Neue Mathematik für die Schule

Kann die aktuelle mathematische Forschung einen Beitrag für den Mathematikunterricht leisten?

Ilse Fischer und Roland Steinbauer

Universität Wien

ÖMG-Fortbildungstagung für Lehrkräfte, 5.4. 2024

Neue Mathematik für die Schule

Inhalt

(1) Allgemeine Überlegungen

(2) Beispiele aus der

- Diskreten Mathematik
- Geometrie/Analysis

Die Mathematik im MU ist „alte” Mathematik

Warum?

- Traditioneller Kanon

- Zwänge durch Lehrplan, etc.

- Fokussierung auf einfache Algorithmen, Prüfbarkeit

- Bewirtschaften von „Aufgabenplantagen”
  Erlernen von Schemata zur Lösung von Standardproblemen

„Die verstärkte Konzentration auf die Förderung von bestimmten Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler hat die inhaltliche Diskussion allerdings etwas in den Hintergrund treten lassen. Die in den vergangenen Jahren entwickelten standardorientierten Lehrpläne der einzelnen Bundesländer beschäftigen sich zum Großteil **auf der Basis des traditionellen Inhaltskanons mit der Umsetzung der Kompetenzförderung. Moderne Inhalte oder neue Aspekte traditioneller Inhalte kommen eher zu kurz.**"

Die Diskussion über Bildungsstandards wurde offenbar nicht als Chance wahrgenommen, den Mathematikunterricht neu zu überdenken und z.B. neue Inhalte aufzunehmen.

[Grötschel, Lutz-Westphal, (2009): *Diskrete Mathematik und ihre Anwendungen: Auf dem Weg zu einem authentischen Mathematikunterricht*, Jahresber. DMV]

Die Mathematik im MU ist „alte” Mathematik

Kann/Soll das so bleiben?

- Rechnen verliert durch Technologie immer mehr an Bedeutung

- Beitrag des MU zur Allgemeinbildung:
  3 Winter'sche Grunderfahrungen (mathematischer Blick, mathematische Welt, heuristische Fähigkeiten)

- Mathematik hat — von vielen unbemerkt — mittlerweile viele Bereiche unseres Alltags durchdrungen.

- Adäquates Bild von der Mathematik als Wissenschaft:
  JA, es gibt (ganz viel!) aktuelle mathematische Forschung
  Publikationen: 1980: 43.000   2000: 72.000   2020: 136.000

Neue Mathematik für den MU

Wie?

- Mathematische Ideen/Begriffe ins Zentrum stellen
  - Explizit *Grundvorstellungen* („Bilder im Kopf") unterrichten (Funktioniert in der LA-Ausbildung [Ableitinger, Götz, S. (2022)])
  - Operieren auf notwendiges Maß beschränken

- Neue Impulse aus der (forschungsnahen) Mathematik

  „Der Mathematikunterricht in Schulen lebt unter anderem davon, immer wieder **neue Impulse zu bekommen und aufzunehmen**." [Grötschel, Lutz-Westphal, (2009)]

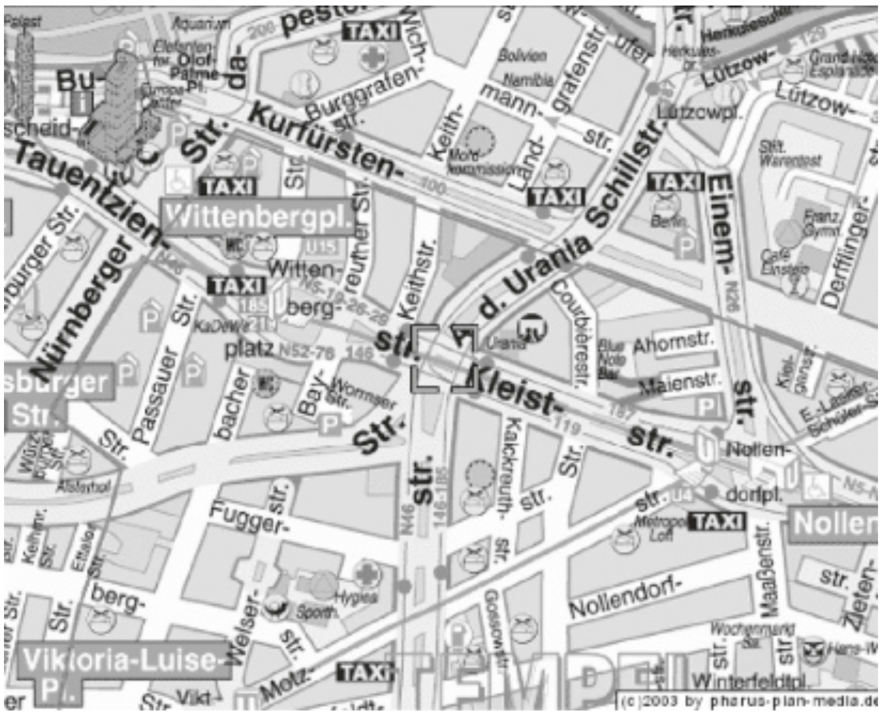
Beispiel aus der Diskreten Mathematik:

Das Briefträger:innenproblem

Rückmeldungen von Schüler:innen zur Diskreten Mathematik

- *Wie hat dir das Thema gefallen? (Klasse 8, DE)*
  - Besser als Mathe. Sehr Gut.
- *Was hat dir noch gefallen/nicht gefallen? (Klasse 8)*
  - Dass Diskrete Mathematik noch **erforscht** wird.
  - Man muss **wenig rechnen.**
- *Wie hat Ihnen das Thema gefallen? (Klasse 13)*
  - Perfekt! Total beeindruckend. Das Thema hat mich so vereinnahmt, dass ich über Wege auf meinem Duschvorhang nachgedacht habe.
  - Man konnte gut **frei arbeiten** und eigene Ideen entwickeln.
  - Gut, interessant, wirft spannende Aspekte der Mathematik in Verbindung mit der **Realität** auf.
- *Hat sich Ihr Bild von Mathematik oder Ihre Einstellung zur Mathematik durch die Arbeit an dem Thema verändert? Wenn ja, wie? (Klasse 13)*
  - Man hat gesehen, dass **nicht alles nur konkret auf Formeln** zurückzuführen ist. Außerdem hat man mal eine **direkte Anwendung von theoretischen mathematischen Problemstellungen** erfahren. Mathematiker sind in meinen Augen also nicht mehr die bloßen Theoretiker.
- *Was hast du in dieser Woche dazugelernt? (Klasse 5)*
  - **Dass Mathematik manchmal keine Mathematik ist.**

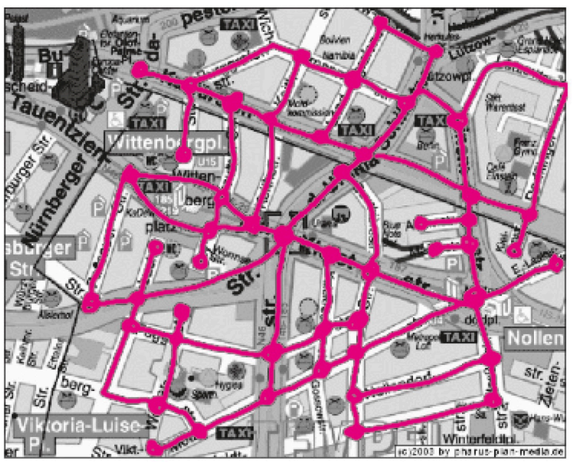
Briefträger:innenproblem

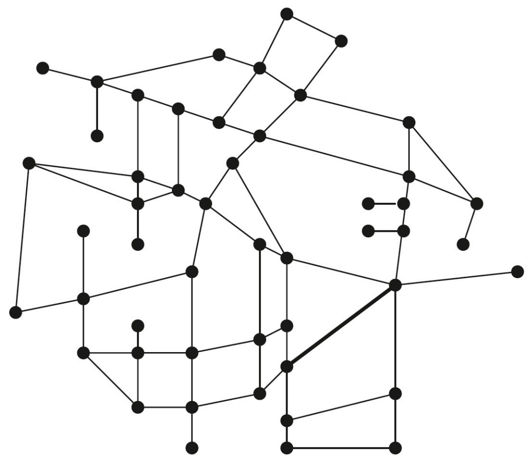


Eine Briefträgerin soll in diesem Gebiet Post austragen und es sollen dabei keine unnötigen Wege gegangen werden.

Welche Information ist für die Lösung der Aufgabe nötig?

Modellierung durch (Knoten-Kanten-)Graph





Kriterien:

(i) Jede Straße muss abgefahren werden.

(ii) Es muss eine Rundtour sein.

(iii) Der Gesamtweg muss möglichst kurz sein.

Grundidee: Modellierung, Begrifflichkeiten (hier Knoten-Kanten-Graph) wird anhand eines Alltagsproblems entwickelt

Eulertouren

Man könnte Glück haben und es gibt eine Rundtour (Eulertour) bei der jede Straße **genau einmal** abgefahren wird.

Ist das bei unserem Beispielgraphen möglichen? — Nein, schon alleine wegen der Sackgassen geht das nicht.

Was ist der Grad eines Knotens? — Anzahl der Kantenenden an einem Knoten.

Ein Graph kann nur eine Eulertour enthalten, wenn jeder Knoten geraden Grad hat: **Wenn immer man zu einem Knoten kommt, muss man auch wieder weggehen.**

Satz: Gibt es eine Eulertour, so haben alle Knoten geraden Grad. Umgekehrt: Ist ein Graph zusammenhängend und haben alle Knoten geraden Grad, so gibt es eine Eulertour.

Zwiebelschalenalgorithmus:

1. Wählen einen **Startknoten.**

2. Gehe von diesem Knoten aus entlang noch **unmarkierter Kanten** und markiere die verwendeten Kanten, solange bis ein Knoten erreicht wird, von dem **keine unmarkierte Kante mehr ausgeht.** Prüfe, ob alle Kanten des Graphen bereits markiert wurden.

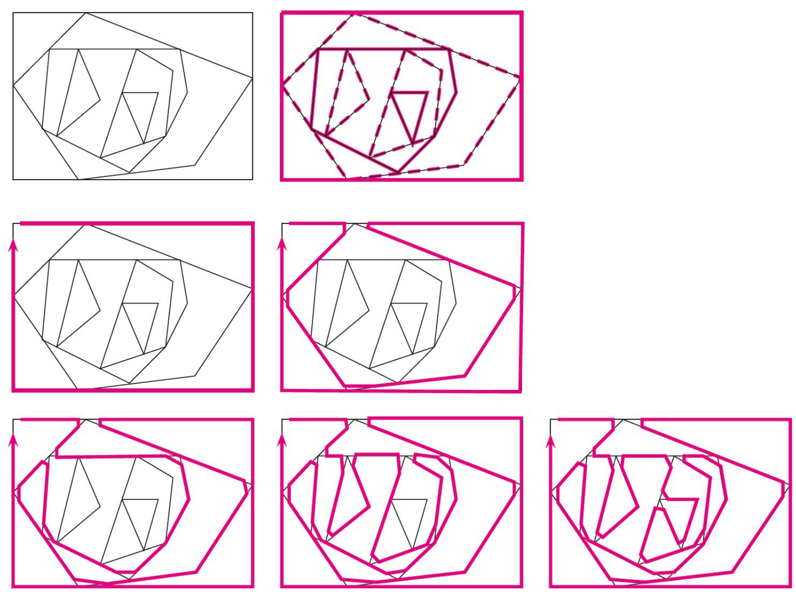
— Wenn ja, dann gehe zu Schritt 3.

— Wenn nein, dann suche einen Knoten, der noch unmarkierte Kanten besitzt und wiederhole Schritt 2.

3. Die Eulertour wird nun aus den Kreisen **zusammengesetzt:** Gehe entlang des ersten Kreises, bis er einen weiteren Kreis berührt. Folge dem neuen Kreis, bis dieser wiederum an einen nächsten Kreis stößt, und so weiter. Findest du keinen neuen beginnenden Kreis, so gehe den zuletzt begonnenen Kreis zu Ende und dann wieder in den vorherigen hinein. Und so weiter, bis alle Kanten besucht wurden.

Grundidee: Algorithmus

Veranschaulichung des Zwiebelschalenalgorithmus



Beispiel aus der Geometrie

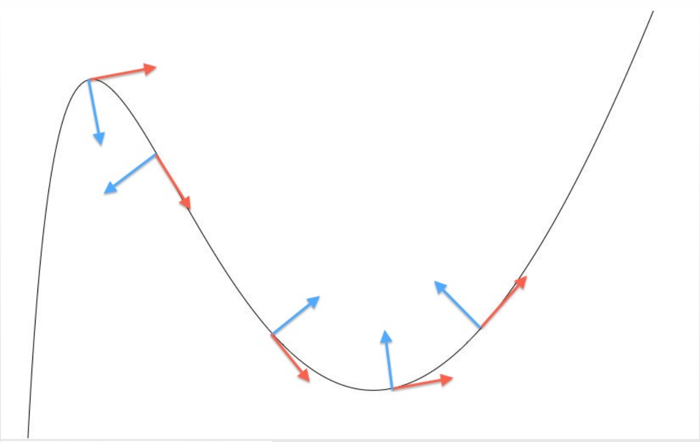
- **Krümmung als Kernbegriff der**

  modernen (Differential-)Geometrie

Krümmung als Kernbegriff der Differentialgeometrie

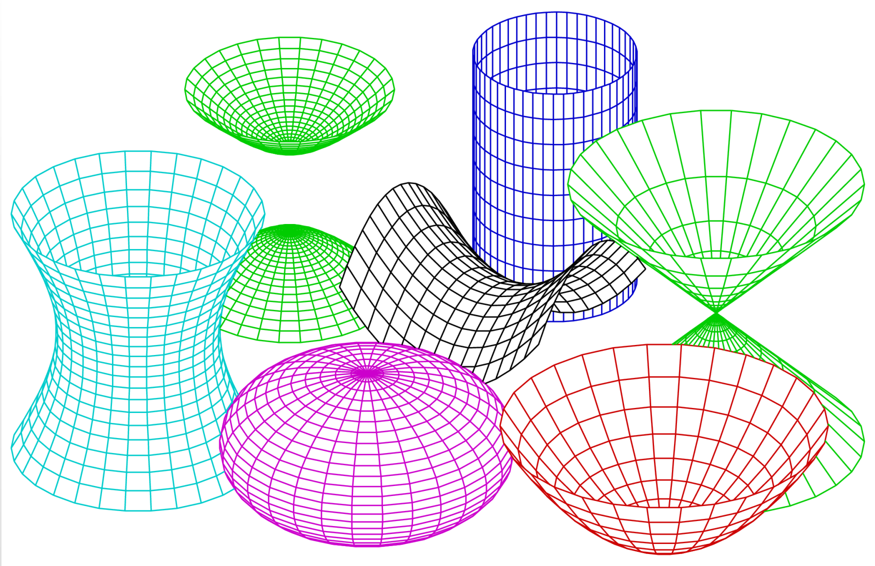
Was ist Krümmung?

Krümmung von Kurven



Abweichung von Gerader

Krümmung von Flächen



Abweichung von Ebene

Krümmung von Flächen

- Sind gekrümmte Flächen ungewöhnlich?
  Nein! Wir alle leben auf einer!

- Was sind die wichtigsten Effekte der Krümmung?

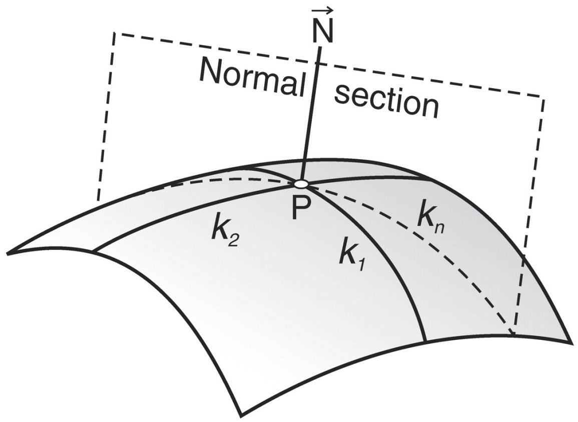
Experiment A: Klebeetiketten auf Flächen

(1) Kleben Sie eine Klebeetikette auf einen *Luftballon*, sodass die Etikette ohne zu verkanten aufliegt.
(2) Kleben Sie eine Klebeetikette auf eine *Schwimmnudel*, sodass die Etikette ohne zu verkanten aufliegt.

Experiment B: Kürzeste Verbindungen auf der Kugel

Ermitteln Sie mit einem Gummiringerl die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf dem Luftballon.

Erklärung: Klassische Geometrie von Flächen



In jedem Punkt gibt es eine Richtung mit

- *minimaler Krümmung* k_1
- *maximaler Krümmung* k_2

(Satz vom Maximum)

k_1, k_2 heißen *Hauptkrümmungen*

Theorema Egregium — **Carl Friedrich Gauß (1777–1855)**

Das Produkt der Hauptkrümmungen, die **Gauß-Krümmung** $\boxed{K = k_1 \cdot k_2}$ *ändert sich nicht* unter stetigen Verformungen.

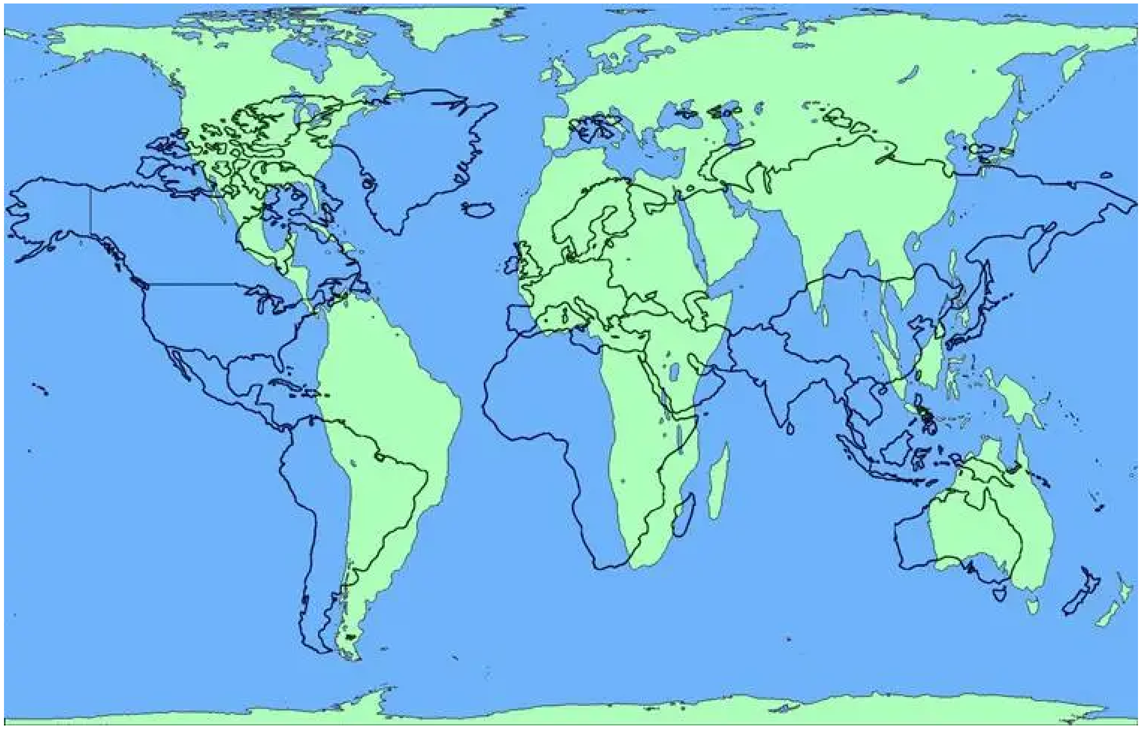
Konsequenzen: Teil der Ebene mit $K = 0$ (Klebeetikett) kann man

(1) **nicht** zum Teil einer *Kugel* mit $K = \frac{1}{r^2}$ (Luftballon) verformen.

(2) **sehr wohl** zum Teil eines Zylinders mit $K = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0$ (Schwimmnudel) verformen.

Weitere Konsequenzen

- Positiv: Pizzaschnitten essen ohne Patzen
  (Experiment C: lieber nicht...)
- Negativ: Es gibt **keine** winkel- **und** flächentreue Landkarte
  (Experiment D: Orangenschalen zerreissen)



Mercator vs. Gall-Peters Projektion

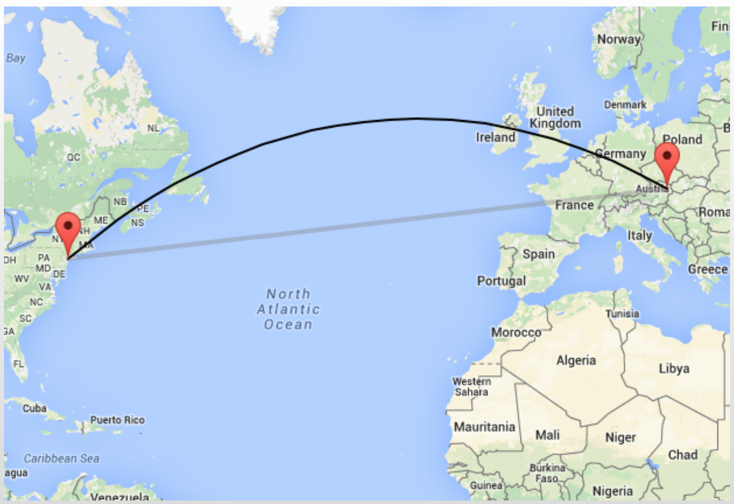
Erklärung: Kürzeste Verbindungen

Kürzeste Verbindungen sind

- keine Geraden mehr, sondern
- „möglichst gerade” Kurven auf der Fläche

und heißen **Geodäten**

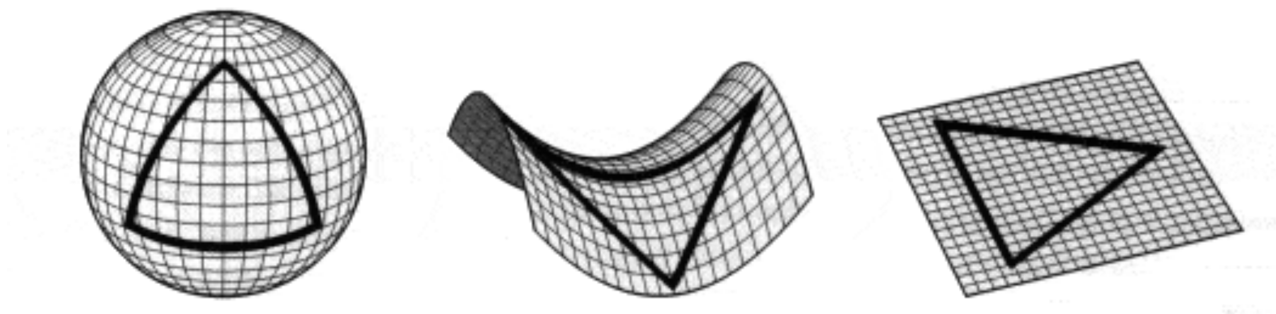
Geodäten auf der Kugel



- Geodäten sind **Großkreise**
- können sich **schneiden**
- **hören** dann **auf** kürzeste Verbindungen zu sein

Anschluss an aktuelle Forschung: Längenräume

Dreiecksvergleich
in pos./neg.
Krümmung



Positive Curvature Negative Curvature Flat Curvature

Satz von Toponogov (1958): $\boxed{K > 0 (< 0) \ \Leftrightarrow \text{ Dreiecke sind fett(dünn).}}$

Verallgemeinerung auf metrische Räume X (nur Abstandsmessung):
X hat per def. pos./neg. Krümmung wenn Dreiecke fett/dünn sind.

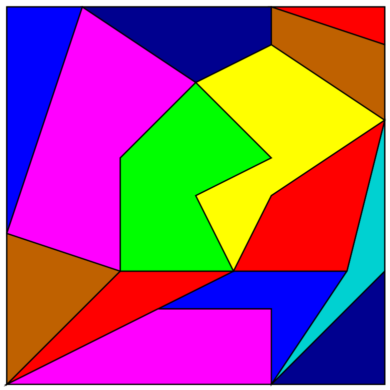
Metrische Geometrie: Diese Krümmungsschranken sind unter Grenzwerten von gekrümmten Flächen stabil.
(Gromov ab 1980; Perelman's Beweis der Poincare-Vermutung, 2003)

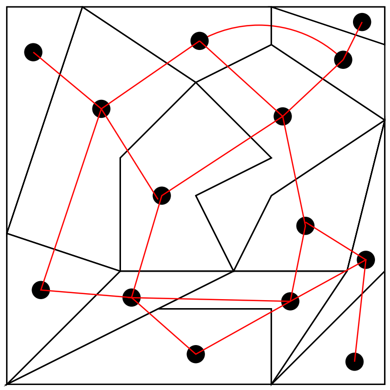
Noch ein Beispiel aus der Diskreten Mathematik:

Der Sechsfarbensatz

Färben von Landkarten

Schritt 1: Von der Landkarte zum Hauptstädtegraph





Die Hauptstädte von Ländern, die eine gemeinsame Grenze haben, werden durch eine Kante verbunden. Die Hauptstädte sind die Knoten des Graphs.

Der Grad deg(v) eines Knotens v ist die Anzahl der Kanten, die von einem Knoten ausgehen.

Um den Graphen algorithmisch mit 6 **Farben zu färben, würde es genügen, immer einen Knoten zu finden, dessen Grad höchstens** 5 **ist.**

Zwei Gleichungen und eine Ungleichung über solche Graphen

V = Anzahl der Knoten $\quad E$ = Anzahl der Kanten $\quad F$ = Anzahl der Gebiete

Eulersche Polyederformel: $V - E + F = 2$

Hinweis für den Beweis: Löscht man **eine** Kanten, die zwei Gebiete verbindet, verringert man die Anzahl der Gebiete auf um **eins**. Also $E \to E - 1$ führt zu $F \to F - 1$. Das kürzt sich in $-E + F$ in der Formel.

Eine Ungleichung: $2E \geq 3F$

Hinweis für den Beweis: Wandere durch alle Gebiet und zähle jeweils die Kanten, die es umrandet. In jedem Gebiet sieht man mindestens **drei** Kanten, daher zählt man insgesamt mindestens $3F$ Kanten. Andererseits sieht man jede Kante **zweimal**, weil man sie von zwei Seiten sieht, daher muss $3F$ kleiner oder gleich $2E$ sein.

Handschlaglemma: $\sum_{v \text{ Knoten}} \deg(v) = 2E$

Hinweis für den Beweis: Jede Kante hat **zwei** Endknoten.

Kombiniere die Eulersche Polyederformel und die Ungleichung:

$$2E \geq 3F = 6 + 3E - 3V$$

Daraus folgt $3V - 6 \geq E$ und daher $3V > E$.

Erinnern uns, dass wir zeigen wollen, dass es einen Knoten gibt, dessen Grad höchstens 5 ist.

Indirekt: Angenommen für alle Knoten v gilt $\deg(v) \geq 6$.

Nun verwenden wir das Handschlaglemma:

$$2E = \sum_{v \text{ Knoten}} \deg(v) \geq \sum_{v \text{ Knoten}} 6 = 6V$$

Also $E \geq 3V$ und das ist ein Widerspruch zu $3V > E$.

Anschluss an aktuelle Forschung: Der Vierfarbensatz wurde bisher nur mittels Computereinsatz bewiesen und daher nicht wirklich verstanden.

Mögliches Beispiel aus der Analysis/Stochastik/elementaren Logik

Kognitive Verzerrungen (Cognitive biases) nach Kahneman & Tversky

- Kognitive Verzerrungen sind meist unbewusste systematische Fehler in Wahrnehmung, Denken und Urteilen
- Lassen sich durch bewusstes logisches Denken mit mathematischen Hintergrund (Stochastik, Analysis) erkennen und vermeiden.
- Beispiele:
  - Prävalenzfehler (Base rate neglect, Vernachlässigung der Grundgesamtheit), z.B. Tests auf Krankheiten
  - Conjunction Fallacy: spezielle Bedingungen werden für wahrscheinlicher eingeschätzt als weniger spezielle Bedingungen
  - Linearity bias: Annahme, dass die Änderungen von Größen einander proportional sind.
  - Verfügbarkeitsheuristik: Bewertung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses von den leicht verfügbaren Beispielen geprägt

Danke für Ihre Aufmerksamkeit

Literatur

C. Ableitinger, S. Götz, R. Steinbauer, Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Grenzwertbegriff. Math. Didactica 45, 2022.

S. Hußmann, B. Lutz-Westphal (Hrsg.), *Diskrete Mathematik erleben.* 2.Aufl. Springer, 2014.

Grötschel, B. Lutz-Westphal, Diskrete Mathematik und ihre Anwendungen: Auf dem Weg zu authentischem Mathematikunterricht. Jahresber. DMV 11, 3–22, 2009.

Daniel Kahneman: *Schnelles Denken, langsames Denken.* Siedler Verlag, 2012

S. Pinker, *Rationality: What It Is, Why It Seems Scarce, Why It Matters.* Viking, 2021.