wir uns an unsere bisherigen Konvergenzbeweise (Abschnitt 1.2 und UE): Bevor es richtig losgehen konnte, haben wir meist einen (guten) Kandidaten für den Limes gebraucht. Das ist in der Praxis natürlich ein großer Nachteil! Wir werden nun die „Existenzmaschine“ Bolzano-Weierstraß so modifizieren, dass sie uns unter passenden Bedingungen nicht nur die Existenz eines Häufungswertes sondern schon den Limes liefert - ohne einen Kandidaten für den Grenzwert zu benötigen.

Außer bei „einfachen“ Folgen: Rechenregeln für Limiten, Sandwich-Lemma oder unbeschränkte Folgen

Die mächtigsten dieser Konvergenzprinzipien sind das Cauchy-Prinzip und das Konvergenzprinzip für monotone, beschränkte Folgen. Als Bonus werden wir sehen, dass es manchmal relativ leicht ist, den Grenzwert auszurechnen, wenn schon klar ist, dass überhaupt Konvergenz vorliegt.

stellt unsere bisherige Methode auf den Kopf...

Als erstes benötigen wir dazu den Begriff Cauchy-Folge. Das sind Folgen, bei denen sich die Folgenglieder schließlich beliebig nahe kommen. Anschaulich im Bild des „Spaziergangs" in $M = \mathbb{R}$ (vgl. 1.2.4(i)) versandet die Folge, d.h. die Schritte werden immer kleiner...

Genauer:

Achtung: Nicht nur die einzelne Schrittweite

Definition 1.3.16 (Cauchy-Folge).
Eine reelle Folge (a_n) heißt *Cauchy-Folge* (CF), falls

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.}$$

Bemerkung 1.3.17 (Bedeutung von Cauchy-Folgen).
Wir werden gleich sehen, dass Cauchy-Folgen genau die konvergenten Folgen sind - daher erübrigt es sich, Beispiele anzugeben.

Im Sinne von 1.3.15 bemerke, dass man zur Überprüfung, ob eine Folge (a_n) eine Cauchy-Folge ist, (im Prinzip) den Limes a nicht kennen muss - a kommt in 1.3.16 keines vor, das wird mit dem Auftreten von zwei Indizes (m und n) erkauft!

Theorem 1.3.18 (Cauchy-Prinzip).
Sei (a_n) eine reelle Folge. Dann gilt:

$$\boxed{(a_n) \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad (a_n) \text{ ist eine Cauchy-Folge.}}$$

Beweis. $\Rightarrow$: (die „leichte" Richtung - ein $\frac{\varepsilon}{2}$-Beweis)
Setze $a := \lim a_n$

$$\overset{1.2.6}{\Longrightarrow} \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N.$$

Dann gilt $\forall m, n \geq N$

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: (Die schwierigere Richtung in drei Schritten)
Sei (a_n) eine Cauchy-Folge.

(1) Wir zeigen, dass (a_n) beschränkt ist:
Setze $\varepsilon = 1$ in 1.3.16, dann $\exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < 1 \ \forall m, n \geq N$. Setzt man nun $m = N$, so folgt

verkehrte $\triangle$-Ungl.

$$\begin{aligned} |a_n| - |a_N| &\leq |a_n - a_N| < 1 \quad \forall n \geq N \\ &\Longrightarrow |a_n| \leq |a_N| + 1 \quad \forall n \geq N. \end{aligned}$$

Die ersten N Glieder erledigen wir wie im Beweis von 1.2.16: Sei $K := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$, dann gilt

$$|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(2) Da (a_n) beschränkt ist, existiert nach Bolzano-Weierstraß ein Häufungswert a von (a_n).
(3) Wir zeigen $a_n \to a$: [$\frac{\varepsilon}{2}$-Beweis mit Hineinschmuggeln eines a_k nahe dem Häufungswert a]
Sei $\varepsilon > 0$.

$$(a_n) \text{ CF} \quad \overset{1.3.16}{\Longrightarrow} \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m, n \geq N. \tag{1.25}$$

$$a \text{ HW} \quad \overset{1.3.9}{\Longrightarrow} \quad \exists k \geq N: \quad |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.26}$$

Das ist die Idee: verwende das N von oben!

Daher gilt $\forall n \geq N$:

$$|a_n - a| = |a_n - a_k + a_k - a| \leq |a_n - a_k| + |a_k - a| \underset{(1.26)}{\overset{(1.25)}{<}} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Beispiel 1.3.19 (Konvergenz ohne Limes).
Sei (a_k) eine reelle Folge mit $|a_k| \leq \theta < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ für eine bestimmtes θ. Wir betrachten die Reihe $\sum a_k^k$ und zeigen mit Hilfe des Cauchy-Prinzips ihre Konvergenz.

(1) *Abschätzung für die Differenz von Partialsummen.*
Wie üblich (vgl. 1.2.22) setzen wir $s_n := \sum_{k=0}^n a_k^k$. Dann gilt für $m < n$:

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k^k \right| \overset{\triangle-\text{Ungl.}}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^k \leq \sum_{k=m+1}^{n} \theta^k \\ \text{Trick 17} \quad &= \sum_{k=0}^{n} \theta^k - \sum_{k=0}^{m} \theta^k \overset{1.1.6}{=} \frac{1-\theta^{n+1}}{1-\theta} - \frac{1-\theta^{m+1}}{1-\theta} \\ &= \frac{\theta^{m+1} - \theta^{n+1}}{1-\theta} = \theta^{m+1} \frac{1-\theta^{n-m}}{1-\theta} \underset{0 \leq \theta < 1}{\leq} \theta^{m+1} \frac{1}{1-\theta}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

(2) (s_n) *ist eine Cauchy-Folge:*
Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $0 \leq \theta < 1 \overset{1.1.5(ii)}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N} : 0 \leq \theta^{m+1} < \varepsilon(1-\theta) \ \forall m \geq N$.
Daher gilt $\forall n > m \geq N$

$$|s_n - s_m| \overset{(1.27)}{\leq} \theta^{m+1} \frac{1}{1-\theta} < \varepsilon. \tag{1.28}$$

Noch nicht fertig!

Ganz analog beweist man (1.28) für alle $m > n \geq N$. Schließlich gilt für $m = n \geq N$, dass $s_m - s_n = 0$. Also ist (s_n) insgesamt eine Cauchy-Folge.

(3) Aus 1.3.18 folgt nun: $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^k$ konvergiert.

UND: Wir haben keine Ahnung was der Limes $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^k$ ist! Im Allgemeinen kann dieser auch nicht berechnet werden.

Motivation 1.3.20 (Monotone Folgen - Konvergenzprinzip).
Um das in 1.3.15 angekündigte Konvergenzprinzip für monotone, beschränkte Folgen anzugehen, müssen wir zuerst den ersteren Begriff exakt fassen.

Definition 1.3.21 (Monotonie von Folgen).
Sei (a_n) eine reelle Folge.

(i) (a_n) heißt *(streng) monoton wachsend,* falls

$$a_n \leq a_{n+1} \, (a_n < a_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.29}$$

(ii) (a_n) heißt *(streng) monoton fallend,* falls

$$a_n \geq a_{n+1} \, (a_n > a_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.30}$$

(iii) Falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass (1.29) bzw. (1.30) nur für alle $n \geq N$ gelten, so sagen wir (a_n) hat die entsprechende Eigenschaft *ab* N.

Beispiel 1.3.22 (Monotone Folgen).
Die Fibonacci-Folge (f_n) [siehe 1.2.5(iv)] ist monoton wachsend und streng monoton wachsend ab $N = 2$.
Tatsächlich gilt $f_0 = 0 < 1 = f_1 = f_2$ und $f_n > 0 \; \forall n \geq 1$ und daher

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} > f_n + 0 \quad \forall n \geq 2.$$

Bemerkung 1.3.23 (Monotonie und Schranken).

(i) Eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge ist beschränkt (vgl. Abb. 1.15), denn sei $a_n \leq C$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$C \geq a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_0.$$

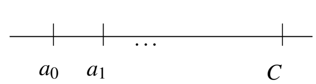


Abb. 1.15 Die Folge a_n ist durch C beschränkt.

(ii) Analog sind nach unten beschränkte, monoton fallende Folgen beschränkt.
(iii) In beiden Fällen werden wir gleich sehen, dass die Folgen sogar konvergieren. Vorher noch ein motivierendes Beispiel, das Sie vielleicht schon aus der Schule kennen — Stichwort: Heron-Verfahren

Beispiel 1.3.24 (Approximation für $\sqrt{3}$).
Sei $x_0 > 0$. Wir definieren rekursiv die Folge (x_n) via

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.31}$$

Bemerke $x_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ (offensichtlich kommen nur positive Zahlen vor).

(1) (x_n) *ist nach unten beschränkt, genauer* $\forall n \geq 1$*:* $3 \leq x_n^2$*.*
Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 3 &= \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)^2 - 3 = \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 6 + \frac{9}{x_n^2}\right) - 3 \\ &= \frac{1}{4}\left(x_n^2 - 6 + \frac{9}{x_n^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{3}{x_n}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(2) (x_n) *ist monoton fallend ab* $n = 1$*.*
Für $n \geq 1$ gilt

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{2} - \frac{3}{2x_n} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - 3) \overset{(1)}{\geq} 0.$$

(3) (x_n) *konvergiert,* genauer $\exists x := \lim x_n$ laut dem in 1.3.23(iii) angekündigten 1.3.25 (unten), das wir hier schon verwenden. [Sinn ist es zu sehen, dass uns (3) ermöglicht, $\lim x_n$ auszurechnen!]
(4) $\lim x_n = \sqrt{3}$:
Zuerst bemerke $0 < \sqrt{3} \leq x_n$ (wegen (1)). Wir gehen nun auf beiden Seiten der Rekursion (1.31) zum Limes über:

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right) \\ \downarrow & & \downarrow \qquad (n \to \infty) \\ x & & \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) \end{array}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) \quad &\Longrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 + 3\right) \\ &\Longrightarrow \quad \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Jetzt aber schleunigst zum Theorem mit seinem erfreulich einfachen Beweis.

Theorem 1.3.25 (Konvergenzprinzip für beschränkte, monotone Folgen).

Jede nach oben beschränkte und monoton wachsende (reelle) Folge konvergiert.

Das Resultat gilt auch für ab einem $N \in \mathbb{N}$ monoton wachsende Folgen und analog für nach unten beschränkte und (ab einem N) monoton fallende Folgen.

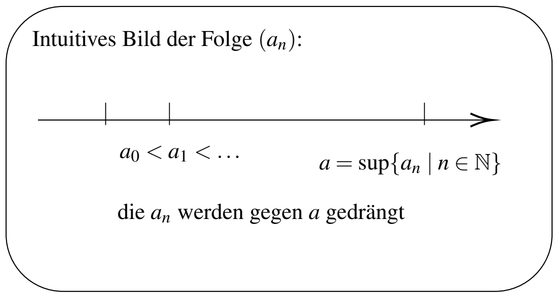


Abb. 1.16 Die Folge (a_n) ist durch $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt.

Beweis. Sei (a_n) nach oben beschränkt und monoton wachsend.

(1) *Produzieren eines Kandidaten für* $\lim a_n$ [(V) als „Existenzmaschine“]:
Sei $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Nach 1.3.23(i) ist (a_n) beschränkt und somit ist A beschränkt (dass $A \neq \emptyset$, ist klar).

$$\overset{(V)}{\Longrightarrow} \quad \exists a := \sup A.$$

nicht obere Schranke laut der Def. von sup

(2) *Wir zeigen* $\lim a_n = a$:
Sei $\varepsilon > 0$. Da $a = \sup A$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $a - \varepsilon < a_N \leq a$.

Da (a_n) monoton wachsend ist, gilt $\forall n \geq N : a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a$. Daher

$$\forall n \geq N : \quad |a - a_n| < \varepsilon. \qquad \square$$

Beobachtung 1.3.26 ($\mathbf{a_n \to \sup A}$).
Der obige Beweis zeigt explizit, dass $\lim a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und in diesem Sinne wird das intuitive Bild aus Abbildung 1.16 bestätigt: eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge wird gegen ihr Supremum gequetscht!
Das motiviert auch das Studium von Mengen der Gestalt $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ bzw. noch allgemeiner die folgenden [später sehr wichtigen] Begriffe für Punktmengen in $\mathbb{R}$.

Definition 1.3.27 (Berührpunkt, Häufungspunkt).
Sei $A \subseteq \mathbb{R}$.
(i) $a \in \mathbb{R}$ heißt *Berührpunkt* von A, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset.$$

Jede ε-Umg. von a enthält mind. einen Punkt aus A

(ii) $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* von A, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad U_\varepsilon(a) \cap A \text{ enthält unendlich viele Punkte.}$$

Beispiel 1.3.28 (Berührpunkte und Häufungspunkte).
(i) Jedes $a \in A$ ist Berührpunkt von A [$a \in U_\varepsilon(a) \cap A$ für jedes $\varepsilon > 0$].
Jeder Häufungspunkt von A ist auch Berührpunkt von A.
(ii) Nicht jeder Punkt von A ist Häufungspunkt von A, denn $A = \{0\}$ hat gar keine Häufungspunkte, ebenso $B = \{1\}$ und alle endlichen Mengen.
(iii) Sei $A := [a, b)$ ein halboffenes Intervall. Jedes $x \in [a, b]$ ist Häufungspunkt (und somit Berührpunkt) von A. [Bemerke: b ist Häufungspunkt von A obwohl $b \notin A$].
(iv) 0 ist Häufungspunkt von $A := \left\{ \frac{1}{n} \mid 1 \leq n \in \mathbb{N} \right\}$ [bemerke wieder $0 \notin A$].

Bemerkung 1.3.29 (Häufungspunkt vs Häufungswert).
Sei (a_n) eine reelle Folge. Dann drängt sich folgende Frage auf: Gilt

$$a \text{ Häufungswert von } (a_n) \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad a \text{ ist Häufungspunkt von } A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

a HW der Folge

a HP der Menge der Folgenglieder

$$\boxed{\text{Die Antwort ist \underline{NEIN}!}}$$

Ein Gegenbeispiel ist ganz einfach die konstante Folge $(a_n) = (1)_n$. Denn $a = 1$ ist Häufungswert von (a_n). ABER $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$ hat gar keine Häufungspunkte (vgl. 1.3.28(ii)).
[Bemerke: 1 ist immerhin ein Berührpunkt von A.]

Warnung 1.3.30. In der Literatur werden Häufungswerte von Folgen auch oft als Häufungspunkte bezeichnet. In diesem Text verzichten wir bewusst darauf, da wir sonst die obere Aussage in der unschönen Form a Häufungspunkt von $(a_n) \not\Rightarrow a$ Häufungspunkt von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ hätten formulieren müssen.

Proposition 1.3.31 (Einfache Eigenschaften von HP und BP).
Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, dann gilt:
(i) a ist Berührpunkt von $A \Leftrightarrow \exists$ Folge (a_n) in A mit $a_n \to a$.
(ii) a ist Häufungspunkt von $A \Leftrightarrow a$ ist Berührpunkt von $A \setminus \{a\}$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$: Sei a Berührpunkt von A. Nach 1.3.27(i) gilt:
Setzen sukzessive $\varepsilon = \frac{1}{4}(n \in \mathbb{N})$

$$\forall n \geq 1 \ \exists a_n \in U_{\frac{1}{n}}(a) \cap A.$$

So erhalten wir induktiv eine Folge (a_n) in A mit $a_n \to a$, denn $|a_n - a| < \frac{1}{n} \to 0$ (vgl. Beweis 1.3.9) (vgl. Abb.1.17).

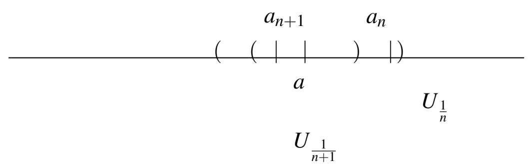


Abb. 1.17 Konstruktion der Folge a_n

$\Leftarrow$: Laut Voraussetzung gibt es eine Folge (a_n) in A mit $a_n \to a$. Das heißt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq N: \ a_n \in U_\varepsilon(a) \cap A.$$

Also ist $U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$.
(ii) UE. □

Bemerkung 1.3.32 (Reelle Zahlen sind Häufungspunkte rationaler Zahlen).
Nach 0.1.12 liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$. Das bedeutet, dass *jedes* $x \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$ ist. Genauer gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \quad \text{dicht} \quad &\overset{0.1.12(ii)}{\Longleftrightarrow} \quad \forall x < y \in \mathbb{R} \quad \exists q \in \mathbb{Q}: \ x < q < y \\ &\overset{\text{induktiv}}{\Longleftrightarrow} \ \forall \varepsilon: \ U_\varepsilon(q) \cap \mathbb{Q} \quad \text{unendlich.} \end{aligned}$$

Bemerkung 1.3.33 (Beschränkte Mengen haben einen Berührpunkt).
Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und nicht leer, dann hat A einen Berührpunkt. Denn wegen (V) existiert $\sup A =: a$ und aus der Definition des Supremums folgt, dass a Berührpunkt von A ist.
[Es gilt sogar: $\sup A$ ist Limes einer monoton wachsenden Folge in A: Wähle $a - 2 < a_0 \leq a$ und dann induktiv für alle $n \geq 1$: $a_n \in A$, $a_n \geq a_{n-1}$, $a - \frac{1}{n} \leq a_n \leq a$.]

Motivation 1.3.34 (Intervallschachtelungsprinzip).
Wir leiten nun aus dem Cauchy-Prinzip eine weitere „Existenzmaschine“ her, die im Gegensatz zum Cauchy-Prinzip sehr anschaulich ist:
Wenn eine Folge ineinander geschachtelter, abgeschlossener Intervalle sich zusammenzieht, wie in Abbildung 1.18, dann wird dabei ein eindeutiger Punkt in $\mathbb{R}$ „eingefangen“. Das veranschaulicht noch einmal die Tatsache dass $\mathbb{R}$ „keine Löcher“ hat. Diese Überlegungen machen wir nun exakt.

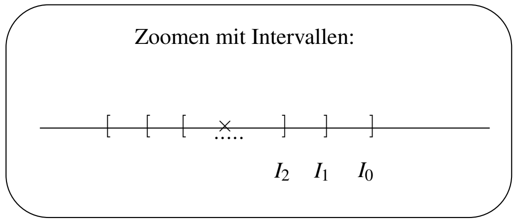


Abb. 1.18 Konstruktion der Intervalle I_n

Definition 1.3.35 (Durchmesser eines abgeschlossenen Intervalls).
Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $I := [a,b]$. Wir definieren den *Durchmesser* von I als

$$\operatorname{diam}(I) := b - a.$$

Theorem 1.3.36 (Intervallschachtelungsprinzip, (IP)).
Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener, beschränkter Intervalle, die sich zusammenziehen, d.h. mit den Eigenschaften
(i) $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \ldots,$
(ii) $\operatorname{diam}(I_n) \to 0\,(n \to \infty)$.
Dann existiert genau ein $a \in \mathbb{R}$, das in jedem I_n liegt, d.h.

$$\exists!\ a \in \mathbb{R} \mathit{mit} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\}.$$

Beweis. (Existenz) Wir zeigen in 3 Schritten, dass ein derartiges a existiert. Seien dazu $I_n = [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$.

(1) *Die Folge (a_n) der linken Randpunkte ist eine Cauchy-Folge:*
Sei $\varepsilon > 0$. Aus (ii) folgt:

$$\exists N \in \mathbb{N}: \ \operatorname{diam}(I_n) < \varepsilon \quad \forall n \geq N. \tag{1.32}$$

Seien also $m, n \geq N$. Nach (i) gilt $a_m, a_n \in I_N$ und somit

$$|a_n - a_m| \leq \operatorname{diam}(I_N) \overset{(1.32)}{<} \varepsilon.$$

(2) *Das Cauchy-Prinzip schlägt zu:* Die Folge der linken Randpunkte hat einen Limes, denn

$$1.3.18 \Longrightarrow \exists a := \lim a_n.$$

(3) *a liegt in allen Intervallen:*
Für alle $n \geq k$ gilt laut Voraussetzung: $a_k \leq a_n \leq b_n \leq b_k$. Wir verwenden das Sandwich-Lemma 1.2.28:

$$\begin{array}{ccccccc} a_k & \leq & a_n & \leq & b_n & \leq & b_k \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \ (n \to \infty) \\ a_k & & a & & & & b_k \end{array}$$

$(a_k), (b_k)$ sind in n konstante Folgen

Daher gilt mit Satz 1.2.28: $a_k \leq a \leq b_k$ für alle k und daher $a \in I_k$ für alle k.

(4) (Eindeutigkeit) [folgt sofort aus (ii)]
Seien $a, b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, dann gilt $\forall n$:

$$0 \leq |a-b| \leq \operatorname{diam}(I_n) \to 0 \implies \quad |a-b| = 0 \quad \overset{(N1)}{\implies} \quad a = b. \qquad \square$$

Beobachtung 1.3.37.
Es gilt also $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} a_n = \{a\}$, wobei a eindeutig festgelegt ist durch $a = \lim a_n$ [und analog $a = \lim b_n$].

1.3.38 (Nachbetrachtung). (Der rote Faden)
Dieser Abschnitt war (neben anderen, praktischeren Aspekten) einer detaillierten Analyse der Konsequenzen der Ordnungsvollständigkeit (V) gewidment.
Genauer haben wir bewiesen:

$$\text{(V)} \quad \implies \quad \text{(BW)} \quad \implies \quad \text{(CP)} \quad \implies \quad \text{(IP)}.$$

Es gilt aber auch (IP) $\Rightarrow$ (V) [ohne Beweis; siehe [Hö] 3.16 Thm] und daher sind alle vier Aussagen äquivalent! (BW), (CP) und (IP) sind also nur andere (teilweise anschaulichere) Manifestationen der Ordnungsvollständigkeit (V) von $\mathbb{R}$.

Daher spricht man oft auch einfach von <u>der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$</u>, die durch jede der vier Aussagen charakterisiert ist.

Nimmt man verschiedene Quellen zur Analysis zur Hand, so wird man jeweils verschiedene Definitionen der Vollständigkeit finden [z.B. (CP) in Forster, (V) in Deiser und Heuser und noch eine Variante (Konvergenz von Dedekind-Schnitten) in Behrends], aber (immer) auch einen Satz, der die Äquivalenz herstellt - also besagt, dass all diese Zugänge äquivalent sind.

Zum Abschluss des Abschnitts noch einmal und weil es so schön ist:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{Ordnungsvollst.}} & \Leftarrow & \boxed{\text{Intervallschachtelungsp.}} \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ \boxed{\text{Bolzano-Weierstraß}} & \Rightarrow & \boxed{\text{Cauchy-Prinzip}} \end{array}$$

1.4 Reihen und Konvergenz

1.4.1 (Einleitung und Ausblick).
In diesem letzten Abschnitt von Kapitel 1 beschäftigen wir uns ausführlich mit der Konvergenz (unendlicher) Reihen (Def. 1.2.33). Wie bereits in 1.2.38 angekündigt ist es für Reihen im Allgemeinen schwieriger als für „normale“ Folgen, Konvergenz nachzuweisen und im Allgemeinen noch schwieriger, den Grenzwert zu bestimmen - also die Summe tatsächlich auszurechnen.

Noch dazu werden wir sehen, dass der „normale“ Grenzwertbegriff für Reihen zu kurz greift: Er hat den entscheidenden Nachteil, dass die Umordnung einer konvergenten Reihe nicht ebenfalls konvergieren muss - die Konvergenz hängt also von der Reihenfolge der Summanden ab! Dieser wirklich problematische Aspekt lässt sich dadurch umgehen, dass man zu einem stärkeren Konvergenzbegriff Zuflucht nimmt. Die sog. absolute Konvergenz ist stabil bzgl. Umordnungen der Reihe.

Das klingt kompliziert; aber einen Bonus gibt es, weil das Rechnen mit absolut konvergenten Reihen ein sehr mächtiges Werkzeug ist. Das werden wir ganz zum Schluss dieses Abschnitts sehen, wenn wir die Exponentialreihe und damit die Exponentialfunktion kennen lernen.

Erinnerung 1.4.2 (Reihen - Sein und Schein, vgl. 1.2.32 - 1.2.34).
Sei (a_n) eine reelle Folge, $m \in \mathbb{N}$. Wir definieren die m-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (oder kurz $\sum a_n$) als

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n \quad \text{und schreiben}^1 \quad \lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

falls der Limes existiert. Damit ist die Konvergenz von Reihen auf die Konvergenz von Folgen zurückgeführt - Reihen sind nichts anderes als spezielle Folgen.

oft etwas lästiger als „normale“ Folgen

Wir beginnen damit, einfache Konvergenzkriterien für Reihen herzuleiten. Als erstes schreiben wir das Cauchy-Prinzip, Thm. 1.3.18, um auf den Fall von Reihen.

Proposition 1.4.3 (Cauchy-Prinzip für Reihen).
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine reelle Reihe, dann gilt

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m \geq N : \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon.} \tag{1.33}$$

Beweis. $\sum a_n$ konvergent $\overset{1.2.33}{\Longleftrightarrow}$ s_m konvergent $\overset{1.3.18}{\Longleftrightarrow}$ s_m Cauchy-Folge $\overset{1.3.16}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N} : |s_n - s_{m-1}| < \varepsilon \quad \forall n, m-1 \geq N$, also

Def. 1.3.16 sagt „$\forall m, n \geq N$“. Also können hier m, n *so* gewählt werden, was das Ergebnis verschönert zu $\sum_{k=m}^{n}$.

[1] Wie in 1.2.33 erklärt, verwenden wir die Bezeichnung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sowohl für die Reihe, wie auch (im Fall der Konvergenz) für ihren Limes.

$$|s_n - s_{m-1}| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m-1} a_k\right| \underset{\text{o.B.d.A. } n \geq m-1}{=} \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon. \qquad \square$$

Bemerkung 1.4.4 (Änderung endlich vieler Glieder).

(i) Bei Folgen kann man endlich viele Glieder ändern, ohne das *Konvergenzverhalten* zu ändern, vgl. 1.2.10. Prop. 1.4.3 zeigt, dass dies auch für Reihen zutrifft: Bedingung 1.33 wird von der Änderung endlich vieler a_k nicht berührt.
[Exakt begründet man das z.B. so: Seien $(a_n), (b_n)$ (reelle) Folgen und es gebe ein $M \in \mathbb{N}$ sodass $\forall n \geq M$: $a_n = b_n$ und (a_n) erfülle 1.33, dann tut das auch (b_n): Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists N_1 : \forall n, m \geq N_1\ |\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon$. Wähle $N := \max\{M, N_1\} \Rightarrow \forall n, m \geq N : |\sum_{k=m}^{n} b_k| = |\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon$.]

(ii) Weiters verändert sich der *Limes* einer konvergenten Folge nicht, wenn endlich viele Glieder geändert werden.

$$\boxed{\text{Das ist bei Reihen anders.}}$$

Offensichtlich ändert sich der Wert der Reihe, z.B: sei $|x| < 1$, dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \overset{1.2.37}{=} \frac{1}{1-x} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} - \underbrace{x^0}_{=1} = \frac{1-1+x}{1-x} = \frac{x}{1-x}.$$

Eine weitere wichtige Konsequenz aus 1.4.3 halten wir im folgenden Korollar fest.

Korollar 1.4.5 (Die Glieder konvergenter Reihen sind Nullfolgen).

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ konvergent} \quad \Longrightarrow \quad a_k \to 0 \quad (k \to \infty).}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann exisitiert laut 1.4.3 (1.33) ein N, sodass für $m = n \geq N$ gilt, dann folgt

$$\varepsilon > \left|\sum_{k=n}^{n} a_k\right| = |a_n| \quad \Longrightarrow \quad a_n \to 0. \qquad \square$$

Proposition 1.4.6 (Beschränktheit der Partialsummen).
Sei $\sum a_k$ eine Reihe nicht-negativer *Zahlen (d.h. $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$), dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad s_m = \sum_{k=0}^{m} a_k \textit{ beschränkt}.$$

Beobachtung 1.4.7. Während die Hinrichtung klar ist, vgl. 1.2.16, ist die Rückrichtung auf den ersten Blick überraschend, vgl. 1.2.17. Auf den zweiten Blick klärt sich die Situation auf: Monotonie und das Konvergenzprinzip für monotone beschränkte Folgen 1.3.25 schlagen zu! Jetzt im Detail:

Beweis. $\Rightarrow$: folgt sofort aus 1.2.16.
$\Leftarrow$: Die Partialsummenfolge s_m ist

- monoton wachsend, denn $s_{m+1} = s_m + a_{m+1} \geq s_m$, da $a_n \geq 0$ und
- beschränkt per Annahme.

Daher folgt mit 1.3.25, dass s_m konvergiert. $\square$

„Dodel-Test“: $a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum a_n$ divergent

Höchste Zeit für ein Beispiel!

Beispiel 1.4.8 (Konvergente und divergente Reihen).

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = (1,0,1,0,\dots)$ divergiert, weil $a_n = (-1)^n \not\to 0$ (vgl. 1.4.5).

(ii) Die *harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert.}$$

Erzbeispiel einer divergenten Reihe

Wir zeigen, dass die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist (das Resultat folgt dann aus 1.4.6, da $a_n = \frac{1}{n} > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$):
Wir betrachten s_{2^k} $(k \in \mathbb{N})$ (das ist der Trick!). Dann gilt

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \dots \\ &\quad \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\dots+\frac{1}{2^k}\right)}_{\geq 2^{k-1}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}} \\ &\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2}}_{k \text{ Terme}} = 1 + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

$n = 2 = 2^1$

$n = 4 = 2^2$

$n = 8 = 2^3$

$n = 1 = 2^0$

Anzahl der Terme: $2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}(2-1) = 2^{k-1}$

Also $s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$ und somit ist s_n unbeschränkt.

1.4.9 (Große fette Warnung!).
Bemerke: die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{n}$ divergiert, OBWOHL $\frac{1}{n} \to 0$. Daher ist die Umkehrung von 1.4.5 FALSCH. Es gilt also insgesamt

$$\boxed{\sum a_n \text{ konvergent} \quad \overset{1.4.5}{\Longrightarrow} \atop \not\Longleftarrow \quad a_n \to 0.}$$

Einer sehr „beliebter“ Fehler

Beispiel 1.4.10. ($\sum \frac{1}{n^s}$)

(i) Sei $\mathbb{N} \ni k \geq 2$, dann ist

$$\sum \frac{1}{n^k} \text{ konvergent.}$$

Da alle Glieder $\frac{1}{n^k} > 0$ sind, müssen wir mit 1.4.6 nur zeigen, dass s_m beschränkt ist. Dazu sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben; wähle $l \in \mathbb{N}$ sodass $m \leq 2^{l+1} - 1$, dann gilt

$n = 2^2 - 1 = 2^{1+1} - 1$

$n = 2^{2+1} - 1$

$$\begin{aligned} s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^k} &\leq \sum_{n=1}^{2^{l+1}-1} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right)}_{\leq 2\frac{1}{2^k}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k}\right)}_{\leq 4\frac{1}{2^{2k}} = 2^2\frac{1}{4^k}} + \cdots + \underbrace{\sum_{n=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{1}{n^k}}_{\leq 2^l \frac{1}{2^{lk}}} \\ &\leq \sum_{j=0}^{l} 2^j \frac{1}{2^{jk}} = \sum_{j=0}^{l} \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^j \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^j = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{k-1}}}. \end{aligned}$$

geom. Reihe 1.2.37

unabh. von m, daher obere Schranke aller s_m

(ii) Derselbe Beweis funktioniert (wortwörtlich) auch für $\mathbb{R} \ni k > 1$ — wir haben aber n^k für $k \notin \mathbb{Z}$ im Rahmen der Vorlesung noch nicht definiert. Wie auch immer, es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{ist} \quad \begin{cases} \text{divergent} & \text{für } s \leq 1, \\ \text{konvergent} & \text{für } s > 1. \end{cases}$$

(iii) Für alle geraden ganzen Zahlen k können die Summen sogar explizit berechnet werden, z.B. gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

wie wir später sehen werden.

Motivation 1.4.9A.

Im folgenden betrachten wir sogenannte *alternierende* Reihen. Das sind Reihen, bei denen die Glieder abwechselnd positiv bzw. negativ sind und daher oft einfacher zu bändigen. Formal sind das also Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \dots$$

wobei alle a_n nicht-negativ sind, d.h. $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Konvergiert eine alternierende Reihe gegen einen Grenzwert S, so nähern sich die Partialsummen im allgemeinen „von beiden Seiten“ an S an, siehe Abb. 1.19.

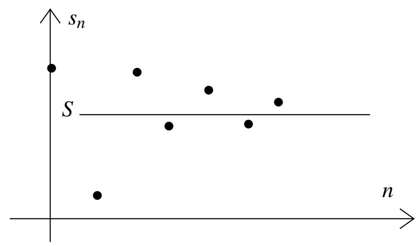


Abb. 1.19 Partialsummen einer gegen S konvergenten alternierenden Reihe

Theorem 1.4.11 (Leibnitz-Kriterium für alternierende Reihen).
Sei $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *eine alternierende Reihe. Falls,*
(i) a_n *monoton fällt (d.h.* $a_n \geq a_{n+1} \; \forall n$*) und*
(ii) $a_n \to 0 \; (n \to \infty)$,
dann ist $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konvergent.*

Beweis. Der Kern des Beweises ist wieder das Konvergenzprinzip für monotone beschränkte Folgen 1.3.25. Wir führen den Beweis in 3 Schritten:

(1) *Die Teilfolgen der geraden/ungeraden Partialsummen konvergieren:*
Sei $k \in \mathbb{N}$, wir betrachten zunächst die Folge s_{2k}. Es gilt

$$s_{2k+2} - s_{2k} = \sum_{n=0}^{2k+2}(-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{2k}(-1)^n a_n = \sum_{n=2k+1}^{2k+2}(-1)^n a_n = -a_{2k+1} + a_{2k+2} \overset{\text{(i)}}{\leq} 0$$

und daher

$$s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \dots \geq s_{2k} \geq s_{2k+2} \geq \dots \tag{1.34}$$

Analog gilt für s_{2k+1}, dass

$$s_{2k+3} - s_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \overset{\text{(i)}}{\leq} 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots \leq s_{2k+1} \leq s_{2k+3} \leq \dots \tag{1.35}$$

Außerdem gilt

$$s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad s_{2k+1} \leq s_{2k}. \tag{1.36}$$

Also ist (s_{2k}) nach (1.34) monoton fallend und nach unten beschränkt weil

$$s_1 \overset{(1.35)}{\leq} s_{2k+1} \overset{(1.36)}{\leq} s_{2k}.$$

und somit nach 1.3.25 konvergent, d.h.

$$\exists S := \lim_{k\to\infty} s_{2k}.$$

Analog ist (s_{2k+1}) monoton wachsend (nach (1.35)) und nach oben beschränkt (nach (1.34),(1.36)), also wiederum wegen 1.3.25 konvergent, d.h.

$$\exists S' := \lim_{k\to\infty} s_{2k+1}.$$

(2) *Die Grenzwerte stimmen überein, $S = S'$:*
Es gilt

$$S - S' = \lim_{k\to\infty}(s_{2k} - s_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} \overset{(ii)}{=} 0.$$

(3) *$S = S'$ ist Limes der Reihe, d.h. $s_n \to S$:*
Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} s_{2n} \to S \quad &\Longrightarrow \quad \exists N_1 \quad \forall n \geq N_1 : \quad |s_{2n} - S| < \varepsilon, \\ s_{2n+1} \to S \quad &\Longrightarrow \quad \exists N_2 \quad \forall n \geq N_2 : \quad |s_{2n+1} - S| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher gilt $\forall n \geq N := \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$ dass $|s_n - S| < \varepsilon$. □

Beispiel 1.4.12 (Alternierende harmonische Reihe).
Die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \;=\; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \qquad \text{konvergiert}$$

nach 1.4.11, denn $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist eine monoton fallende Nullfolge.

Bemerkung 1.4.13 (Zum Leibnitzkriterium).

(i) Bemerke, dass 1.4.11 eine schwache Form der Umkehrung von 1.4.5 ($\sum a_n$ konvergent $\Rightarrow a_n \to 0$) ist (vgl. 1.4.9), denn 1.4.11 sagt:

$$a_n \to 0 \text{ und monoton fallend} \quad \Longrightarrow \quad \sum (-1)^n a_n \text{ konvergent.}$$

(ii) Der Beweis von 1.4.11 liefert die folgende *Fehlerabschätzung*:

$$|S - s_m| \leq |s_{m+1} - s_m| = a_{m+1}.$$

s_m hüpft ja immer über S hinaus

Bemerkung und Warnung 1.4.14 (Reihenkonvergenz ist instabil).
Wie bereits in 1.4.1 angekündigt, hängen Limes und sogar Konvergenzverhalten von Reihen von der Summationsreihenfolge ab.

(i) Um dieses (unerwünschte) Phänomen genauer zu untersuchen, benötigen wir die folgende Notation:

$$\boxed{\text{Sei } \sum a_n \text{ eine Reihe und } \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijektiv, dann heißt } \sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)} \text{ eine \emph{Umordnung} von } \sum a_n.}$$

(ii) Umordnung konvergenter Reihen kann den Limes ändern. Sei z.B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ die alternierende harmonische Reihe (sie konvergiert wegen 1.4.12). Gruppieren wir die Terme um, so ergibt sich

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}_{=\frac{1}{6}}-\frac{1}{8}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}_{=\frac{1}{10}}-\frac{1}{12}+\underbrace{\frac{1}{7}-\frac{1}{14}}_{=\frac{1}{14}}-\frac{1}{16}+\dots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\dots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots\right)$$

und wir erhalten die Hälfte der ursprünglichen Summe.

(iii) Umordnung konvergenter Reihen kann sogar zu Divergenz führen! Wir ordnen nochmals die alternierende harmonische Reihe um, und zwar so, dass die negativen Terme immer später auftreten ($n \geq 2$):

$9 = 2^3 + 1$ $\quad$ $15 = 2^{3+1} - 1$ $\quad$ $8 = 2 \cdot 3 + 2$

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{>0}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)}_{>\frac{2}{8}=\frac{1}{4}}-\frac{1}{6}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)}_{>\frac{4}{16}=\frac{1}{4}}-\frac{1}{8}+\dots$$

$$\dots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)}_{\geq\frac{2^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}}-\frac{1}{2n+2}$$

#Terme $= \frac{2^{n+1}-2^n}{2} = \frac{2^n(2-1)}{2} = 2^{n-1}$

$$>\frac{n-1}{4}-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2n+2}\right)>\frac{n-1}{4}-\frac{n-1}{6}=\frac{n-1}{12}.$$

der Klammern mit pos. Termen $= n-1 =$ # der neg. Terme

Also sind die Partialsummen einer solchen Umordnung unbeschränkt und somit ist die Reihe divergent.

(iv) Fazit: Wir benötigen einen stärkeren Konvergenzbegriff der solche Effekte ausschließt! Einen solchen liefert die nächste Definition.

Definition 1.4.15 (Absolute Konvergenz).
Eine Reihe $\sum a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum |a_n|$ konvergiert.

Reihe der Absolutbeträge der Glieder

Bemerkung 1.4.16 (Zur absoluten Konvergenz).

(i) Absolut konvergente Reihen haben beschränkte „Absolut-Partialsummen". Genauer, wegen $|a_n| \geq 0$ gilt 1.4.6 und daher

$$\boxed{\sum |a_n| \text{ konvergent} \quad \iff \quad s_m = \sum_{n=0}^{m} |a_n| \text{ beschränkt.}}$$

(ii) Konvergente Reihen müssen nicht absolut konvergieren, formal:

$$\boxed{\sum a_n \text{ konvergent} \quad \not\Rightarrow \quad \sum |a_n| \text{ konvergent.}}$$

Ein Gegenbeispiel ist die harmonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergiert nach 1.4.12, aber $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert nach 1.4.8(ii).
Die Umkerhung ist aber richtig, wie die folgende Aussage zeigt.

Absolute Konvergenz ist also
wirklich stärker als „bloße" Konvergenz!

Proposition 1.4.17 (Absolute Konvergenz ⇒ Konvergenz).

Jede absolut konvergente reelle Reihe konvergiert.

Beweis (CP für Reihen und △-Ungl.).
Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt mit 1.4.3 für $\sum |a_n|$: $\exists N\ \forall n \geq m \geq N$:

$$\varepsilon > \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| > \sum_{k=m}^{n} |a_k| \geq \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right|$$

△-Ungl. für endliche Summen
von rechts nach links gelesen

Und daher gilt mit 1.4.3 (lies von rechts nach links), dass $\sum a_n$ konvergiert. □

Abs. Konvergenz ist stabil bzgl. Umordnungen
und damit der gesuchte Begriff, vgl. 1.4.14(iv).

Theorem 1.4.18 (Umordnungssatz).
Sei $\sum a_n$ absolut konvergent. Dann ist jede Umordnung $\sum a_{\tau(n)}$ absolut konvergent und konvergiert gegen denselben Limes.

Beweis. Nach 1.4.17 existiert $s := \lim \sum a_n$. Sei $\varepsilon > 0$.
(Jetzt in drei Schritten ins Ziel)

(1) *Abschätzung für den Reihenrest.*

$$\overset{1.4.3}{\underset{\sum|a_n|}{\Longrightarrow}} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall l \geq N: \quad \sum_{k=N}^{l} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\overset{1.2.27}{\underset{1.2.30}{\Longrightarrow}} \quad \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.37}$$

Daher gilt $\forall m \geq N$

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right| = \left| \sum_{k=N}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=N}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \overset{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\overset{1.2.27}{\underset{(m\to\infty)}{\Longrightarrow}} \quad \left| s - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.38}$$

(2) $\lim \sum a_{\tau(n)} = s$.
Sei $M \in \mathbb{N}$ sodass $M \geq N$ und sodass

möglich, weil τ bijektiv

$$\{\tau(0), \tau(1), \ldots, \tau(M)\} \supseteq \{0, 1, \ldots, N-1\}. \quad (\triangle)$$

Dann gilt $\forall m \geq M$

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_{\tau(k)} - s \right| \leq \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{m} a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right|}_{\leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k|} + \left| \sum_{k=0}^{N-1} a_k - s \right| \underset{(1.38)}{\overset{(1.37)}{\leq}} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Wegen $(\triangle)$ fallen alle a_k mit $0 \leq k \leq N-1$ aus der Summe weg. Übrig bleiben gewisse a_k, über die man nur weiß, dass $k \geq N$ ist. Diese Summe ist sicher durch $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$ abschätzbar.

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)} = s.$$

(3) $\sum a_{\tau(n)}$ *konvergiert absolut.*
Dies folgt sofort aus (1) und (2) für die Reihe $\sum b_n$ mit $b_n := |a_n|$. $\square$

Motivation 1.4.19 (Absolute Konvergenz: Schön, aber wie?).
Nachdem wir gesehen haben, dass absolute Konvergenz der richtige Begriff ist, um mit Reihen gut umgehen zu können - manchmal sagt man zu bloß konvergenten Reihen auch BEDINGT konvergent - stellt sich die wichtige Frage: Wie sehe ich einer Reihe an, ob sie absolut konvergiert? Dazu gibt es einige in der Praxis recht gut einsetzbare TESTS; diese leiten wir nun her.

Proposition 1.4.20 (Vergleichstests: Majoranten- und Minorantenkriterium).
(i) Sei $\sum c_n$ konvergent und $c_n \geq 0$.

$$|a_n| \leq c_n \text{ für fast alle } n \implies \sum a_n \text{ absolut konvergent.}$$

$\sum c_n$ heißt konv. *Majorante von $\sum a_n$*

(ii) Sei $\sum d_n$ divergent und $d_n \geq 0$.

$$a_n \geq d_n \text{ für fast alle } n \implies \sum a_n \text{ divergent.}$$

$\sum d_n$ heißt div. *Minorante von $\sum a_n$*

Beweis. (i) O.B.d.A. können wir annehmen, dass $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (der Reihenanfang ist egal für Konvergenzfragen, vgl. 1.4.4(i)). Wir verwenden 1.4.6: ($\sum |a_n|$ ist eine Reihe mit nicht-negativen Termen)
Für alle m gilt daher

$$0 \leq s_m = \sum_{n=0}^{m} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{m} c_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$$\implies \quad s_m \text{ beschränkt} \quad \overset{1.4.6}{\implies} \quad \sum |a_n| \text{ konvergent.}$$

(ii) Indirekt: Angenommen, $\sum a_n$ konvergiert. Dann würde nach (i) auch $\sum d_n$ konvergieren, ein Widerspruch. □

Beispiel 1.4.21 (Vergleichstest).
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, denn $\forall n \geq 1$: $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ und $\sum \frac{1}{n}$ divergiert (1.4.8(ii)). Daher gilt wegen 1.4.20(ii), dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{divergiert.}$$

(ii) Sei (a_n) eine reelle Folge mit $|a_n| \leq 1\ \forall n$. Sei $q \in (0,1)$, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \text{ ist absolut konvergent,}$$

denn $|a_n q^n| \leq q^n$ und $\sum q^n$ konvergiert (1.2.37) $\overset{1.4.20(i)}{\implies} \sum a_n q^n$ konvergiert absolut.

Proposition 1.4.22 (Wurzeltest).
Die reelle Reihe $\sum a_n$ ist
(i) absolut konvergent, falls $\exists \theta : 0 < \theta < 1$ und $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta \quad \forall n \geq n_0,$$

(ii) divergent, falls

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \text{für unendlich viele } n.$$

Beweis (Benutzt den Vergleichstest und die geometrische Reihe und ergibt sich damit fast von selbst...).

(i) Es gilt $|a_n| \leq \theta^n$ für fast alle n, und $\sum \theta^n$ ist konvergent (1.2.37)

$$\overset{1.4.20(i)}{\Longrightarrow} \quad \sum |a_n| \text{ ist konvergent.}$$

(ii) $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele n, also $a_n \not\to 0$

$$\underset{\text{„Dodel-Test“}}{\overset{1.4.5}{\Longrightarrow}} \quad \sum a_n \text{ divergiert.}\square$$

Bemerkung 1.4.23 (Zum Wurzeltest).

(i) In der Praxis tritt oft auf, dass $\sqrt[n]{|a_n|}$ konvergiert. Sei also $a := \lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} a<1 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Bedingung in 1.4.22(i) gilt (etwa mit } \theta = a+\eta < 1 \text{ und } \eta = \tfrac{1-a}{2}) \\ &\Longrightarrow \quad \textstyle\sum a_n \text{ abs. konv.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a>1 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Bedingung in 1.4.22(ii) gilt (sogar für fast alle } n) \\ &\Longrightarrow \quad \textstyle\sum a_n \text{ divergent.} \end{aligned}$$

(ii) <u>WARNUNG</u>! Der Wurzeltest benötigt <u>wirklich</u> die Abschätzung

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta < 1 \text{ und nicht nur } \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

$|a_n|^{\frac{1}{n}}$ hat endlichen Abstand zu 1

$|a_n|^{\frac{1}{n}}$ kann 1 beliebig nahe kommen

Konvergiert nämlich $\sqrt[n]{|a_n|}$ gegen 1, so ist keine Aussage möglich. Es kann nämlich sowohl absolute Konvergenz als auch Divergenz vorliegen, wie die folgenden Beispiel zeigen. Bemerke zuerst, dass $\sqrt[n]{n} \to 1$ (UE) und daher $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$ (Satz 1.2.25) und $\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ (1.2.22). Nun zu den Beispielen:

$$1 > \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1 \quad \text{und} \quad \sum \frac{1}{n^2} \text{ konvergiert (1.4.10(i)),}$$

$$1 > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1 \quad \text{und} \quad \sum \frac{1}{n} \text{ divergiert (1.4.8(ii)).}$$

Proposition 1.4.24 (Quotiententest).
Sei $a_n \neq 0$ für (fast[2]) alle n. Die reelle Reihe $\sum a_n$
(i) konvergiert absolut, falls $\exists \theta : 0 < \theta < 1$ und $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sodass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta \quad \forall n \geq n_0,$$

(ii) divergiert, falls $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sodass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \quad \forall n \geq n_0.$$

Beweis (Benutzt wieder Vergleichstest & geometrische Reihe und ist wieder nicht schwer...).
(i) Für alle $n \geq n_0$ gilt nach Voraussetzung

$$|a_{n+1}| \leq \theta |a_n| \leq \theta^2 |a_{n-1}| \leq \cdots \leq \theta^{n+1-n_0} |a_{n_0}| := c_n$$

und

$$\sum c_n = \sum \theta^{n+1-n_0} |a_{n_0}| = |a_{n_0}| \theta^{1-n_0} \sum \theta^n$$

konvergiert nach 1.2.37. Nun besagt aber 1.4.20(i), dass

$$\sum |a_n| \text{ konvergiert.}$$

(ii) Sei $n_1 \geq n_0$, dann gilt lt. Voraussetzung $|a_n| \geq |a_{n-1}| > 0 \quad \forall n \geq n_1$

$$\Longrightarrow \quad a_n \not\to 0 \quad \overset{1.4.5}{\Longrightarrow} \quad \sum a_n \text{ divergiert.} \qquad \square$$

Bemerkung 1.4.25 (Zum Quotiententest).
(i) Analog zum Wurzeltest: Falls $\exists a := \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, dann gilt

$$\begin{aligned} a < 1 \quad &\overset{1.4.24(i)}{\Longrightarrow} \quad \sum a_n \text{ absolut konvergent,} \\ a > 1 \quad &\underset{1.4.24(ii)}{\Longrightarrow} \quad \sum a_n \text{ divergent.} \end{aligned}$$

(ii) <u>WARNUNG</u>! Auch hier ist bei $\theta = 1$ keine Aussage möglich, denn z.B.

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{n^2} \text{ konvergiert nach 1.4.10(i) und} \quad & 1 > \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1, \\ \sum \frac{1}{n} \text{ divergiert nach 1.4.8(ii) und} \quad & 1 > \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1. \end{aligned}$$

[2] Die Modifikation der Aussage und des Beweises für „fast alle“ statt „alle“ ist einfach zu bewerkstelligen aber etwas lästig aufzuschreiben. Daher bleiben wir bei „alle“.

(iii) Wurzeltest vs Quotiententest: Man kann zeigen, dass

$$\text{(i) im Quotiententest} \quad \Longrightarrow \quad \text{(i) im Wurzeltest.}$$

Das bedeutet, dass falls der Quotiententest positiv ausfällt, auch der Wurzeltest anwendbar ist und ebenfalls positiv ausfällt. Die Umkehrung ist aber falsch, siehe [2, §5.3]. Für die Praxis bedeutet das für das Testen einer gegebenen Reihe auf absolute Konvergenz: Falls der Wurzeltest nicht anwendbar ist, braucht man es mit dem Quotiententest erst gar nicht probieren...

Beispiel 1.4.26 (Quotiententest, Wurzeltest).

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ist absolut konvergent, denn

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{2} < 1,$$

und mit 1.4.25(i) folgt die Behauptung.

(ii) $\sum a_n$ mit

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

können $\theta = \frac{1}{2}$ wählen

ist absolut konvergent, denn (1.4.22(i))

QT bringt hier nichts!

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \le \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} < 1 \quad \forall n.$$

Bemerke, dass für diese Reihe der Quotiententest nicht funktioniert. Genauer ist er nicht anwendbar, denn

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k} \overset{1.1.5(ii)}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2k+1} \overset{1.1.5(i)}{\longrightarrow} \infty.$$

Motivation 1.4.27 (Dezimaldarstellung und b-adische Entwicklung).
Als erste Anwendung des entwickelten Begriffsapparates für Reihen werden wir nun die Dezimaldarstellung reeller Zahlen und ihre Verallgemeinerung auf andere Basen (statt 10) studieren.

(i) Beginnen wir mit $\mathbb{Q}$: Im Alltag sind wir es gewohnt, rationale Zahlen in Dezimaldarstellung zu sehen, z.B. auf Preisschildern im Supermarkt $17{,}48$ EUR. Die entsprechende Bruchzahl $x \in \mathbb{Q}$ errechnet sich gemäß

$$x = 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} = \frac{10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8}{10^2} = \frac{1748}{100}.$$

(ii) Es ergeben sich unmittelbar zwei mögliche Verallgemeinerungen:

(A) Obige Darstellung hat endlich viele Terme. Können wir auch unendlich viele Terme zulassen und x so als Limes einer unendlichen Reihe auffassen — und welche Zahlen x können wir so darstellen? Etwa mehr als $\mathbb{Q}$?

(B) Eine völlig analoge Darstellung für beliebige Basen $b \geq 2$ statt 10 ist leicht zu bewerkstelligen. In diesem Rahmen (offizielle Definition kommt sofort) werden wir uns den Fragen in (A) widmen.

Definition 1.4.28 (b-adische Entwicklung).
Sei $\mathbb{N} \ni b \geq 2$, $N \in \mathbb{Z}$ und $a_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ $(N \leq n \in \mathbb{Z})$. Die Reihe

Basis Ziffern

$$\pm \sum_{n=N}^{\infty} a_n b^{-n}$$

heißt *b-adische Entwicklung mit Ziffern* a_n $(N \leq n \in \mathbb{Z})$.

Beispiel 1.4.29 (b-adische Entwicklung).

(i) Im Beispiel in 1.4.27(i) ist $b = 10$, $N = -1$, $a_{-1} = 1, a_0 = 7, a_1 = 4, a_2 = 8$. Noch genauer

$$17,48 = 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} = \sum_{n=-1}^{2} a_n 10^{-n}.$$

(ii) Es gilt $2^7 = 128$, daher hat 128 die Binärdarstellung (d.h. mit Basis $b = 2$)

$$128 = 1 \cdot 2^7 = \sum_{n=-7}^{-7} 1 \cdot 2^{-n}.$$

Motivation 1.4.30 (Konkretisierung von (A) in 1.4.27(ii)).
Die Fragen in 1.4.27(A) können wie folgt konkretisiert werden:

(i) Ist jede b-adische Entwicklung konvergent?
(ii) Kann jedes $x \in \mathbb{R}$ als Limes einer b-adischen Entwicklung dargestellt werden?
(iii) Ist diese Darstellung eindeutig?

Bemerkung 1.4.31 (Uneindeutigkeit b-adischer Entwicklungen).
Die Antwort auf 1.4.30(iii) ist negativ, wie das folgende Beispiel zeigt ($b = 10$):

$$\begin{aligned} 0,9999\ldots &= \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = 9 \cdot 10^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (10^{-1})^n \\ &= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \frac{10}{10-1} = 1 = 1,0000\ldots \end{aligned}$$

geom. Reihe, schon wieder...

Zum Glück lautet die Antwort auf 1.4.30(i) und (ii) „JA“ wie wir gleich sehen werden.

Theorem 1.4.32 (*b*-adische Entwicklung reeller Zahlen).
Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, dann gilt:
(i) Jede b-adische Entwicklung konvergiert absolut.
(ii) Jede reelle Zahl x ist Summe (d.h. Limes) einer b-adischen Entwicklung (wobei die Ziffern wie im Beweis angegeben rekursiv konstruiert werden können).

Beweis. (i) *(wie gehabt und leicht)*
Für alle n gilt:

$$|a_n b^{-n}| \overset{a_n \leq b-1}{\leq} (b-1)b^{-n} \text{ und } \sum b^{-n} \text{ ist konvergente Majorante}$$
$$\overset{1.4.20(i)}{\Longrightarrow} \quad \sum a_n b^{-n} \text{ konvergiert absolut.}$$

(ii) *(technisch anspruchsvoll...)*
Es genügt den Fall $x \geq 0$ zu betrachten. Wir konstruieren eine b-adische Darstellung für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ in 3 Schritten.

(1) *Konstruktionsvorschrift:*
Da $b \geq 2$, gibt es nach 1.1.5(i) ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $b^m > x$. Nach der Wohlordnung von $\mathbb{N}$ (vgl. 1.1.2) existiert

$$m_0 := \min\{m \in \mathbb{N} \mid x < b^{m+1}\}.$$

Setze $N := -m_0$. Wir werden in Schritt (3) induktiv eine Folge a_n in $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ konstruieren, sodass

$$\forall n \geq N \quad \exists \xi_n \text{ mit } 0 \leq \xi_n < b^{-n} \text{ und } x = \sum_{k=N}^{n} a_k b^{-k} + \xi_n. \tag{1.39}$$

(2) Diese Vorschrift genügt, denn (1.39) $\Rightarrow \xi_n \to 0$, also

$$x = \sum_{k=N}^{\infty} a_k b^{-k},$$

was die Aussage (ii) beweist.

Bevor wir, den entscheidenden 3. Schritt beginnen erinnern wir an die *nächst kleinere Ganze* auch *Gauß-Klammer* genannt:

$$\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\lfloor y \rfloor := \max\{l \in \mathbb{Z} \mid l \leq y\}$$

$$\text{Es gilt } \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1 \text{ und daher } 0 \leq y - \lfloor y \rfloor < 1. \tag{1.40}$$

(3) *Konstruktion:* Wir gehen induktiv vor und beginnen bei $n = N$.
$\underline{n = N:}$ Weil $b \geq 2 > 1$ und $N \leq 0$ ist, gilt $0 \leq b^N < b$. Wir definieren

$a_N \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ und ξ_N durch

$$a_N := \lfloor x b^N \rfloor, \quad \xi_N := (x b^N - a_N) b^{-N}.$$

Dann gilt $x = b^{-N} \ a_N + \xi_N$ und $0 \le \xi_N \overset{(1.40)}{<} b^{-N}$. Also gilt (1.39) für $n = N$.
$\underline{n \mapsto n+1 :}$ Aus (1.39) für n folgt $0 \le \xi_n b^{n+1} < b$. Wir definieren a_{n+1}, ξ_{n+1} durch

$$a_{n+1} := \lfloor \xi_n b^{n+1} \rfloor, \quad \xi_{n+1} := \underbrace{(\xi_n b^{n+1} - a_{n+1})}_{0 \le \cdots < 1 \text{ nach } (1.40)} \ b^{-n-1}. \tag{1.41}$$

Dann gilt $\xi_n = a_{n+1} b^{-n-1} + \xi_{n+1}$ und daher

$$x \overset{\text{(IV)}}{=} \sum_{k=N}^{n} a_k b^{-k} + a_{n+1} b^{-n-1} + \xi_{n+1} = \sum_{k=N}^{n+1} a_k b^{-k} + \xi_{n+1}$$

und $0 \le \xi_{n+1} \overset{(1.41)}{<} b^{-n-1}$,

also gilt (1.39) für $n+1$. □

Korollar 1.4.33 (Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, zum Dritten).
Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Limes einer Folge in $\mathbb{Q}$.

vgl. mit 0.1.12(ii) und 1.3.30A

Beweis. Nach 1.4.32 existiert eine Dezimaldarstellung für x, d.h.

$$x = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}.$$

Für jedes m ist die Partialsumme

$$s_m = \sum_{n=N}^{m} a_n \cdot 10^{-n} \in \mathbb{Q}$$

und $s_m \to x$. □

Bemerkung 1.4.34.
Sei $\mathbb{R} \ni x = \sum_{n=N}^{\infty} a_n b^{-n}$ eine b-adische Entwicklung. Man kann zeigen, siehe z.B. [1, II.7]:

$x \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad$ Die Ziffernfolge a_n ist ab einem $K \in \mathbb{N}$ periodisch
d.h. $\exists K \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \ a_{n+p} = a_n \quad \forall n \ge K$.

Das inkludiert den Fall, dass ab K alle $a_n = 0$ gilt, die Entwicklung also abbricht!

Motivation 1.4.35 (Das Cauchy-Produkt für Reihen).

(i) Um zu einer zweiten - noch viel wichtigeren - Anwendung unserer Erkenntnisse über Reihen zu gelangen, nämlich der

EXPONENTIALFUNKTION,

müssen wir uns zunächst um Produkte von Reihen kümmern.

(ii) Um letztere zu motivieren, beginnen wir mit einer Überlegung zu Produkten endlicher Summen.
Sei $A_N = \sum_{n=0}^N a_n, B_N = \sum_{n=0}^N b_n$, dann gilt

$$A_N \cdot B_N = \left(\sum_{n=0}^N a_n\right)\left(\sum_{n=0}^N b_n\right) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N a_k b_l. \tag{1.42}$$

Für die Untersuchung der Konvergenz $N \to \infty$ solcher Ausdrücke erweist es sich als günstig, die Summation anders zu arrangieren. Am besten wird das in einer 2-dimensionalen Skizze deutlich:
Alles läuft darauf hinaus, in welcher Reihenfolge wir die Indexpaare (k,l) in der Doppelsumme in (1.42) durchlaufen, wie Abbildung 1.20 zeigt:

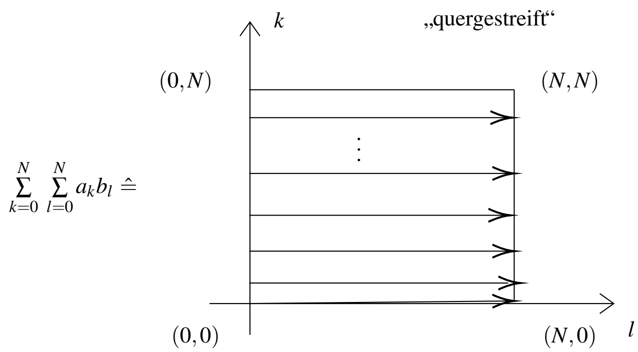


Abb. 1.20 Indexpaare werden „quer" durchlaufen

Es erweist sich für viele Anwendungen als günstiger, längs der Diagonalen zu laufen, zumindest bis wir die längste Diagonale erreichen, wie in Abbildung 1.21 zu sehen ist:
Wir verwenden folgende Abkürzungen für Bereiche des Gitters $\mathbb{N} \times \mathbb{N} =: \mathbb{N}^2$:

$$Q_N := \{(k,l) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \le k,l \le N\},$$
$$\triangle_N := \{(k,l) \in Q_N \mid k+l \le N\},$$

welche in Abbildung 1.22 dargestellt sind.
Damit können wir schreiben

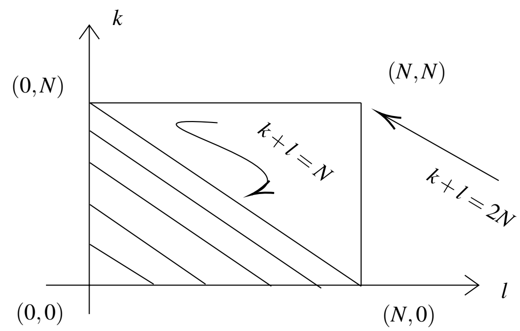


Abb. 1.21 Indexpaare werden „diagonal“ durchlaufen

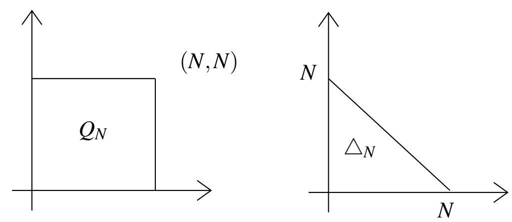


Abb. 1.22 Indexpaare in Q_N, sowie in $\triangle_N$

$$\begin{aligned}
A_N \cdot B_N &= \sum_{(k,l)\in Q_N} a_k b_l = \sum_{(k,l)\in\triangle_N} a_k b_l + \sum_{(k,l)\in Q_N\setminus\triangle_N} a_k b_l \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} + \sum_{(k,l)\in Q_N\setminus\triangle_N} a_k b_l,
\end{aligned} \tag{1.43}$$

wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen „längs der Diagonalen gelaufen“ sind, d.h. die Gleichheit

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{\substack{(k,l)\in\triangle_N \\ k+l=n}} a_k b_l = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

verwendet haben.

(iii) Wozu das ganze? Wenn $\sum a_n$, $\sum b_n$ absolut konvergieren und wir *Produktreihen* betrachten, dann müssen wir in obiger Terminologie $\lim(A_N B_N)$ ausrechnen. Dabei zeigt sich, dass relativ schnell zu sehen ist[3], dass

[3] Intuitiv werden in $Q_N \setminus \triangle_N$ die Indices sowohl von a_n als auch von b_n groß und daher Produkte der Form $a_k b_l$ schnell klein.

$$\sum_{(k,l)\in Q_N\setminus\triangle_N} a_k b_l \to 0$$

und daher der erste Term in (1.43) gegen $\left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$ geht.
Außerdem ermöglicht die Struktur des Terms

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

schöne Formeln.

(iv) Ja, und muss man das so machen?
Nein, jede Form des Durchlaufens erzeugt bei absolut konvergenten $\sum a_n$, $\sum b_n$ eine absolut konvergente Reihe mit dem selben Limes, siehe z.B. [8, 32.5-6] und [4, p. 116ff].

Proposition 1.4.36 (Cauchy-Produkt für Reihen).
Seien $\sum a_n$, $\sum b_n$ absolut konvergente Reihen. Definiere

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann ist $\sum c_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right).$$

Bemerkung 1.4.35A.
Bemerke, dass die Proposition besagt, dass

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_n\right)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_n\right) = \lim_{N\to\infty}\sum_{(k,l)\in\triangle_N} a_k b_l = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

was wir in 1.4.35(iii) bereits angedeutet haben.

Beweis (Sehr technisch). . Wir verwenden die Notation aus 1.4.35. Sei $S_N := \sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, dann gilt

$$A_N \cdot B_N - S_N = \sum_{(k,l)\in Q_N\setminus\triangle_N} a_k b_l.$$

Wir berechnen den Limes von S_N und zeigen das die Konvergenz absolut ist in 2 getrennten Schritten.

(1) $\lim S_N = \left(\sum a_k\right)\left(\sum b_l\right)$:
Setze $A_N^* := \sum_{n=0}^{N} |a_n|, B_N^* := \sum_{n=0}^{N} |b_n|$, dann ist

$$A_N^* B_N^* = \sum_{(k,l)\in Q_N} |a_k b_l|.$$

Weiters gilt (siehe Abb.1.23): $Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \subseteq \triangle_N \subseteq Q_N$.

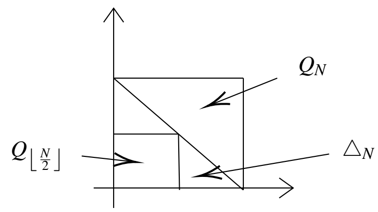


Abb. 1.23 Schachtelung der Mengen $Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \subseteq \triangle_N \subseteq Q_N$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
|A_N B_N - S_N| &\le \sum_{(k,l)\in Q_N \setminus \triangle_N} |a_k||b_l| \overset{Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \subseteq \triangle_N}{\le} \sum_{(k,l)\in Q_N \setminus Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}} |a_k||b_l| \\
&= A_N^* B_N^* - A^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} B^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}.
\end{aligned}
$$

Nach Voraussetzung ist $(A_N^* B_N^*)_N$ konvergent, also eine Cauchy-Folge, und somit $\lim_{N\to\infty} A_N^* B_N^* - A^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} B^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} = 0$ und daher

$$|A_N B_N - S_N| \to 0.$$

Somit ergibt sich schließlich wegen

$$A_N \cdot B_N \to \left(\sum a_k\right)\left(\sum b_l\right) \text{ die Beauptung, d.h. } S_N \to \left(\sum a_k\right)\left(\sum b_l\right).$$

(2) $\sum c_n$ *ist absolut konvergent:*

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \overset{\triangle-\text{Ungl.}}{\le} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| \quad \underset{\text{für } \sum |a_n|, \sum |b_n|}{\overset{(1)}{\Longrightarrow}} \quad \text{konvergent.} \qquad \square$$

Bemerkung 1.4.37 (Exponentialreihe).
Jetzt kommen wir endlich über die Exponentialreihe zur angekündigten Exponentialfunktion.

(i) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ absolut konvergent, denn für $x \neq 0$ sind die Glieder $a_n \neq 0$ und

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1} n!}{(n+1)!|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0,$$

also folgt die absolute Konvergenz aus dem Quotientenkriterium.
Für $x = 0$ ist die Sache einfacher, denn $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$.

(ii) (ACHTUNG: <u>NEUE IDEE</u>!) Daher können wir für $x \in \mathbb{R}$ eine Funktion

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}$$

definieren. Nun aber offiziell:

Definition 1.4.38 (Exponentialfunktion, Eulersche Zahl).
Die *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\boxed{\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

und die *Eulersche Zahl* durch

$$\boxed{e := \exp(1)} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$$

Motivation 1.4.39 (Funktionalgleichung für exp).
Viele wichtige Eigenschaften der überaus wichtigen Exponentialfunktion folgen aus der Funktionalgleichung $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$. (Tatsächlich ist exp dadurch und eine Beschränktheitsbedingung schon eindeutig charakterisiert [2, Sec. 7.5]). Wir werden sie jetzt als Folgerung aus dem Cauchy-Produkt herleiten.

Theorem 1.4.40 (Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion).
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).} \tag{1.44}$$

Beweis (Erfreulich einfach, denn die ganze Arbeit steckt schon in 1.4.36.).
Nach 1.4.37 sind $\sum \frac{x^n}{n!}, \sum \frac{y^n}{n!}$ absolut konvergent. Daher folgt aus 1.4.36, dass

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ mit}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \overset{\text{BLS}}{=} \frac{(x+y)^n}{n!}. \tag{1.45}$$

Also

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \overset{(1.45)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y). \qquad \square$$

Korollar 1.4.41 (Wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion).
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
(i) $\exp(x) > 0$
(ii) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
(iii) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(n) = e^n$.

Beweis (Den erledigt die Funktionalgleichung für uns — bedenke aber, dass die ganze Arbeit daher schon in 1.4.36 steckt).

(ii) Die Funktionalgleichung (1.44) liefert

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) \overset{(1.44)}{=} \exp(x)\exp(-x).$$

(i) Für $x \geq 0$ gilt

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots \geq 1 > 0. \tag{1.46}$$

Für $x < 0$ gilt

$$\exp(x) \overset{(ii)}{=} \underbrace{\frac{1}{\exp\underbrace{(-x)}_{>0}}}_{>0\,(1.46)} > 0.$$

(iii) Wegen (ii) gilt $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)}$ und es genügt daher, die Aussage für $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen. Das machen wir induktiv:
$\underline{n=0:}$ $\exp(0) = 1 = e^0$.
$\underline{n \mapsto n+1:}$ $\exp(n+1) \overset{1.44}{=} \exp(n)\exp(1) \overset{(IV)}{=} e^n \cdot e^1 = e^{n+1}$. □

Bemerkung und Motivation 1.4.42.

(i) Thm. 1.4.40 und Kor. 1.4.41 besagen, dass exp ein Gruppenhomomorphismus

$$\exp : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow ((0,\infty), \cdot)$$

ist; vgl. [7, 5.2.62].

(ii) Zum Abschluss des Abschnitts und des Kapitels beweisen wir nun eine grobe aber trotzdem sehr nützliche Fehlerschranke für die Exponentialreihe — später werden wir diese noch erheblich verbessern, Stichwort Taylorreihe, siehe Abschnitt 4.3.
Im technischen Beweis benötigen wir eine Verallgemeinerung der $\triangle$-Ungleichung für absolut konvergente Reihen, die wir als Lemma 1.4.44 unmittelbar nach Proposition 1.4.43 formulieren und beweisen.

Proposition 1.4.43 (Fehlerabschätzung für exp**).**
Sei $N \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

N-te Partialsumme

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x), \tag{1.47}$$

Rest der Ordnung $N+1$

wobei der Rest-Term R_{N+1} für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1 + \frac{N}{2}$ die Abschätzung

$$|R_{N+1}(x)| \le 2\,\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \tag{1.48}$$

erfüllt.

Beweis (Technisch aufwändig, aber notwendig!).
Für den Rest-Term gilt

$$R_{N+1}(x) = \exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

und letztere Reihe konvergiert absolut, vgl. 1.4.37(i). Daher gilt

$$\begin{aligned}
|R_{N+1}| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} &= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\Bigg(1 + \frac{|x|}{N+2} \\
&\qquad + \underbrace{\frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)}}_{\le \frac{|x|^2}{(N+2)^2}} + \underbrace{\frac{|x|^3}{(N+2)(N+3)(N+4)}}_{\le \frac{|x|^3}{(N+2)^3}} \cdots \Bigg) \\
&\le \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{N+2}\right)^k \le \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&\underset{1.2.37}{\overset{\text{geom. R.}}{=}} 2\,\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}.
\end{aligned}$$

$|x| \le \frac{N+2}{2}$

□

Verallg. △-Ungl. für abs. konv. Reihen, siehe Lemma 1.4.44 unten.

Lemma 1.4.44 (Verallgemeinerte △-Ungl. für absolut konvergente Reihen).
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe, dann gilt

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|. \tag{1.49}$$

Beweis (Anwenden des Sandwich-Lemmas auf die Partialsummen). Eine iterative Anwendung der (gewöhnlichen) △-Ungleichung liefert für die Partialsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| \le \sum_{n=0}^{N} |a_n|.$$

Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe gilt im Limes $N \to \infty$ mit 1.2.27 $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Beispiel 1.4.45 (Approximation für *e*).
Ganz zum Schluss des Kapitels machen wir nun die Abschätzung aus 1.4.43 konkret. Es gilt

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + R_{N+1}(1),$$

und $x = 1 \leq 1 + \frac{N}{2}$ $\forall N \in \mathbb{N}$. Daher erhalten wir aus (1.47) für $N = 2$

$$e = \sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!} + R_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + R_3(1) = \frac{5}{2} + R_3(1)$$

und aus (1.48)

$$0 < R_3(1) \leq 2\,\frac{1}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Also insgesamt

$$2 < \frac{5}{2} < e \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6} = 2.8\dot{3} < 3.$$

Tatsächlich gilt $e \approx 2,71828$ und die ersten 100 Stellen erhält man genau nach Summation der ersten 73 Terme. Das ist nicht besonders praktisch und wir werden später eine weit besser Approximation für e kennenlernen.

Literaturverzeichnis

1. Amann, H., Escher, J.: Analysis I. Birkhäuser, 3. Auflage, Basel (2006)
2. Barner, M., Flohr F.: Analysis I. de Gruyter, 5. Auflage, Berlin (2000)
3. Behrends, E.: Analysis Band 1 (Ein Lernbuch für den sanften Wechsel von der Schule zur Uni). Springer-Spektrum, 6. Auflage, Berlin, Heidelberg (2014)
4. Deiser, O.: Analysis 1 (Mathematik für das Lehramt), Springer-Spektrum, 2. Auflage, Berlin, Heidelberg (2013)
5. Forster, O.: Analysis 1, Springer-Spektrum, 12. Auflage, Berlin, Heidelberg (2016)
6. Kuba, G., Götz, S.: Zahlen. S. Fischer, Frankfurt am Main (2004)
7. Schichl, H., Steinbauer, R.: Einführung in das mathematische Arbeiten. Springer-Spektrum, Berlin, 3. Auflage (2018)
8. Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis. Teil 1. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 17. Auflage (2009)
9. Hörmann, G., Langer, D.: Vorlesungsskriptum zu „Einführung in die Analysis", Universität Wien, online unter `www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/08einan/einfanalysis.pdf`, 2010.
10. Hörmann, G., Langer, D.: Vorlesungsskriptum zum „Modul Analysis", Universität Wien, online unter `www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/0809an/modul_analysis.pdf`, 2009.

Sachverzeichnis