Stefan GÖTZ, Antonia SPANNAGL & Roland STEINBAUER,Wien

Grundvorstellungen zum Konzept der Differenzierbarkeit von angehenden Mathematiklehrer*innen

Kurzfassung: In diesem Beitrag wird eine empirische Studie vorgestellt, in der die vor und nach einer Intervention (Besuch einer didaktisch ausgerichteten Analysislehrveranstaltung) schriftlich geäußerten Vorstellungen von Mathematiklehramtsstudierenden zum Differenzierbarkeitsbegriff erhoben und klassifiziert werden (Prätest-Posttest-Design). Dazu werden sie Grundvorstellungen zugeordnet und die Qualität ihrer Passung beurteilt. Anschließend werden Zusammenhänge mit individuellen Merkmalen der Studierenden analysiert und die Antworten von Prä- und Posttest miteinander verglichen. Eine Steigerung der Anzahl der zuordenbaren Antworten kann festgestellt werden, allerdings müssen auch Defizite bei deren Qualität konstatiert werden. Folgerungen daraus für die Ausbildung der Mathematiklehramtsstudierenden werden abgeleitet.

Title: Basic mental models on differentiability of pre-service mathematics teachers

Abstract: This article presents an empirical study in which the written statements of pre-service math teachers on the notion of differentiability are collected before and after an intervention (attendance of a didactically oriented analysis course) and classified (pretest-posttest design). For this purpose, they are categorised into basic mental models and their quality is assessed. Correlations with student teachers' characteristics are analysed and their answers from the pretest and posttest are compared. An increase in the number of relatable answers can be observed, as well as a shift in their quality is also recognised. Corresponding conclusions are drawn for the training of pre-service mathematics teachers.

MSC: B50, C70, I40

Keywords: differentiability, basic mental models, teacher education

Einleitung

Ein zentrales Element der Lehramtsausbildung ist es, Studierenden belastbare Konzepte und Vorstellungen zu zentralen Begriffen der (Schul-)Mathematik zu vermitteln bzw. sie beim Aufbau dieser optimal zu unterstützen. In den Lehramtscurricula fehlt jedoch (oft) der Raum, um durch umfangreiches Operieren Erfahrungen zu sammeln und damit einen verständigen Umgang mit den Begriffen zu erreichen, wie es im Fachstudium (eher) üblich ist. Zusätzlich werden fortgeschrittene Themen (z. B. der Analysis, wie Funktionalanalysis) in der Lehramtsausbildung nicht (mehr) angesprochen, so dass oft die Sinnstiftung der Konzepte sowie ihre Einbettung in ihren natürlichen und motivierenden fachlichen Kontext zu kurz kommen. Damit im Einklang stehen empirische Erkenntnisse, dass Lehramtsstudierende zwar oft über formales Wissen verfügen, aber nur unzureichend entsprechende Vorstellungen aufbauen können: "Different investigations which have been carried out show only too clearly that the majority of students do not master the idea of a limit, even at a more advanced stage of their studies. This does not prevent them from working out exercises, solving problems and succeeding in their examinations!" (Cornu, 2002, p. 154).

In diesem Beitrag befassen wir uns speziell damit, welche Repräsentationen und inhaltlichen Bedeutungen Lehramtsstudierende mit dem Begriff der Differenzierbarkeit verbinden und wie sich diese Vorstellungen im Laufe der Ausbildung verändern. Dazu analysieren wir schriftliche Äußerungen von Studierenden zum Begriff einer differenzierbaren reellen Funktion vor und nach einer fachdidaktischen Intervention in Form einer Vorlesung mit angeschlossenen Übungen.

Theoretischer Rahmen

Um die in der Einleitung angesprochenen Äußerungen zu analysieren, bedienen wir uns des fachdidaktischen Begriffsapparats der Grundvorstellungen. Dieses Konzept ist im Kontext der deutschsprachigen Stoffdidaktik entstanden und wurde in seiner modernen Form in vom Hofe (1995) kanonisiert, siehe auch vom Hofe & Blum (2016). Ganz allgemein dient es als theoretische Basis zur Beschreibung der mentalen Repräsentationen mathematischer Begriffe und erfasst die Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und individuellen Begriffsbildungen. Damit steht eine differenzierte Terminologie zur Verfügung, die sowohl in der Unterrichtspraxis als auch in der fachdidaktischen Forschung breite Verwendung findet.

Explizit ist eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt (Greefrath et al., 2016, S. 17). Eine gelungene Sinnerfassung äußert sich unter anderem darin, dass dieser Begriff in konkreten Problemstellungen angewendet werden kann. Das wiederum setzt voraus, dass überhaupt erkannt wird, dass eine Indikation für diesen Begriff vorliegt.

Des Weiteren unterscheidet man zwischen universellen und individuellen Grundvorstellungen (Greefrath et al., 2016, S. 18 f.). Erstere sind Ergebnis einer fachdidaktischen Analyse und beantworten die Frage, was Lernende sich unter einem Begriff idealerweise vorstellen sollen. Damit sind universelle Grundvorstellungen normativ, individuelle Grundvorstellungen hingegen sind deskriptiv und beschreiben die Vorstellungen, die sich ein Lernender zu einem mathematischen Begriff tatsächlich und aufgrund eines individuell durchlaufenen Lernprozesses macht (vom Hofe, 1995, S. 123).

Mit dieser Terminologie lässt sich auch die Beziehung zwischen dem Grundvorstellungskonzept und dem in der fachdidaktischen Forschung weit verbreiteten Konzept von Concept Image und Concept Definition (Tall & Vinner, 1981) klären. Individuelle Grundvorstellungen können als Teil des Concept Images verstanden werden, für eine detailliertere Diskussion siehe etwa Weigand et al. (2017). Normative Grundvorstellungen stellen jenen Teil des Concept Images dar, der von der Fachwissenschaft allgemein akzeptiert ist. Die Concept Definition orientiert sich im Allgemeinen an der mathematischen Definition eines Begriffs, wie sie die Scientific Community verwendet. Sie kann eine (aber nicht die einzige!) Grundlage für eine normative Grundvorstellung oder für einen Teil einer solchen zu einem bestimmten Begriff bilden. In Ableitinger et al. (2022) wird ein Vorschlag gemacht, wie diese fachdidaktischen Konzepte zur Begriffsbildung und -verwendung in Zusammenhang gebracht werden können.

Das Erkennen und das Erfassen von Diskrepanzen zwischen universellen und individuellen Grundvorstellungen hat höchste Bedeutung für die Unterrichtspraxis: Sie bieten einen Ausgangspunkt für eine theoretisch fundierte Intervention im Lernprozess, die im besten Fall zu einer konstruktiven Auflösung der Diskrepanzen führt.

In unserer Untersuchung verwenden wir das Konzept der Grundvorstellungen als Werkzeug zur Klassifizierung und Beurteilung der Ausprägungsqualität der schriftlichen Studierendenäußerungen. Um ein Maß für die Ausprägungsqualität zu bekommen, bestimmen wir intersubjektiv den Grad der Übereinstimmung mit der entsprechenden universellen Grundvorstellung.

Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit

Um konkret die Grundvorstellungen zum Konzept der Differenzierbarkeit vorzustellen, führen wir noch die Terminologie des Aspekts eines mathematischen Begriffs ein: „Ein *Aspekt* eines mathematischen Begriffs ist ein Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann.“ (Greefrath et al., 2016, S. 17, Hervorhebung im Original). Ein Aspekt führt also das Konzept der Concept Definition weiter (Weigand et al., 2017, pp. 314-315). Wir weichen hier bewusst von der eben zitierten Terminologie ab, indem wir „charakterisieren“ durch „beschreiben“ ersetzen. Es ist unserer Ansicht nach in der Regel nicht möglich bzw. nicht wünschenswert, dass ein Aspekt den Begriff im mathematischen Sinn charakterisiert, also eine logisch äquivalente Formulierung darstellt, wenn er nur einen Teilbereich des Begriff(umfang)s erfasst.

Im Kontext unseres Beitrags liefert zum Beispiel der Aspekt „Grenzwert des Differenzenquotienten“ keine Charakterisierung der Differenzierbarkeit für reelle Funktionen in mehreren Variablen.

Für die Differenzierbarkeit einer reellen Funktion (in einer Variablen) liefert eine fachliche Analyse die folgenden beiden Aspekte: Limes des Differenzenquotienten und lokale lineare Approximation (Greefrath et al., 2016, S. 147). Ersterer bezieht sich auf die Definition der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten, zweiterer auf die fundamentale Idee der Ableitung als der lokalen linearen Bestapproximation. Letztere stellt das mathematisch wesentlich weitreichendere Konzept dar und dient als Kern der Verallgemeinerung das Ableitungsbegriffs etwa auf höher dimensionale Räume. So kann man z. B. die Differenzierbarkeit einer auf dem $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion mühelos durch die Approximation ihres Funktionsgrafen durch die Tangentialebene veranschaulichen, was eine unmittelbare und natürliche Verallgemeinerung der Vorstellung der Schmiegegerade im eindimensionalen Fall ist (Danckwerts & Vogel, 2006, Abschnitt 3.3.1; Eberle & Lewintan, 2019). Im Schulkontext und daher auch im Kontext der Lehramtsausbildung wird aber der erste Aspekt, der sich auf die fundamentale Idee der Änderungsrate bezieht, traditionell stärker betont (Greefrath et al., 2016, S. 155; Büchter & Henn, 2013, S. 134). Ob dieser Status quo einer modernen Interpretation des (Allgemein-)Bildungsauftrags des Mathematikunterrichts (Winter, 1995) tatsächlich gerecht wird, steht für die Autor*innen zumindest in Zweifel.

Die beiden Aspekte bilden die Basis für mehrere Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit, die ihrerseits wiederum in Hinblick auf einen oder beide Aspekte entwickelt werden können, siehe auch Abbildung 1. In der Literatur (Greefrath et al., 2016, Abschnitt 4.2; Greefrath et al., 2023) finden sich die folgenden vier Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit, die wir hier in unseren eigenen Worten ausformulieren.

- Die *Lokale Änderungsrate (AE)* liefert eine Interpretation der Ableitung als Grenzwert der mittleren Änderungsraten. Anders gesprochen wird die Ableitung einer Funktion in einem Punkt in Form des Differenzialquotienten als Limes der Differenzenquotienten in diesem Punkt verstanden.
- Die Grundvorstellung der *Tangentensteigung (TS)* deutet die Ableitung einer Funktion in einem Punkt als die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen in diesem Punkt. Dabei muss die Tangente als lokale Schmiegegerade (und nicht als globale Stützgerade) verstanden werden.

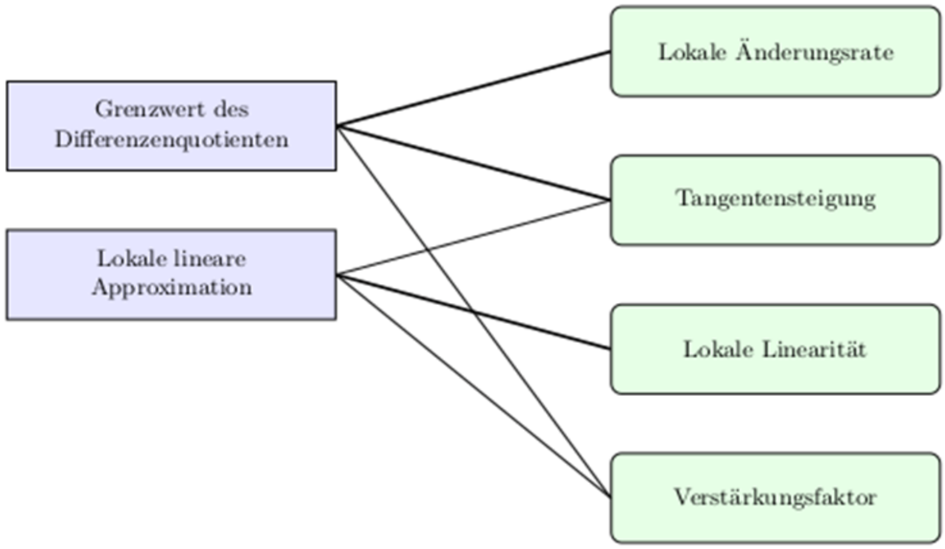

Abb. 1: Zusammenschau der Aspekte und Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit nach Greefrath et al. (2016, S. 147). Wir deuten die stärkeren inhaltlichen Verbindungen zwischen gewissen Aspekten und Grundvorstellungen durch dicke Linien an.

- Im Kontext der Grundvorstellung der *lokalen Linearität (LL)* wird eine in einem Punkt differenzierbare Funktion als in einer Umgebung des Punktes annähernd linear aufgefasst: näherungsweise ist die Änderung der abhängigen Variable Δy proportional zu Änderung der unabhängigen Variable Δx. Die Ableitung $y'(x)$ wird dann als Proportionalitätsfaktor dieser Änderung interpretiert, also $\Delta y = y'(x)\,\Delta x$. Damit ist auch die Vorstellung verbunden, dass beim Heranzoomen an eine Stelle der Differenzierbarkeit einer Funktion ihr Graph annähernd wie eine Gerade, also wie der Graph einer linearen Funktion, aussieht (Kirsch, 1979).
- Die vierte Grundvorstellung, der *Verstärkungsfaktor (VF)*, ist eng mit jener der LL verwandt und wird auch nicht durchgängig als eigenständige Grundvorstellung verstanden (Greefrath et al., 2016, S. 153). Ihr liegt die Frage zugrunde, wie sehr sich eine kleine Änderung der unabhängigen Variable auf die abhängige Variable auswirkt. Insofern kann sich diese Vorstellung sowohl auf die Ableitung einer Funktion in einem Punkt als auch auf ihre Differenzenquotienten in diesem Punkt (das heißt für Intervalle mit einer Grenze nahe diesem Punkt und die zweite Grenze in diesem Punkt) beziehen. Darüber hinaus kann sie als eine quantifizierte Version der Grundvorstellung „Vorhersagbarkeit" zum Stetigkeitsbegriff verstanden werden (Götz et al., 2023). Dieser Verbindung ist unseres Wissens in der fachdidaktischen Literatur bisher nicht nachgegangen worden, wäre aber einer Erörterung wert: siehe letzter Abschnitt.

Schließlich ergeben sich, wie aus der Beschreibung ersichtlich, die folgenden Verbindungen zwischen den Aspekten und Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit, siehe auch Abbildung 1. Der Aspekt Grenzwert des Differenzenquotienten wird umfassend in den beiden Grundvorstellungen AE und TS abgebildet und diese konstituieren zusammen mit VF (etwas schwächer) einen Sinnzusammenhang zu diesem Aspekt. Der zweite Aspekt der lokalen linearen Approximation ist eng mit der Grundvorstellung LL verbunden, es liegen aber auch (schwächere) gegenseitige Beziehungen zu VF und zu TS vor.

Forschungsinteresse

Das zentrale Thema unserer empirischen Untersuchung ist die Frage, welche Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit in welcher Qualität bei Studierenden des Unterrichtsfachs Mathematik für die Sekundarstufe vor (Prätest) und nach (Posttest) der Auseinandersetzung mit Grundvorstellungen in einer einschlägigen Lehrveranstaltung „Schulmathematik Analysis“ ausgeprägt sind.

Wir äußern erstens die Vermutung, dass die Anzahl der Äußerungen der Studierenden, die einer Grundvorstellung zugeordnet werden können, durch die Explizierung der Grundvorstellungen in der erwähnten Lehrveranstaltung in der Postuntersuchung höher ist als beim Prätest. Das sei Hypothese 1.

Da im Schulunterricht die Vorstellungen der Tangentensteigung und der Momentangeschwindigkeit für die Differenzierbarkeit einer Funktion gemäß dem (österreichischen) Lehrplan (https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe? Abfrage =Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568) vorherrschend sind, formulieren wir als Hypothese 2, dass die Ausprägungen der Grundvorstellungen „lokale Linearität“ und „Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen“ in den Antworten des Posttests in höherer Qualität vorhanden sind als in denen des Prätests. Diese beiden Grundvorstellungen werden in der Regel nur im universitären Studium thematisiert.

Um zu überprüfen, ob die im Studium bei den Prüfungen gezeigten Leistungen mit der Qualität der geäußerten Vorstellungen der Studierenden korrelieren, treffen wir als Hypothese 3 die Annahme, dass Studierende mit besseren Noten mehr Grundvorstellungen höherer Qualität explizieren als Studierende mit schlechteren Noten.

Methode

Die Stichprobe unserer Untersuchung umfasst Studierende, die im Studienjahr 2018/19 die zweistündige Vorlesung „Schulmathematik Analysis“ im Rahmen ihres Sekundarstufenlehramtsstudiums an der Universität Wien besuchten. Diese fachdidaktisch orientierte Vorlesung folgte auf die fünfstündige fachmathematische Ausbildung in Analysis und wurde vom Drittautor als

Fachmathematiker gemeinsam mit Evelyn Süss-Stepancik (Fachdidaktikerin, damals Pädagogische Hochschule Niederösterreich) neu konzipiert und gehalten. Die Grundkonzeption der Vorlesung bestand in einer an fachlichen Inhalten festgemachten Verknüpfung von fachmathematischen Facetten, fachdidaktischer Reflexion und unterrichtspraktischen Erwägungen. So wurden auch die Aspekte und die Grundvorstellungen zur Differentialrechnung vorgestellt und eingehend diskutiert.

Einem Prä-Post-Untersuchungsdesign folgend wurden mittels eines Fragebogens an die Studierenden, der zu Beginn und am Ende der Schulmathematik-Vorlesung auszufüllen war, Ergänzungen zum Satzanfang „Unter einer *differenzierbaren* Funktion stelle ich mir vor …“ (Hervorhebung im Original) erhoben. Diese Vorgangsweise stellt sicher, keine Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit den Befragten zu suggerieren (vgl. Greefrath et al., 2023; Monaghan, 2001). Es konnte eine verbundene Stichprobe vom Umfang $n = 59$ erhoben werden.

Die gegebenen schriftlichen Äußerungen wurden Grundvorstellungen zugeordnet und ihre jeweilige Qualität gemäß einer fünfstufigen Skala klassifiziert. Diese Skala kann mit der von Vela (2011, p. 22) verglichen werden. Die einzelnen Ausprägungen sind:

- 0 … normative GV ist nicht vorhanden
- 1 … normative GV ist unspezifisch / naiv
- 2 … normative GV ist schwach ausgeprägt bzw. ungenau formuliert
- 3 … normative GV ist vorhanden, aber nicht korrekt formuliert
- 4 … normative GV ist klar ausgeprägt und adäquat ausgedrückt

Exemplarisch geben wir für die Grundvorstellung „Änderungsrate“ erhobene Studierendenäußerungen zu jeder Qualitätsstufe an (Ankerbeispiele):

- 1: „eine Funktion deren links- und rechtsseitiger Grenzwert gegen den gleichen Wert konvergieren an jeder Stelle des Definitionsbereichs“
- 2: „Eine Funktion, deren Ableitung den gleichen Wert besitzen, wenn man von beiden Seiten an x_0 annähert“
- 3: „ich kann dort momentane Steigung messen“
- 4: „eine Funktion deren Steigung an jeder Stelle bestimmbar ist“

Bei Äußerungen, für die die Qualität der Zuordnung nicht klar gewesen ist, führte eine Diskussion im Autor*innenteam jeweils zu einer einhelligen Bewertung (intersubjektive Übereinstimmung).

Die Ergebnisse der Zuordnungen werden mithilfe von deskriptiven Statistiken beschrieben.

Des Weiteren wird der Zusammenhang mit den universitären Leistungen (Note auf das Kolloquium der Fachvorlesung) einerseits und der Nachhilfeerfahrung (dichotom: 0 … keine Erfahrung, 1 … Erfahrung) der Studierenden andererseits untersucht. Dazu werden Korrelationsanalysen für ordinalskalierte Daten durchgeführt (Rangkorrelationskoeffizient τ nach Kendall). Schließlich werden die Antworten der beiden Fragebögen verglichen, um etwaige Veränderungen der Ausprägungen und der Anzahlen der Grundvorstellungen durch die Auseinandersetzung der Studierenden mit den fachdidaktischen Konzepten zu ermitteln (Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test).

Um Effekte über beide Erhebungen zu vergleichen, wird das untersuchte Merkmal „Qualität der Äußerungen" als quasistetig angenommen (Bamberg et al., 2012, S. 7) und Hedges g zur Berechnung der Effektstärke wegen der kleinen Stichprobengrößen verwendet. Von kleinen Effektstärken spricht man bei g-Werten mit Beträgen von 0.2 bis 0.5 (Intervall rechts offen), von mittleren mit Beträgen von 0.5 bis 0.8 (detto) und von großen mit Beträgen von 0.8 bis 1. Für die Effektstärken der festgestellten Korrelationen halten wir fest: für $0.1 \leq |\tau| \leq 0.3$ gelten die Korrelationen als schwach, für $0.3 < |\tau| \leq 0.5$ sind mittlere Korrelationen der Fall und $|\tau| > 0.5$ weist auf starke Korrelationen hin.

Ergebnisse

Die Auswertung der Antworten der 59 Testpersonen (verbundene Stichprobe) erfolgt sowohl mit als auch ohne die Äußerungen mit Codierung 0, weil eine Veränderung der Anzahl der „Nicht-Antworten" auch eine gewisse Aussagekraft besitzt.

Bei der Auswertung des Prätests konnte keine der 59 Antworten mehr als einer Grundvorstellung zugeordnet und sieben wurden genau einer zugeteilt: drei wurden als der Änderungsrate, drei als der Tangentensteigung und eine als dem Verstärkungsfaktor zugehörend interpretiert.

Beim Posttest konnten wesentlich mehr Äußerungen einer Grundvorstellung zugeordnet werden: elf Aussagen betreffen die Grundvorstellung lokale Änderungsrate, 16 die Tangentensteigung, keine betrifft die lokale Linearität und eine den Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen. Auch im Posttest konnte bei keinem schriftlichen Statement mehr als eine Grundvorstellung festgestellt werden. Die Verteilung auf die einzelnen Kategorien der Grundvorstellungen hat sich allerdings nicht signifikant verändert.

Äußerungen, die mit „0" bewertet wurden, waren entweder fehlerhaft, oder es wurde bloß die Definition von Differenzierbarkeit wiedergegeben, manche haben redundant „…, wenn sie ableitbar ist" formuliert, oder es wurde allein die

Stetigkeit der Funktion erwähnt oder nur das Aussehen des Graphen beschrieben.

Im Prätest wurde eine Äußerung mit Qualitätsstufe 1 festgestellt (zum Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen) und jeweils drei mit Ausprägungen 3 (zwei zur lokalen Änderungsrate und eine zur Tangentensteigung) und 4 (eine zur lokalen Änderungsrate und zwei zur Tangentensteigung). Im Posttest konnten fünf Antworten der Qualitätsstufe 1 (vier zur lokalen Änderungsrate und eine zur Tangentensteigung) zugeordnet werden, neun der Ausprägung 2 (sechs zur lokalen Änderungsrate und drei zur Tangentensteigung), zwölf der Qualitätsstufe 3 (eine zum Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen, eine zur lokalen Änderungsrate und zehn zur Tangentensteigung), und zwei der Ausprägung 4 (beide zur Tangentensteigung): Abbildung 2. Die im Prä- und Posttest singuläre Aussage, die auf die Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors schließen lässt, stammt nicht von derselben Person.

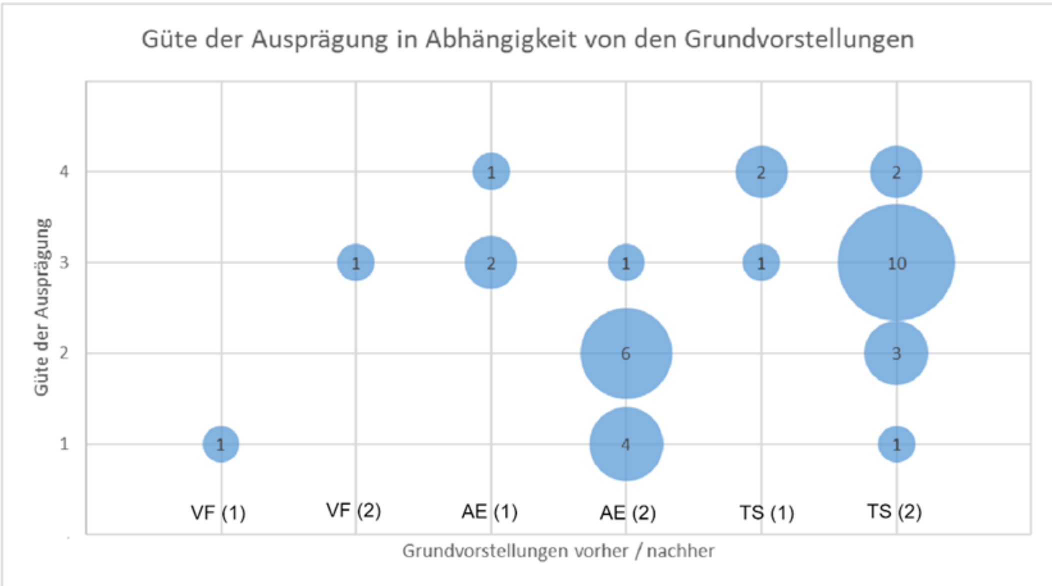

Abb. 2: Auftreten und Qualität der Äußerungen zu den Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit im Prä- (1) und im Posttest (2) ohne „0“

Betrachten wir die einzelnen Grundvorstellungen getrennt, so ergibt sich folgendes Bild: Während die lokale Linearität sowohl im Prä- als auch im Posttest nicht auftritt und die Aussage zum Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen sich verbessert hat, sind die Antworten zur lokalen Änderungsrate im Mittel schlechter geworden. Obwohl statt drei Aussagen vor der Vorlesung nach der Vorlesung elf in diese Kategorie eingeordnet werden können, gibt es keine mehr, die klar ausgeprägt ist und nur noch eine, die die Ausprägung 3 hat. Zehn der Antworten fallen in die erste und zweite Ausprägung, welche entweder eine unspezifische oder schwach ausgeprägte Grundvorstellung darstellt. Die

Anzahl der Antworten zur Tangentensteigung hat sich ebenfalls vergrößert. Die Anzahl der Aussagen mit Ausprägung 4 ist gleichgeblieben, jedoch sind bei den anderen Ausprägungen 13 Antworten hinzugekommen.

Die quantitative Auswertung ergibt, dass in drei Fällen der Auswertung ohne Berücksichtigung der „0"-Werte eine Veränderung der Mittelwerte der Qualitätsstufen signifikant ist, wobei wir ein unübliches Signifikanzniveau von 0.1 festsetzen (Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test). Dies begründen wir mit der geringen Anzahl von auswertbaren Antworten. Aus diesem Grund geben wir auch Hedges g an. Eine große Effektstärke kann bei den Aussagen insgesamt festgestellt werden, wenn wir also nicht nach Grundvorstellungen differenzieren ($g = -0.80, p = 0.05007$). Besonders groß ist der Effekt bei den Antworten, die der Änderungsrate zugeordnet werden konnten ($g = -2.37, p = 0.0134$). Auch für die Tangentensteigung ist der Effekt groß ($g = -1.11, p = 0.0690$). Somit zeigen alle Ergebnisse großer Effektstärke Verschlechterungen des Durchschnitts in der Postuntersuchung auf.

Berücksichtigt man auch die Antworten der Qualitätsstufe „0", können sehr wohl auch Verbesserungen konstatiert werden. Für die Äußerungen insgesamt ergibt sich eine hochsignifikante kleine positive Änderung ($g = 0.27$, $p < 0.001$). Für die Änderungsrate ist ebenfalls eine signifikante kleine Verbesserung zu verzeichnen ($g = 0.20, p < 0.05$). Ein mittlerer positiver hochsignifikanter Effekt zeigt sich bei den Antworten, die der Tangentensteigung zugeordnet werden konnten ($g = 0.51, p < 0.01$).

Die Auswertung einer Korrelationsanalyse unter Berücksichtigung der Äußerungen mit Ausprägung 0 im Prätest hat ergeben, dass die Nachhilfeerfahrung einen schwachen, negativen signifikanten Einfluss ($\tau = -0.1596, p = 0.0148$) auf die Ausprägung der Grundvorstellungen insgesamt hat. Das bedeutet, je größer die Nachhilfeerfahrung ist, desto geringer ist die Ausprägungsqualität der Äußerungen.

Speziell für die Äußerungen zur Tangentensteigung ist ebenfalls ein signifikanter schwacher Einfluss der Nachhilfeerfahrung feststellbar, der wiederum negativ ist ($\tau = -0.2701, p = 0.0403$).

Die Vorlesungsnote hat einen schwachen negativen signifikanten Zusammenhang mit den Ausprägungen der Grundvorstellung lokale Änderungsrate ($\tau = -0.2895$, $p = 0.03208$). Das heißt, dass die Ausprägung dieser besser wird, je besser die Vorlesungsnote ist.

Wenn die Äußerungen der Ausprägung 0 nicht berücksichtigt werden, sind keine signifikanten Korrelationen aufgetreten. Da in den Datensätzen der Postuntersuchung ebenfalls keine signifikanten Korrelationen zwischen der

Ausprägung und einem Merkmal (Nachhilfeerfahrung, Vorlesungsnote) existieren, können die Korrelationen im Prätest auch nicht mit jenen im Posttest verglichen werden.

Diskussion

Die deutliche Änderung der Anzahl – nämlich eine Vervierfachung (von sieben auf 28) – der festgestellten Äußerungen, die wenigstens einer Grundvorstellung zugeordnet werden konnten, von der Prä- zur Postuntersuchung zeigt eine Wirkung der Intervention (Schulmathematik-Vorlesung Analysis), womit Hypothese 1 als bestätigt angesehen werden kann. So konnte im Posttest annähernd die Hälfte der Testpersonen zumindest eine auswertbare Antwort zur Vorstellung der Differenzierbarkeit einer Funktion geben. Allerdings geht die Zunahme der Quantität auf Kosten der Qualität, wenn man sich auf die einer Grundvorstellung zuordenbaren Antworten beschränkt. Eine mögliche Interpretation dieses Befundes lautet, dass die Studierenden in der Schulmathematik-Vorlesung erstmals mit dem Konzept der Grundvorstellungen explizit und implizit konfrontiert worden sind, sodass die deskriptiven Vorstellungen aufgrund mangelnder Erfahrung noch schwach ausgeprägt sind.

Sowohl im Prä- als auch im Posttest konnte jeweils nur eine Aussage der Grundvorstellung Verstärkungsfaktor zugeordnet werden, wobei sich die Qualität der Äußerung vom Prä- zum Posttest gesteigert hat, die Grundvorstellung lokale Linearität ist gar nicht angesprochen worden, dieser Befund spricht nicht gegen die Gültigkeit von Hypothese 2.

Interessanterweise korreliert die Vorlesungsnote (negativ) mit der Ausprägungsqualität der Äußerungen im Prätest, das stützt Hypothese 3. Eine Vermutung dazu ist, dass zumindest implizit in der Fachvorlesung oder im selbst erlebten Unterricht als Schüler*in Hinweise zu den verschiedenen Interpretationen der Differenzierbarkeit einer reellen Funktion gegeben wurden, die leistungsstarke Studierende wiedergeben können. Dagegen spielen diese Vorstellungen beim Nachhilfeunterricht in unserer Untersuchung keine positive Rolle. Eine vermutete Konzentration auf das Kalkül konterkariert die Ausprägung von Grundvorstellungen mit akzeptabler Ausprägungsqualität.

Natürlich sind unserer Studie auch Limitationen gesetzt: Hätten wir nach der „Ableitung“ statt nach einer differenzierbaren Funktion gefragt, wären durch diese vertrautere Formulierung eventuell mehr Äußerungen getätigt worden, die wir einer oder mehreren Grundvorstellungen zuordnen hätten können. Des Weiteren verleitet der von uns gewählte Ansatz „Unter einer differenzierbaren Funktion stelle ich mir vor …“ nicht dazu, mehrere Assoziationen zu nennen (vgl. Greefrath et al., 2023). Schließlich muss erwähnt werden, dass ein direkter

Zugriff auf vorhandene Grundvorstellungen bei den Studierenden (auf diese Weise) nicht möglich ist. Es sind bloß Äußerungen der Befragten, die wir klassifiziert haben, wir haben nicht ihre Grundvorstellungen selbst erhoben. Allerdings ist es für zukünftige Lehrende essenziell, was und wie sie sich (verbal und schriftlich) äußern, insofern fokussiert unsere Untersuchung auf für die spätere Unterrichtspraxis relevante Aspekte.

Conclusio und Ausblick

Das de facto-Fehlen der Grundvorstellungen Verstärkungsfaktor und lokale Linearität motiviert uns, Aufgaben zu entwickeln und vorzuschlagen, die auf diese beiden Grundvorstellungen abzielen (Bingolbali & Monaghan, 2008, p. 24).

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist eines der prominentesten Resultate der (eindimensionalen) Analysis. Üblicherweise wird er wie in Abbildung 3 illustriert.

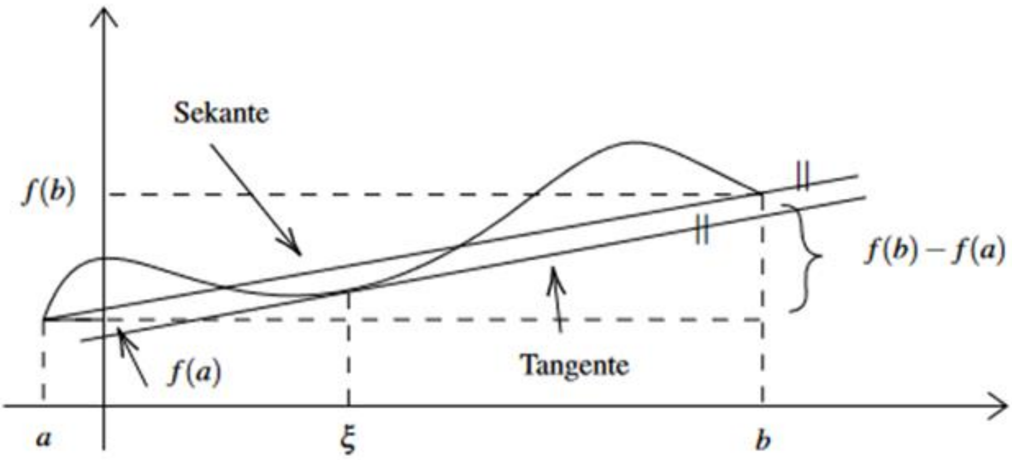

Abb. 3: Zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung – die Tangente liegt parallel zur Sekante (Steinbauer, 2022, S. 168)

Seine Formulierung lautet auch dementsprechend: Für eine hinreichend differenzierbare Funktion $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ gibt es mindestens ein $c \in (a;b)$, so dass

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

gilt. Geometrisch gedeutet bedeutet dies, dass die Sekantensteigung an mindestens einer Stelle zwischen a und b als Steigung der Tangente am Funktionsgraph auftritt (Abbildung 3). Viel öfter wird der Satz aber in der Form

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \cdot (b - a)$$

angewendet. Der Wert der Ableitung an der Stelle c ist ein Maß für das Verhältnis der Differenz der Funktionswerte zur Differenz der Argumente. In Götz & Hofbauer (2013) wird das Konvergenzverhalten von fortlaufenden Potenzen

$a^{a^{a^{\cdots}}}$ für $a > 0$ untersucht. Der Mittelwertsatz entpuppt sich dabei als ein zentrales Werkzeug zur Abschätzung eben solcher Differenzen.

Ein einfaches Beispiel für eine Abschätzung mit Hilfe des Mittelwertsatzes ist ein Beweis der bekannten Ungleichung $\sin x \leq x$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Betrachten wir die Hilfsfunktion f mit $f(t) = \sin t$ auf dem Intervall $[0; x]$, so gilt nach dem Mittelwertsatz $f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x} = \cos c \leq 1$ für ein $c \in (0; x)$.

Eine Grundvorstellung von Stetigkeit einer reellen Funktion ist die Vorhersagbarkeit: **„**Kleine Änderungen der unabhängigen Werte haben nur kleine Änderungen der abhängigen (Funktions-)Werte zur Folge. **[…]“** (Greefrath et al., 2016, S. 141). Der Mittelwertsatz quantifiziert diese Vorstellung, die zugehörige Grundvorstellung ist jene des Verstärkungsfaktors, die auch im Sinne einer Verminderung gemeint sein kann.

Danckwerts & Vogel (2006, Abschnitt 3.3.2) bringen eine Fülle von Beispielen für die Anwendung der lokalen Linearisierung. Die Herleitung der Produktregel für das Differenzieren mit Hilfe einer Formalisierung dieser Vorstellung beeindruckt (ebd., S. 77 f.). Die dabei verwendete Darstellung $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + r(h)$ mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ einer differenzierbaren Funktion f kommt fast ohne Bruch aus (ebd., S. 72). In der Lehrbuchliteratur ist es auch durchaus üblich, die Kettenregel mit dieser Methode zu beweisen (z. B. Deiser, 2011, S. 225 f.).

Wir geben im Folgenden noch zwei Hinweise, wie die Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors und der lokalen Linearität zur Differenzierbarkeit einer reellen Funktion in der Ausbildung der Studierenden angesprochen und herausgestrichen werden kann.

Eine ähnliche Überlegung wie eben führt auf die Lösung folgender Übungsaufgabe zur Betonung der Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors (Danckwerts & Vogel, 2006, S. 74): Geben Sie unter Verwendung der Ableitung der Wurzelfunktion eine Näherung für $\sqrt{8.92}$ an! Wie gut ist diese Näherung? Die Formel $f(x + h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \mathrm{o}(h^2)$ führt mit der Funktion $f\colon f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, und $x = 9$ auf die Abschätzung

$$\sqrt{8.92} = \sqrt{9 - 0.08} \approx \sqrt{9} - \frac{1}{6} \cdot 0.08 \approx 2.9867,$$

was sich erst in der fünften Nachkommastelle vom exakten Wert unterscheidet. Schließich stellt die folgende Übungsaufgabe (mit detaillierter) Anleitung direkt einen Zusammenhang zwischen der Tangentenvorstellung und der lokalen

Linearisierung her: Abbildung 4 und Abbildung 5 vom Drittautor nach Danckwerts & Vogel (2006, S. 72 f.).

$\boxed{2}$ *Die Tangente als „beste" Gerade—warum* $\frac{r(h)}{h} \to 0$*?*
Ziel dieser Aufgabe ist es (noch einmal und explizit) zu sehen, in welchem präzisen Sinne die Tangente die bestapproximierende Gerade an eine differenzierbare Funktion ist und was das mit der besonderen Eigenschaft des „Fehlers" $\frac{r(h)}{h} \to 0$ aus Vo. Thm. 3.1.21 zu tun hat, vgl. auch Bem. 3.1.22.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $\xi \in \mathbb{R}$. Zeige bzw. bearbeite nacheinander die folgenden Punkte:

(a) Jede Gerade g durch $(\xi, f(\xi))$ ist von der Form $g(x) = f(\xi) + \alpha(x - \xi)$.

(b) Gib den Fehler $r(h) = f(\xi + h) - g(\xi + h)$ der Approximation von f durch die Gerade g explizit in Termen von f und α an.

(c) Es gilt $r(h) \to 0$ für $h \to 0$.
Anmerkung. Der Witz ist hier, dass die Aussagen für *jede* Gerade g durch $(\xi, f(\xi))$ gilt! Außerdem bleibt die Aussage richtig, falls f nur stetig in ξ ist.

(d) Es gilt $\frac{r(h)}{h} \to 0$ $(h \to 0)$ genau dann, wenn g die Tangente an f in ξ ist (d.h. falls $\alpha = f'(\xi)$ ist).

(e) Fertige eine Skizze an.

Abb. 4.: Übungsaufgabe zur lokalen Linearität

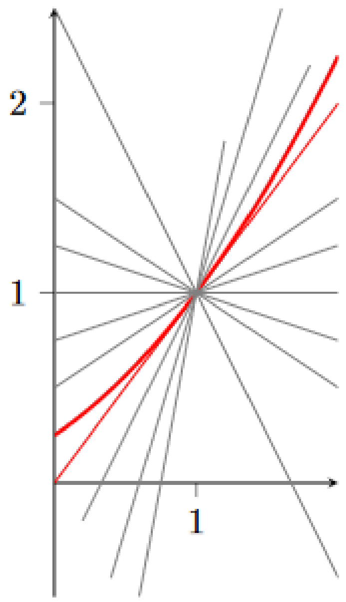

Abb. 5: Die Tangente als Bestapproximierende im „Geradenbüschel" durch einen Punkt (Steinbauer, 2023, S. 122)

Literatur

Ableitinger, C., Götz, S. & Steinbauer, R. (2022). Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Grenzwertbegriff. *Mathematica Didactica, 45.* http://doi.org/10.18716/ojs/md/2022.1620

Bamberg, G., Baur, F. & Krapp, M. (2012). *Statistik* (17., überarbeitete Auflage). Oldenbourg Verlag.

Bingolbali, E. & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics, 68*, 19–35. http://doi.org/10.1007/s10649-007-9112-2

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2013). Kurve, Kreis und Krümmung – ein Beitrag zur Vertiefung und Reflexion des Ableitungsbegriffs. In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns & G. Wickel (Hrsg.), *Mathematik verständlich unterrichten* (S. 133–146). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-00992-2_9

Cornu, B. (2002). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153–166). Mathematics Education Library, Vol. 11. Kluwer Academic Publishers. http://dx.doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Spektrum Akademischer Verlag.

Deiser, O. (2011). *Analysis 1*. Springer.

Eberle, S. & Lewintan, P. (2019). Ein Vorschlag zur konsistenten Einführung der Ableitung mit der Zoom-in-Methode. *Mathematische Semesterberichte, 66,* 203–217. https://doi.org/10.1007/s00591-019-00250-7

Götz, S. & Hofbauer, F. (2013). Die Exponentialfunktion als dynamisches System. *IMN,* Nr. 223, *67.* Jahrgang, 21–35. Erratum in *IMN*, Nr. 226, *68*. Jahrgang, 68. http://www.oemg.ac.at/IMN/imn223.pdf, http://www.oemg.ac.at/IMN/imn226.pdf

Götz, S., Spannagl, A. & Steinbauer, R. (2023). Perceptions of continuity of pre-service teachers in Austria. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 3403–3410). Alfred Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/CERME13/hal-04421619v1

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2023). Mathematics Students' Characteristics of Basic Mental Models of the Derivative. *Journal für Mathematik-Didaktik, 44(1),* 143–169. https://doi.org/10.1007/s13138-022-00207-9

Kirsch, A. (1979). Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. *Der Mathematikunterricht*, *25*/*3*, 25–41.

Monaghan, J. (2001). Young Peoples' Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 239–257. https://doi.org/10.1023/A:1016090925967

Steinbauer, R. (2022). *Analysis für das Lehramt. Eine Einladung*. Skriptum zur Vorlesung „Analysis in einer Variablen für das Lehramt“. https://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/SoSem22/ana-lak-2022-06-17

Steinbauer, R. (2023). *Schulmathematik Analysis. Vorlesungsskriptum.* https://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/SoSem22/smana-gesamt-2023-01-17.pdf

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Vela, M. (2011). *A snapshot of advanced high school students´ understanding of continuity.* ProQuest LLC.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akademischer Verlag.

vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). "Grundvorstellungen" as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(supplement issue 1), 225–254. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3

Weigand, H.-G., Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S. & Ulm, V. (2017). Aspects and basic mental models ("Grundvorstellungen") of basic concepts of calculus. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 313–320). PME. http://www.igpme.org

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 37–46. https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/69