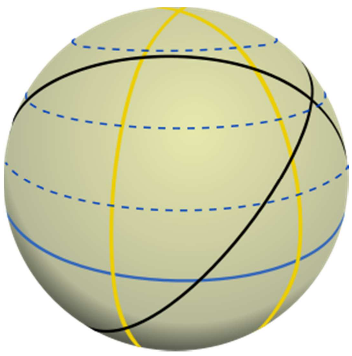
# I. Sphärische Geometrie in der Mathematik

Geometrie kommt eigentlich aus dem griechischem und bedeutet „bemessen der Welt“. So konnten schon im alten Griechenland die Ackerflächen fair berechnet werden. Auch Euklid beginnt im Jahre 300 vor Christus im Buch „The Elements“ zu erst mit der ebenen Geometrie. Doch mit den frühren astorwissenschaften und durch die Errungenschaft die Zeit mittels der Sonne zu berechnen begann man mit der sphärischen Geometrie.

Die Sphärische Geometrie ist ein Teilbereich der Mathematik, der sich mit der Geometrie auf der Kugel, auch Sphäre genannt, beschäftigt. Wo in der Ebenen Geometrie konzentriert man sich auf Geraden und Punkte. Nun wollen wir aber wissen, was Punkte und Geraden in einer Sphäre wären.

Definition: Großkreise:
Der Großkreis einer Kugel mit Mittelpunkt M und Radius r ist ein Kreis, der denselben Mittelpunkt und Radius wie die Kugel besitzt.



Quelle: wikipedia

Der Äquator wäre somit der einzige Breitengrad, welcher auch ein Großkreis wäre.

Wir können also Vergleichen, dass Großkreise Geraden in der Ebene wäre und verschanschaulich, dass sich parallele Geraden(Großkreise) somit in den podalen Punkten Schneiden

Frühere Geometriker, meinten dass diese Großkreise den Geraden in der Ebene der Ebene am nächsten kommen. So zum Beispiel werden 2 Punkte welchen nicht podal voneinander liegen nur mit einem Großkreis aufgefasst.
Fassen wir nun Großkreise als Graden auf, so können wir den Winkel zweier schneidender Großkreise messen. Und zwar nehmen wir dazu jene ebene Tangenten welche wir am Schnittpunkt auf den jeweiligen Großkreis aufstellen.

Bild Abb1

Mit dieser Möglichkeit können wir ein Dreieck auf der Sphäre definieren. wobei die Innenwinkel Summe ist demnach größer als 180° somit größer als pi. Das werden wir als erstes Überprüfen:
Wir wissen (es fällt vom Himmel)

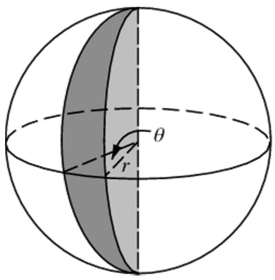
-) Die Fläche der Kugel wäre $4 * pi * R^2$
-) Die Vereinigung der Fläche von nichtüberlappenden Regionen = die Summe von derren Flächen
-)die Fläche von kongruneten Flächen sind gleich groß

**-)Das Verhältnis der Fläche** zwischen zwei Großkreisen zur gesamten Kugeloberfläche, verhält sich so wie der Winkel zwischen den zwei Großkreisen zu 2pi

Die Fläche von einem Dreieck ist definiert mit ABC = $R^{2(\alpha+\beta+\gamma-pi)}$ Man sieht gleich, weil eine Fläche größer sein muss als 0, das alpha-beta-gamma in Summe größer sein muss als pi.

Das wollen wir beweisen:

Dazu brauchen wir zuerst ein Kugelzweieck (english lune), welches die Fläche zwischen zwei Großkreisen und den 2 schneidenden antipodalen Punkten einschließt. Dieses wird mit dem Winkel vom Zentrum aus aufgespannt ! **Woher weis ich wo ich den Winkel ansetzen muss?**




Wiederholung:
**-)Das Verhältnis der Fläche** zwischen zwei Großkreisen zur gesamten Kugeloberfläche, verhält sich so wie der Winkel zwischen den zwei Großkreisen zu 2pi

Somit gilt: $$Fläche_{Kugelzweieck}:Fläche_{Kugel} = \Theta:2\pi$$

Einsetzen:

$$Fläche_{Kugelzweieck} : 4\pi R^2 = \Theta:2\pi$$

Ergibt:

$$Fläche_{Kugelzweieck} = \frac{\Theta}{2\pi} * 2R^2\pi = 2\Theta R^2$$

Ein Kugeldreieck entsteht nun wenn man 3 Großkreise schneidet und es entstehen 8 Kugeldreiecke:

- Kugeldreieck ABC
- Gegendreieck $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
- Nebendreiecke $A\overline{B}C$, $AB\overline{C}$, $BC\overline{A}$
- Scheiteldreiecke $\overline{A}B\overline{C}$, $\overline{A}\,\overline{B}C$, $A\overline{B}\,\overline{C}$

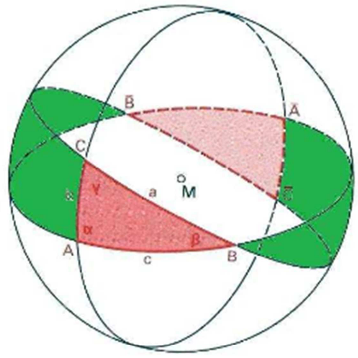



*Abbildung 4 Allgemeines Kugeldreieck*

Nun die eigentliche Frage über den Flächeninhalt eines Dreiecks.
Man sieht schön, dass das rote Dreieck ABC und das grüne Dreieck ACB ergeben ein Kugelzweieck. Wenn wir dies weiterführen und jedes Kugeldreieck mit einem Gegendreieck verbinden erhalten wir 6 Kugelzweiecke. Wenn wir all diese Flächen verbinden, ist diese aber um 4 Kugeldreiecke größer als die Gesamtoberfläche. Ich muss daher 4mal diese Fläche abziehen.

$$4\pi R^2 = (\,2 * 2\alpha R^2 + 2 * \,2\beta R^2 + 2 * 2\gamma R^2) - \,4 * Fläche_{ABC}$$

$$4 * Fläche_{ABC} = 4\alpha R^2 + \,4\beta R^2 + 4\gamma R^2 \,- 4\pi R^2$$

$$Fläche_{ABC} = \alpha R^2 + \,\beta R^2 + \gamma R^2 \,- \pi R^2$$

$$Fläche_{ABC} = R^2(\alpha + \,\beta + \gamma - \pi)$$

Nun sieht man, dass die Summe von $\alpha + \,\beta + \gamma - \pi$ größer ist als pi (180°) und somit größer als in der euklidischen Geometrie. Diesen Überschuss nennt man spährischen Excess. Wenn der Radius der spähre ganz groß wäre und das Dreieeck minimalst, wie so ein Geodreieck, dann geht der Ausdruck gegen 0.

Nun könnten wir die Spähre in das Zentrum des $\mathbb{R}^3$ legen Somit würde mit der Ergänzung des Pyhtaoräischen Lehrsatzes der Radius folgendermaßen dargestellt werden.

x^2+y^2+z^2=R^2

In Polarkoordinaten umzurechnen wäre das die Darstellung:

$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$$
$$z = r \cdot \cos\theta$$

mit $0 \leq \ \Theta \leq 2\pi$ ; $0 \leq \ \varphi \leq \ \pi$

Von nun an können wir mit dieser Trigonometry rechnen. Wobei wir uns auf die Beziehungen von Längenseiten und die Winkel der Dreiecke beziehen.
So können wir nun die Länge zwischen 2 Punkten auf einem Großkreis berechnen. Dieser ist der kürzeste Weg auf einem Großkreis zwischen diesen Punkten. Man rechnet im Bogenmaß den Winkel den die 2 Punkte aufspannen und multipliziert mit dem Radius der Spähre.
Bei einer Drehung bleibt die Länge gleich

b= R*Winkel zwischen den Punkten (Kreisbogen)

Kugelkoordinaten Winkel zeigen Zeichnung