NAME:		MAT.NR.	

Prüfung zu

Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2024, 1. Termin, 27.6.2024

Roland Steinbauer

Erläuterungen zum Multiple Choice Teil: Für jede der 24 Fragen sind

4 Antwortmöglichkeiten angegeben, von denen 1, 2 oder 3 korrekt sind.

Die **„Bepunktung“** ist wie folgt: Für das Kreuzen einer korrekten Antwort erhalten Sie 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte (also z.B. bei 2 richtigen Antwortmöglichkeiten 1/2 Pkt pro gekreuzter richtiger Antwort, etc). Beim Ankreuzen einer falschen Antwort wird 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte abgezogen. Nichtankreuzen einer richtigen oder einer falschen Antwort ergibt keine Punkte. Pro Frage gibt es keine negativen Punkte, d.h. Sie können jeweils zwischen 0 und 1 Punkt pro Frage erreichen, insgesamt also höchstens 24 Punkte.

Die MC-Fragen müssen Sie auf dem gesonderten Antwortbogen ankreuzen. Dort müssen Sie Ihren Namen angeben und ihre Matrikelnummer eintragen **und vertikal als Ziffern ankreuzen**.

Beim **offenen Teil** der Prüfung können Sie ebenfalls maximal 24 Punkte erreichen. Die Punkte sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

MC	1	2	3	OT	$\sum$	Note
(24)	(10)	(6)	(8)	(24)	(48)	

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und fundamentale Ideen

1. (*Zur Grenzwertdefinition.*) Für eine relle Folge $(a_n)_n$ und ein $a \in \mathbb{R}$ gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Welche Aussagen sind dazu äquivalent?

   (a) In jeder ε-Umgebung von a liegen fast alle Folgenglieder a_n.

   (b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$

   (c) Es gibt eine ε-Umgebung von a in der fast alle Folgenglieder a_n liegen.

   (d) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$

2. (*Grenzwert vs. Häufungswerts.*) Welche Aussagen sind für reelle Folgen $(a_n)_n$ und $a \in \mathbb{R}$ korrekt?

   (a) Falls außerhalb jeder ε-Umgebung von a nur endlich viele a_n liegen, dann ist a Häufungswert aber nicht Grenzwert von (a_n).

   (b) Falls außerhalb jeder ε-Umgebung von a nur endlich viele a_n liegen, dann ist a Häufungswert und Grenzwert von (a_n).

   (c) Falls a der einzige Häufungswert von (a_n) ist, dann ist a auch schon Grenzwert von (a_n).

   (d) Ist a Grenzwert von (a_n), dann ist a auch ein Häufungswert von (a_n) und zwar der einzige.

3. (*Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen.*) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine reelle Reihe. Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) Falls alle a_n positiv sind und die Reihe konvergiert, dann konvergiert sie auch absolut.

   (b) Falls $a_n \to 0$, dann konvergiert die Reihe.

   (c) Falls unendlich viele a_n positiv sind und die Reihe konvergiert, dann konvergiert sie auch absolut.

   (d) Falls $|a_n| \to 0$, dann konvergiert die Reihe absolut.

4. (*Cauchy-Folge.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine reelle Folge (a_n) ist eine Cauchyfolge, falls

   (a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N: \quad |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$

   (b) a_n gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.

   (c) eine Teilfoge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ konvergiert

   (d) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: \quad |a_n - a_{n+1}| \leq \varepsilon.$

5. (*Stetigkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in D$, falls
   (a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D$ mit $|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
   (b) es eine reelle Folge (x_n) mit $x_n \to a$ gibt, für die schon $f(x_n) \to f(a)$ gilt.
   (c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D$ mit $|x - a| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \delta$.
   (d) es zu jedem (noch so kleinen) ε ein $U_\delta(a) \subseteq D$ gibt, sodass alle $x \in U_\delta(a)$ nach $U_\varepsilon(f(a))$ abgebildet werden (d.h. $f(x)$ in $U_\varepsilon(f(a))$ liegt).

6. (*Elementar transzendente Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) Für die Exponentialfunktion gilt $\exp(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R})$.
   (b) Die Logarithmusfunktion ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich $(0, \infty)$ streng monoton wachsend.
   (c) Für die Sinusfunktion gilt $\sin(0) = 1$ und $\sin'(0) = 1$.
   (d) Die allgemeine Potenzfunktion ist definiert als $x^\alpha = \exp(\alpha \log(x))$ $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$.

7. (*Stetigkeit und Differenzierbarkeit.*) Welche Aussagen sind für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ (I ein Intervall) korrekt?
   (a) Hat (der Graph von) f einen Knick, so ist f nicht differenzierbar.
   (b) Hat (der Graph von) f einen Sprung, so ist f nicht differenzierbar.
   (c) Wenn f stetig ist, so hat (der Graph von) f keinen Sprung.
   (d) Hat (der Graph von) f einen Knick, so ist f nicht stetig.

8. (*Stammfunktion.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ (mit I einem Intervall) ist Stammfunktion einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, falls
   (a) F differenzierbar ist und $F' = f$ auf ganz I gilt.
   (b) F gegeben ist durch $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + 17$ mit $a \in I$ beliebig.
   (c) $f' = F + c$ gilt, für ein $c \in \mathbb{R}$.
   (d) F gegeben ist durch $F(x) = \int_a^x \big(f(t) + c\big)\, dt$ mit $a \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ beide beliebig.

2 Sätze & Resultate

9. *(Beschränktheit & Konvergenz von Folgen).* Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

   (a) Es gibt konvergente Folgen die nicht beschränkt sind.

   (b) Jede beschränkte Folge hat einen Häufungswert.

   (c) Es gibt monoton fallende nach unten beschränkte Folgen, die nicht beschränkt sind.

   (d) Jede beschränkte Folge konvergiert.

10. (*Folgen & Konvergenz.*) Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

    (a) Jede Cauchy-Folge konvergiert.

    (b) Jede streng monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge konvergiert.

    (c) Es gibt monotone Folgen, die nicht konvergieren.

    (d) Es gibt unbeschränkte, monotone Folgen, die konvergieren.

11. (*Zur Reihenkonvergenz.*) Welche der folgenden Aussagen über reelle Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sind korrekt?

    (a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, falls $|a_n| \leq \frac{1}{n^2}$ gilt.

    (b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, falls $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ gilt.

    (c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls alle $a_n \geq 0$ sind und die Folge der Partialsummen $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ beschränkt ist.

    (d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls die Folge (a_n) eine Nullfolge ist.

12. (*Zur Vollständigkeit.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) Es gibt konvergente Folgen in $\mathbb{Q}$, die keine Cauchyfolgen sind.

    (b) Es gibt Folgen irrationaler Zahlen, die gegen $\sqrt{2}$ konvergieren.

    (c) Jede reelle Zahl ist Limes einer Folge rationaler Zahlen.

    (d) Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ konvergiert (als Folge in $\mathbb{R}$) aber ihr Limes muss nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.

13. (*Eigenschaften stetiger Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

    (a) Stetige Funktionen auf abgeschlossenen und beschränkten Intervallen haben Maximum und Minimum.

    (b) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ hat einen Fixpunkt.

    (c) Ist f stetig auf $[a, b]$ und nicht konstant, dann ist $f([a, b])$ wieder ein Intervall.

    (d) Jedes stetige $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.

14. (*Mittelwertsatz.*) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
    (a) Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.
    (b) Es gibt eine Stelle $\xi \in (a, b)$ in der die Tangente $g(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$ den Anstieg $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ hat.
    (c) Dann ist f auch auf $[a, b]$ differenzierbar, wobei in a und b nur die einseitigen Ableitungen existieren.
    (d) Gilt zusätzlich $f(a) = f(b)$, so gibt es einen Punkt in (a, b), in dem die Ableitung von f verschwindet.
15. (*Extrema.*) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?
    (a) Falls f in ξ ein lokales Maximum hat, so gilt $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$.
    (b) f kann in ξ ein lokales Extremum haben, obwohl $f'(\xi) \neq 0$ gilt.
    (c) f kann in ξ ein globales Extremum haben, obwohl $f'(\xi) \neq 0$ gilt.
    (d) Hat f ein lokales Minimum in ξ, dann ist f knapp links von ξ monoton fallend und knapp rechts von ξ monoton wachsend.
16. (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*) Welche Aussagen sind für eine auf einem Intervall I definierte stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und ein beliebiges $a \in I$ korrekt?
    (a) $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$.
    (b) f hat eine Stammfunktion.
    (c) $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f und f ist stetig differenzierbar.
    (d) $\frac{d}{dt} \int_a^x f(t)dx = f(x)$.

3 Beispiele, Gegenbeispiele, Rechenaufgaben

17. (*Konvergenz von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind korrekt?
    (a) $\left(\frac{n!}{n}\right)_{n\geq 1}$ ist unbeschränkt.
    (b) $\frac{(-1)^n}{n}$ hat zwei verschiedene Häufungswerte.
    (c) $\frac{3n^3 + 2n^2 + n}{n^2 + 7 - 6n^3} \to -\frac{1}{2}$.
    (d) Falls für eine reelle Folge $(a_n)_n$ für alle n gilt, dass $0 \leq a_n \leq 1/n^2$, dann ist (a_n) eine Nullfolge.

18. (*Konvergenz & absolute Konvergenz von Reihen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert absolut nach dem Quotiententest.

    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert absolut nach dem Quotiententest.

    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$

    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert absolut nach dem Wurzeltest.

19. (*Funktionsgrenzwerte 1*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) $\lim_{x\to\infty} \cos(x) = 1.$

    (b) $\lim_{x\searrow 0} \log(x) = -\infty.$

    (c) $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 1.$

    (d) $\lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$

20. (*Funktionsgrenzwerte 2*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0.$

    (b) $\lim_{x\to 0} x\log(x) = 0$

    (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

    (d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = \infty$

21. (*Stetigkeit & Differenzierbarkeit*). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ ist überall stetig und differenzierbar.

    (b) $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in [0,\infty))$ ist überall stetig aber differenzierbar nur für alle $x > 0$.

    (c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

    $$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

    ist überall stetig.

    (d) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

    $$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

    ist in $\xi = 0$ differenzierbar.

22. (*Differenzierbarkeit.*) Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Der Limes des Differenzenquotienten von f bei $\xi = 0$ divergiert für $0 \neq h \searrow 0$ und daher ist f in $\xi = 0$ nicht differenzierbar.

(b) Es gilt $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty$ und daher ist f in $\xi = 0$ nicht differenzierbar.

(c) Es gilt $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = \infty$ und daher ist f in $\xi = 0$ nicht differenzierbar.

(d) Es gilt $\lim_{0 \neq h \searrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \infty$ und daher ist f in $\xi = 0$ nicht differenzierbar.

23. (*Funktionen, vermischtes.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$ ist streng monoton steigend, obwohl $f'(0)$ verschwindet.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ hat in $x = 1$ ein (lokales und globales) Maximum, obwohl die Funktion dort nicht $f'(1) = 0$ erfüllt.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ hat in $x = 0$ ein Minimum, weil $f'(0) = 0$ gilt.

(d) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^2$ ist stetig in 0 fortsetzbar, weil die einseitigen Grenzwerte für $x \to 0$ beide existieren und übereinstimmen.

24. (*Integrierbare Funktionen und Integral.*) Welche der folgenden Aussagen über beschränkte Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

(a) $f(x) = |x|$ ist stetig und daher auch Riemann integrierbar.

(b) $f(x) = \cos(x)$ ist streng monoton fallend, und daher auch Riemann integrierbar.

(c) Sei f die charakteristische Funktion von $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ (d.h. $f(x) = 1$ für $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ und $f(x) = 0$ sonst), dann ist f Riemann integrierbar und es gilt

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{2}.$$

(d) $$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin^2(x)}\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\, dx = 0.$$

Teil 2: Offene Aufgaben

1. *Folgen, Reihen & Konvergenz*

   (a) (*Grenzwertsätze.*) Bekanntlich gilt für konvergente reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

   $$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b.$$

   Formulieren Sie diese Aussage ohne Verwendung mathematischer Symbole und erklären Sie *in eigenen Worten*, wie diese Aussage bewiesen werden kann. (3 Pkte)

   (b) (*Intervallschachtelungsprinzip.*) Formulieren Sie mathematisch exakt das Intervallschachtelungsprinzips und erläutern Sie, aus welchen wesentlichen Schritten der Beweis besteht. (5 Pkte)

   (c) (*Dezimalentwicklung.*) Unter einer Dezimalentwicklung mit Ziffern a_n versteht man eine Reihe der Form

   $$\pm \sum_{n=N}^{\infty} a_n 10^{-n},$$

   wobei $N \in \mathbb{Z}$ und $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ gilt. Erklären Sie, warum jede solche Entwicklung absolut konvergiert. (2 Pkte)

2. *Funktionen, Stetigkeit & Differenzierbarkeit*

   (a) (*(Un-)Stetige und (nicht) differenzierbare Funktionen.*) Geben Sie explizit (formal oder durch Zeichnen des Graphen) jeweils eine Funktion mit den geforderten Eigenschaften auf dem Intervall $(0, 1)$ an (je 1 Pkt):

   (i) Eine stetige Funktion, die nicht beschränkt ist.

   (ii) Eine stetige Funktion, die nicht differenzierbar ist.

   (iii) Eine beschränkte differenzierbare Funktion, die nicht stetig auf $[0, 1)$ fortgesetzt werden kann.

   (b) (*Fixpunktsatz.*) Der Fixpunktsatz besagt:

   Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ hat einen Fixpunkt.

   Was bedeutet das genau? Fertigen sie eine Skizze an, die zeigt, warum der Satz stimmt. (3 Punkte)

3. *Differenzieren & Integrieren*

   (a) (*Waagrechte Tangente.*) Formulieren Sie die notwendige Bedingung für lokale Extrema differenzierbarer Funktionen und beweisen Sie diese exakt. (4 Pkte)

   (b) (*Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnunng.*) Der erste Teil des Hauptsatzes besagt, dass durch Integration eine Stammfunktion gewonnen werden kann. Formulieren Sie diese Aussage exakt und geben Sie eine Beweisskizze. Illustrieren Sie dabei den entscheidenden Schritt graphisch. (4 Pkt)