Der sphärische Satz des Pythagoras

Für ein rechtwinkliges Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b und c auf einer Sphäre mit Radius R und mit rechtem Winkel beim Eckpunkt C gilt:

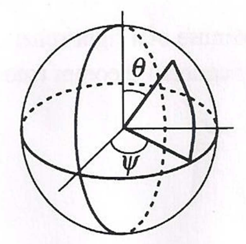
$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R} \cdot \cos\frac{b}{R}$$

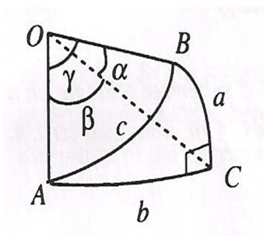
Beweis: Durch rotieren der Sphäre können wir erreichen, dass der Punkt A die Koordinaten (R, 0, 0) hat und dass der Punkt C in der xy – Ebene liegt. Der Punkt P hat dann die sphärischen Koordinaten (ß, $\frac{\pi}{2} - \alpha$), wobei α und β die beiden Winkel sind, die durch die Seiten BC und AC bestimmt sind. Die einzelnen Koordinate der Punkte sind demnach :

A = (R, 0, 0)

B = ($R\cos\beta\cos\alpha$, $R\sin\beta\cos\alpha$, $R\sin\alpha$)

C = ($R\cos\beta$, $R\sin\beta$, 0)





Sei γ der Winkel AOB. Der Winkel γ ist nun:

$$\cos\gamma = \frac{A \cdot B}{\|A\| \cdot \|B\|} = \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

Stellen wir nun die Winkel α, β und γ als Radianten dar, bekommen wir $\alpha = \frac{a}{R}, \beta = \frac{b}{R}$ und $\gamma = \frac{c}{R}$ und somit ist der Satz bewiesen.

□

Warum heißt dieser Satz nun der „sphärische Satz des Pythagoras“?

- Weil er die Hypotenuse eines sphärischen rechtwinkligen Dreieck mit den beiden Katheten in Bezieung setzt.

Um die Verbindung mit dem klassischen Satz des Pythagoras zu sehen dürcken wir nun den Cosinus durch seine Taylorreihe aus:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Eingesetzt in den sphärischen Satz des Pythagoras gibt das die Gleichung:

$$1 - \frac{c^2}{2R^2} + \cdots = (1 - \frac{a^2}{2R^2} + \cdots)(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \cdots) = 1 - \frac{a^2}{2R^2} - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{a^2b^2}{4R^4} + \cdots$$

Zieht man 1 auf beiden Seiten ab und multipliziert mit -2R² erhält man

$$c^2 + \frac{Zeug}{R^2} = a^2 + b^2 + \frac{anderes\ Zeug}{R^2}$$

Lassen wir nun R nach unendlich streben haben wir damit den klassischen Satz des Pythagoras abgeleitet. Da die Erde eine Kugel mit so einem enormen Radius verglichen mit alltäglichen Distanzen ist, scheint es als würden gewöhnliche rechtwinklige Dreiecke dem klassischen Satz des Pythagoras gehorchen.

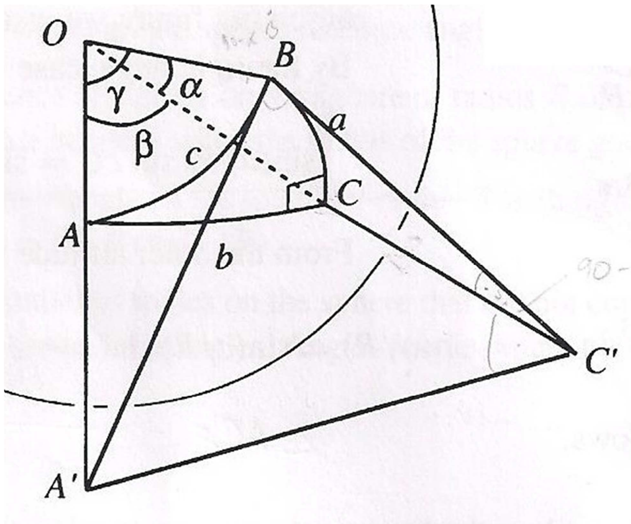
Der sphärische Sinussatz

Sei *ΔABC ein sphärisches Dreieck auf einer Sphäre mit Radius R. Seien a, b und c die Längen der Seiten in Radianten und seien ∟A, ∟B zbd ∟C die Innenwinkel der drei Eckpunkte. Dann gilt:*

$$\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin\llcorner A}=\frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin\llcorner B}=\frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin\llcorner C}$$

Beweis: Wir beschränken uns zuerst auf das rechtwinklige Dreieck, im besonderen beschränken wir uns auf Dreiecke innerhalb einem Viertel der Hemisphäre. Das Dreieck ΔABC ist nun wieder ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C.

1.) Wir verlängern den Radius OA zu OA\` wobei BA\` die tangente an das Kreissegment BA ist. Auf dieselbe Weiße wird OC zu OC\`verlängert, wobe BC\`die Tangente an das Kreissegment BC ist



2.) Daraus folgt sofort, dass das ΔOBC\` und ΔOBA\` rechtwinklige Dreiecke sind und dass der Winkel *∟A\`BC\` = ∟ABC = ∟B.*

3.) Da die Ebene A\`BC\` tangential zur Sphäre liegt, sind die Ebenen A\`BC\` und OBC normal aufeinander

4.) Da ∟ACB ein rechter Winkel ist, sind die Ebenen OBC und OAC ebenfalls normal aufeinander.

5.) Aus 3.) und 4.) folgt: Die Ebenen A\`BC\`und OAC treffen sich in der Linie A\`C\` welche normal zu OC\` ist. (Erklärung: Ebene OAC = OA\`C\` ist laut dem 4. Punkt normal auf OBC welche wiederum laut dem 3. Punkt normal auf A\`BC\` ist. Da A'C' Schnittlinie der Ebenen A\`BC\` und OAC ist, ist OC\` normal auf A\`C\`.)

6.) Aus dem klassischen Satz des Pythagoras folgt:

$$\text{I: } (OA`)^2 = (BA`)^2 + R^2$$
$$\text{II: } (OC`)^2 = (BC`)^2 + R^2$$
$$\text{III: } (OA`)^2 = (A`C`)^2 + (OC`)^2$$

Gleichung I-II-III ergibt:

$$(BA`)^2 = (A`C`)^2 + (BC`)^2$$

Und somit ist ΔA`BC` ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C`. Seien nun α, β und γ die Winkel ∟BOC, ∟AOC und ∟AOB. Durch die Definition der trionometrischen Funktionen erhalten wir:

$$\sin\beta = \frac{A`C`}{OA`} = \frac{A`C`}{BA`}\frac{BA`}{OA`} = \sin \llcorner \mathrm{B} \sin\gamma$$

Und somit

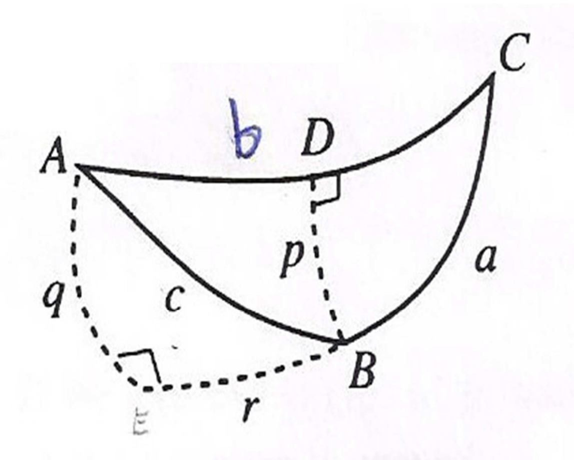
$$\sin\gamma = \frac{\sin^{b}/_{R}}{\sin \llcorner \mathrm{B}}$$

Drehen wir die Rollen von A und B um, erhalten wir einen ähnlichen Ausdruck:

$$\sin\gamma = \frac{\sin^{a}/_{R}}{\sin \llcorner \mathrm{A}}$$

Und somit: $\frac{\sin^{a}/_{R}}{\sin \llcorner \mathrm{A}} = \frac{\sin^{b}/_{R}}{\sin \llcorner \mathrm{B}}$

Für ein beliebiges sphärisches Dreieck können wir nun die Höhe auf einen Punkt einzeichnen und somit die Beziehungen zweier Seiten im Falle eines rechtwinkligen Dreiecks ausdrücken. In der nun gezeigten Abbildung sind die Höhen auf A und B eingezeichnet.



Es gilt:

$$\frac{\sin^{a}/_{R}}{\sin \llcorner \mathrm{D}} = \frac{\sin^{p}/_{R}}{\sin \llcorner \mathrm{C}}$$

für das rechte Dreieck und

$$\frac{\sin^{c}/_{R}}{\sin \llcorner \mathrm{D}} = \frac{\sin^{p}/_{R}}{\sin \llcorner \mathrm{A}}$$

für das linke Dreieck. Da sin ∟D = sin90° = 1 gilt:

$$\sin {}^{a}/_{R} \cdot \sin \llcorner \mathrm{C} = \sin {}^{p}/_{R} = \sin {}^{c}/_{R} \cdot \sin \llcorner \mathrm{A}$$

Von den anderen Höhen finden wir:

$$\sin {}^{b}/_{R} \cdot \sin \llcorner \mathrm{C} = \sin {}^{q}/_{R} = \sin {}^{c}/_{R} \cdot \sin(\pi - \llcorner \mathrm{B}) = \sin {}^{c}/_{R} \cdot \sin \llcorner \mathrm{B}$$

Damit ist das Theorem bewiesen.

Aus den Sätzen wie den letzten beiden kann ein wichtiges Prinzip der sphärischen Geometrie bewiesen werden: Es gibt 6 Größen welche ein sphärisches Dreieck eindeutig festlegen, nämlich die drei Seiten und die drei Winkel. Sind drei der Größen bekannt, kann man die anderen drei Größen bestimmen. Daraus folgt, dass ähnliche Dreiecke einer Sphäre kongruent sind.

Die Sphäre hat einige weitere auffallende gemometrische Eigenschften. Eine weitere Eigenschaft die wir heute sehen konnte ist dass die Fläche des sphärischen Dreiecks von der Winkelsumme abhängt. Des weiteren gilt der Pythagoräische Lehrsatz in der Sphäre wie auch in der Ebene indem man die Ebene als eine Sphäre mit unendlichen Radius sieht.