Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2024, 2. Termin, 26.9.2022, Roland Steinbauer
Prüfungsausarbeitung

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und fundamentale Ideen

1. (*Zur Grenzwertdefinition.*) Für eine relle Folge $(a_n)_n$ und ein $a \in \mathbb{R}$ gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Welche Aussagen sind dazu äquivalent?
   (a) [false] In jeder ε-Umgebung von a liegen unendlich Folgenglieder a_n.
   (b) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$
   (c) [false] $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$
   (d) [false] $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$

2. (*Grenzwert vs. Häufungswerts.*) Welche Aussagen sind für reelle Folgen $(a_n)_n$ und $a \in \mathbb{R}$ korrekt?
   (a) [true] Falls außerhalb jeder ε-Umgebung von a nur endlich viele a_n liegen, dann ist a Grenzwert von (a_n).
   (b) [false] Falls außerhalb einer ε-Umgebung von a nur endlich viele a_n liegen, dann ist a Häufungswert und Grenzwert von (a_n).
   (c) [true] Falls (a_n) beschränkt ist und a der einzige Häufungswert von (a_n) ist, dann ist a auch schon Grenzwert von (a_n).
   (d) [true] Falls außerhalb einer ε-Umgebung von a unendlich viele a_n liegen, dann ist a sicher nicht Grenzwert von (a_n).

3. *(Zum Begriff der Reihe.)* Welche Aussagen sind korrekt? Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge.
   (a) [false] Unter der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ versteht man die Folge $(s_k)_k$ mit $s_k = \sum_{k=0}^{n} a_k$.
   (b) [true] Falls der Limes der Partialsummen s existiert und endlich ist, dann schreibt man $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.
   (c) [false] Nur wenn $\lim_{n\to\infty} a_n$ endlich ist, kann die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ definiert werden.
   (d) [true] Falls $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ endlich ist, bezeichnen wir diese Zahl als Reihenwert.

4. *(b-adische Entwicklung.)* Welche Aussagen sind korrekt? Bei einer b-adischen Entwicklung $a = \pm \sum_{n=N}^{\infty} a_n b^{-n}$ einer beliebigen reellen Zahl a gilt:
   (a) [true] Als Basis kommen ganze Zahlen $b \geq 2$ in Frage.
   (b) [fasle] Die Ziffern a_n können genau folgende Werte annehmen: $1, \dots, b$.
   (c) [true] Die Summe beginnt immer bei einem $N \in \mathbb{Z}$ zu laufen.
   (d) [false] Bei der Dezimaldarstellung (d.h. $b = 10$) einer Zahl a mit $10 \leq |a| < 100$ gilt $N = 2$.

5. (*Potenzen.*) Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] $x^\alpha = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\alpha \text{ mal}}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) [true] $x^q = \sqrt[n]{x^m}$ für $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.
   (c) [true] Die Definition der allgemeinen Potenz ist $x^\alpha = \exp(\alpha \log(x))$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (d) [true] Es gilt $\log(x^\alpha) = \alpha \log(x)$ nicht nur für $a \in \mathbb{N}$ sondern auch für $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. (*Stetigkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in D$, falls
   (a) [false] $\exists \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in D$ mit $|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

(b) [true] es für jede vorgegebene ε-„Toleranzgrenze" um $f(a)$ ein δ-„Sicherheitsintervall" um a gibt, sodass für alle Punkte $x \in D$ im δ-„Sicherheitsintervall" um a (d.h. für alle x mit $|x-a| < \delta$) der entsprechende Funktionswert innerhalb der ε-„Toleranzgrenze" um $f(a)$ liegt (d.h. $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ gilt).

(c) [false] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D$ mit $|x-a| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \delta$.

(d) [true] für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ schon $f(x_n) \to f(a)$ gilt.

7. (*Stetigkeit und Differenzierbarkeit.*) Welche Aussagen sind für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ (I ein Intervall) korrekt?

(a) [false] Hat (der Graph von) f einen Knick, so ist f nicht stetig.

(b) [true] Hat (der Graph von) f einen Sprung, so ist f nicht stetig.

(c) [false] Wenn (der Graph von) f keinen Sprung hat, dann ist f stetig.

(d) [false] Hat (der Graph von) f einen Knick, so ist f nicht stetig.

8. (*Stammfunktion.*) Welche Aussagen sind korrekt?
Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ (mit I einem Intervall) ist Stammfunktion einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, falls

(a) [false] $f' = F$ gilt.

(b) [true] $(F + c)' = f$ gilt für jedes $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

(c) [false] $F' = f + c$ gilt, für ein $c \in \mathbb{R}$.

(d) [false] F gegeben ist durch $F(x) = \int_a^b (f(t)\, dt$ mit $a, b \in I$ beliebig.

2 Sätze & Resultate

9. (*Folgen: Konvergenz & Häufungswerte.*) Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

(a) [true] Es gibt beschränkte Folgen, die nicht konvergieren.

(b) [false] Es gibt monotone, beschränkte Folgen, die nicht konvergieren.

(c) [true] Jede monotone, beschränkte Folge hat einen Häufungswert.

(d) [true] Jede beschränkte Folge hat einen Häufungswert.

10. (*Folgen: Monotonie, Beschränktheit & Konvergenz.*) Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

(a) [true] Jede konvergente Folge ist auch Cauchy-Folge.

(b) [false] Jede streng monoton wachsende und nach unten beschränkte Folge ist beschränkt.

(c) [true] Jede streng monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge ist beschränkt.

(d) [true] Jede streng monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge ist konvergent.

11. *(Grenzwertsätze strukturell).* Welche der folgenden Aussagen über reelle Folgen und deren Konvergenz sind korrekt?

(a) [false] Der Grenzwert einer konvergenten positiven Folge (d.h. alle Folgenglieder $a_n > 0$) ist ebenfalls positiv.

(b) [true] Das Produkt zweier konvergenter Folgen ist immer konvergent und zwar gegen das Produkt der Grenzwerte.

(c) [false] Der Quotient zweier konvergenter Folgen ist immer konvergent und zwar gegen den Quotienten der Grenzwerte.

(d) [true] Der Grenzwert konvergenter Folgen respektiert die $\leq$-Beziehung.

12. (*Zur Vollständigkeit.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [false] Schon die rationalen Zahlen bilden den gesamten Zahlenstrahl.

(b) [true] Jede rationale Zahl ist Limes einer Folge irrationaler Zahlen.

(c) [true] Jede irrationale Zahl ist Limes einer Folge rationaler Zahlen.

(d) [false] Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ konvergiert auch in $\mathbb{Q}$ (dh. ihr Grenzwert ist in $\mathbb{Q}$).

13. (*Eigenschaften stetiger Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Stetige Funktionen auf abgeschlossenen und beschränkten Intervallen haben Infimum und Supremum.

   (b) [false] Stetige Funktionen auf abgeschlossenen und beschränkten Intervallen haben einen Fixpunkt.

   (c) [false] Stetige Funktionen auf beschränkten Intervallen sind beschränkt.

   (d) [true] Jedes stetige $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.

14. (*Differenzierbarkeit.*) Welche der folgenden Aussagen über Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) [true] Falls f und g in $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind, dann auch jede Linearkombination $\lambda f + \mu g$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   (b) [false] f ist differenzierbar in einem Punkt $\xi \in \mathbb{R}$, falls es eine Zahl a gibt und eine Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

   $$f(\xi + h) - f(\xi) = ah + r(h) \quad \text{und} \lim_{0 \neq h \to 0} r(h) = 0.$$

   (c) [false] Falls f stetig in $\xi \in \mathbb{R}$ ist, dann ist f dort auch differenzierbar.

   (d) [false] Falls f differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist mit auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetiger Ableitung f', dann ist f auf ganz $\mathbb{R}$ zumindest stetig.

15. (*Winkelfunktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] $\sin(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$.

   (b) [true] $\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x) = e^{ix}$.

   (c) [true] $\cos(x) = \dfrac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}$.

   (d) [false] $\dfrac{\cos(x) - 1}{x} \to 1 \quad (x \to 0)$.

16. (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*) Welche Aussagen sind für eine auf einem Intervall I definierte stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ für ein beliebiges $a \in I$ korrekt?

   (a) [true] $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

   (b) [true] F' ist stetig.

   (c) [false] $F'(x) = f(x) - f(a)$ für alle $x \in I$.

   (d) [false] f ist differenzierbar.

3 Beispiele, Gegenbeispiele, Rechenaufgaben

17. (*Konvergenz von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind korrekt?

   (a) [true] $\left(\dfrac{n^2}{n!}\right)_{n\geq 1}$ ist beschränkt.

   (b) [false] $\dfrac{2n^3 + n}{n^2 + 7}$ ist eine Cauchy-Folge.

   (c) [true] Die Folge $x_n = 13\,\dfrac{1}{n^2}$ ist als Produkt der konstanten Folge $a_n = 13$ mit den Nullfolgen $b_n = 1/n = c_n$ ebenfalls eine Nullfolge.

   (d) [true] $\dfrac{(-1)^n}{n}$ hat nur einen Häufungswert.

18. (*Konvergenz & absolute Konvergenz von Reihen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergiert zwar, konvergiert aber nicht absolut.

   (b) [true] Konvergente Reihen mit nur positiven Gliedern konvergieren sogar absolut.

(c) [false] Eine konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \to 0$ konvergiert.

(d) [true] Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dann ist a_n eine Nullfolge.

19. (*Funktionsgrenzwerte*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] $\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$, weil $\cos(0) = 1$ und $\cos$ stetig ist.

(b) [false] $\lim_{x \to \infty} \log(x) = -\infty$.

(c) [false] Für alle $\alpha > 0$ gilt $x^\alpha \to 1$ $(x \searrow 0)$.

(d) [true] $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^k} \to \infty$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

20. (*Stetige Funktionen.*) Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

(a) [true] $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \log(x+2)$.

(b) [true] $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$.

(c) [false] $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(1/x)\,(x \neq 0), \quad f(0) = 1$.

(d) [false] $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}\sin(x)\,(x \neq 0), \quad f(0) = 0$.

21. (*Differenzierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Funktionen sind für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar?

(a) [true] $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

(b) [false] $f(x) = |x+1|$.

(c) [false] $f(x) = x\sin(1/x)\,(x \neq 0), \quad f(0) = 0$.

(d) [false] $f(x) = \sqrt{|x-1|}$.

22. (*Differenzierbarkeit.*) Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4.$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] Als Polynom ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

(b) [false] Es gilt $f'(0) = 0$ und daher hat f in $x = 0$ einen Extrempunkt.

(c) [false] Es gilt $f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0$ und daher hat f in $x = 0$ ein Minimum.

(d) [true] f hat in $x = 0$ ein Minimum und daher gilt $f'(0) = 0$.

23. (*Funktionen, vermischtes.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [false] Weil $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ in $x = 0$ eine verschwindende Ableitung hat ist f nicht auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend.

(b) [true] $f: [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ist zwar beschränkt, hat aber kein Maximum.

(c) [false] $f: [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ hat nirgends eine verschwindende Ableitung, daher muss sein Maximum am Rand liegen.

(d) [false] $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ ist nicht stetig in 0 fortsetzbar, weil die einseitigen Grenzwerte für $x \to 0$ zwar existieren aber nicht übereinstimmen.

24. (*Integrierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [false] $\sin$ und $\cos$ sind beide auf $[-\pi, \pi]$ monoton und daher dort auch Riemann-integrierbar

(b) [false] $\exp(x)$ ist nicht auf $[0, 10^6]$ Riemann-integrierbar, weil dort ja nichteinmal beschränkt.

(c) [false] Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $[0,1]$ uneigentlich integrierbar und es gilt $\int_0^1 f(x)dx = \log(2)$.

(d) [true] Die Funktion $f(x) = x\,\sin(1/x)$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$ ist auf $[-1,1]$ Riemann-integrierbar.

Offener Teil

[1] (a) (i) Wenn eine Folge zwischen zwei anderen Folgen liegt, die gegen denselben Grenzwert konvergieren, so konvergiert sie (die Folge in der Mitte) ebenfalls gegen diesen Wert.

(ii) Beweis: Sei $\varepsilon > 0$; und $a_n \to a$, $c_n \to a$

$\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: \quad |a_n - a| < \varepsilon$

$|c_n - a| < \varepsilon$

Daher gilt $\forall n \geq N$ (oder wenn $a_n \leq b_n \leq c_n$ nur $\forall n \geq n_0$ angenommen wurde $\forall n \geq \max(n_0, N)$)

$a - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq a + \varepsilon$

$\Longrightarrow \quad -\varepsilon \leq b_n - a \leq \varepsilon \Longrightarrow |b_n - a| < \varepsilon$

und das bedeutet, dass $b_n \to a$ $\quad [\,]$

[1] (b) Leibnitz-Kriterium. Sei (a_n) reelle Folge mit $a_n \geq 0 \ \forall n$. Wir betrachten die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Falls

(1) a_n monoton fällt ($a_{n+1} \leq a_n \ \forall n$) und

(2) $a_n \to 0$

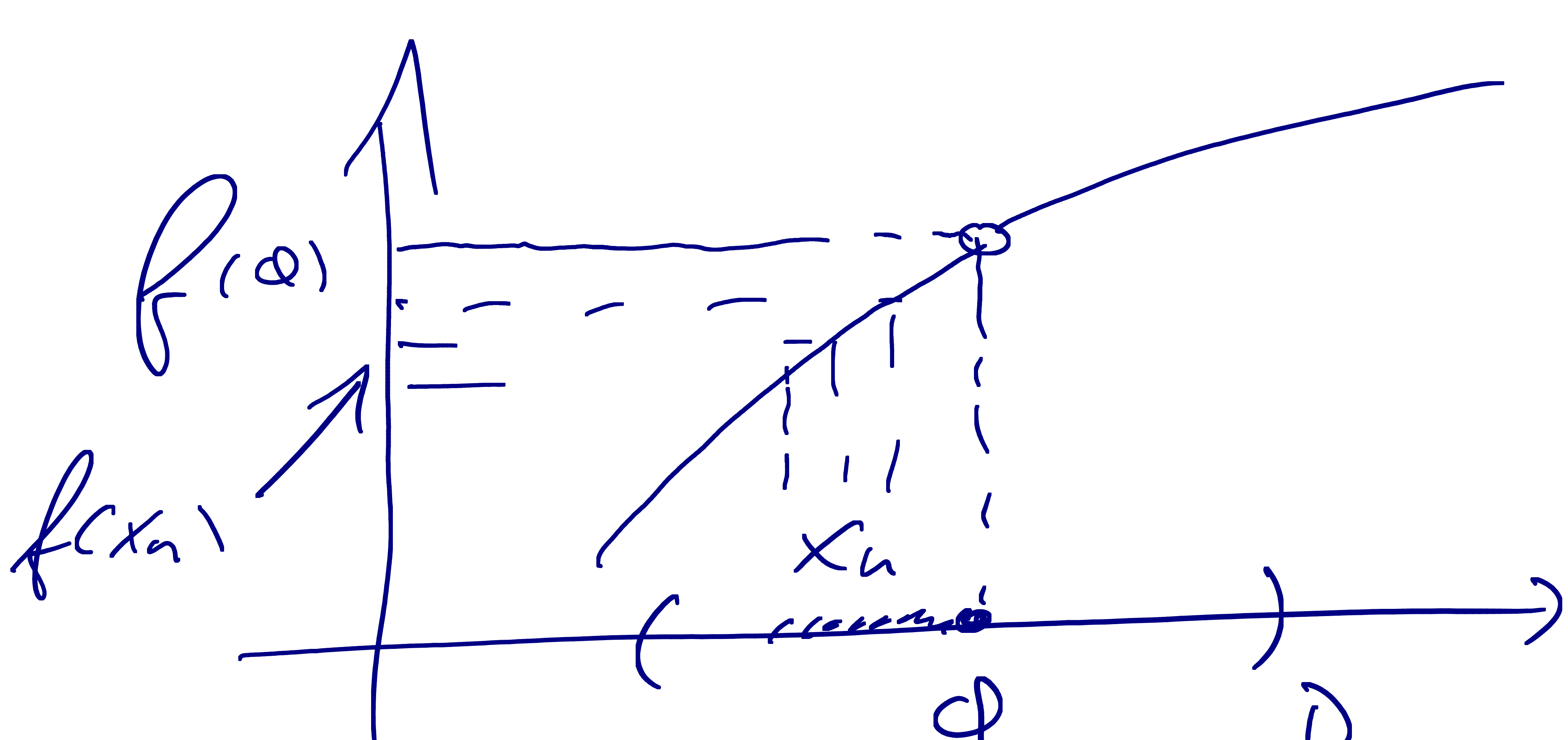
dann konvergiert $\sum (-1)^n a_n$.

(ii) $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergiert, weil $a_n = 1/n$ monotone Nullfolge ist.

$\boxed{2}$ (a) Folgenstetigkeit

Sei f reelle Funktion ($f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$) und $a \in D$, dann ist f stetig in a genau dann, wenn

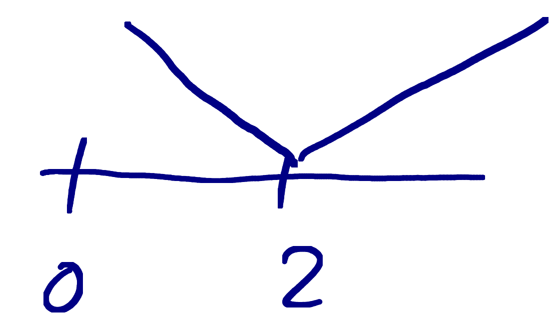
$\forall$ Folgen $(x_n)_n$ in D mit $x_n \to a$ gilt, dass auch $f(x_n) \to f(a)$.



[alternativ $\forall (x_n) \in D$, $x_n \to a$:
$\lim(f(x_n)) = f(\lim x_n)$]

$\boxed{2}$ (b) Fkt explizit: (i) $f(x) = x$ $[e^x$, Polynom, ...$]$

(ii) $f(x) = |x-2|$



$\boxed{2}$ (c) Kettenregel: Die Verknüpfung zweier (in einem Pkt bzw dessen Bildpkt unter der ersten/inneren Fkt) differenzierbaren Fkt ist wieder differenzierbar und die Ableitung ist gegeben durch die Ableitung der äußeren/zweiten Fkt am Bildpkt der inneren/ersten Fkt mal der Ableitung der inneren Fkt/inneren Ableitung am entsprechenden Pkt.

$\boxed{3}$ (a) Rolle (i) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig & diffbar auf (a,b). Falls $f(a) = f(b)$, dann $\exists\, \xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

(ii) Beweis. (1) Es gibt einen Pkt x im Innern mit $f(x) > f(a) = f(b)$:

Falls f konstant ist $\Rightarrow f'(\xi) = 0 \;\forall \xi \in (a,b)$ und wir sind fertig.

Also sei f nicht konstant. Dann $\exists$ o.BdA ein $x \in (a,b)$ mit $f(x) > f(a) = f(b)$ $(*)$

[analog für $f(x) < f(a) = f(b)$]

(2) $\exists$ Max im Inneren: Weil f stetig auf $[a,b]$ gibt es wegen dem Satz vom Maximum ein $\xi \in [a,b]$ sodass $f(\xi) \geq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

Wegen (*) muss $\xi \in (a,b)$ sein.

(3) Die Ableitung in ξ verschwindet.

Weil ξ ein Maximum im Inneren ist, besagt das notwendige Kriterium f. Extrema, dass $f'(\xi) = 0$ gilt $\square$

$\boxed{3}$ (b) Hauptsatz. Der Hauptsatz Diff/Int besagt für ein stetiges $f: I \to \mathbb{R}$ bzw ein stetig diff'bares $F: I \to \mathbb{R}$ und $a \in I$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x), \text{ bzw. } \int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Das wiederum bedeutet, dass mit der Notation

$$D: \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}^0(I): F \mapsto F'$$

$$R: \mathcal{C}^0(I) \to \mathcal{C}^1(I): f \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

für das Hintereinanderausführen der beiden Operatoren gilt:

$$F\in C^1 \xmapsto{D} F'\in C^0 \xmapsto{R} \int_0^x F'(t)\,dt = F(x)-F(0)$$

bzw

$$f\in C^0 \xmapsto{R} \int_0^x f(t)\,dt \in C^1 \xmapsto{D} f(x)$$

Das bedeutet, dass

$$R\circ D : C^1 \to C^1 \text{ erfüllt } R\circ D(F) = F - F(0)$$

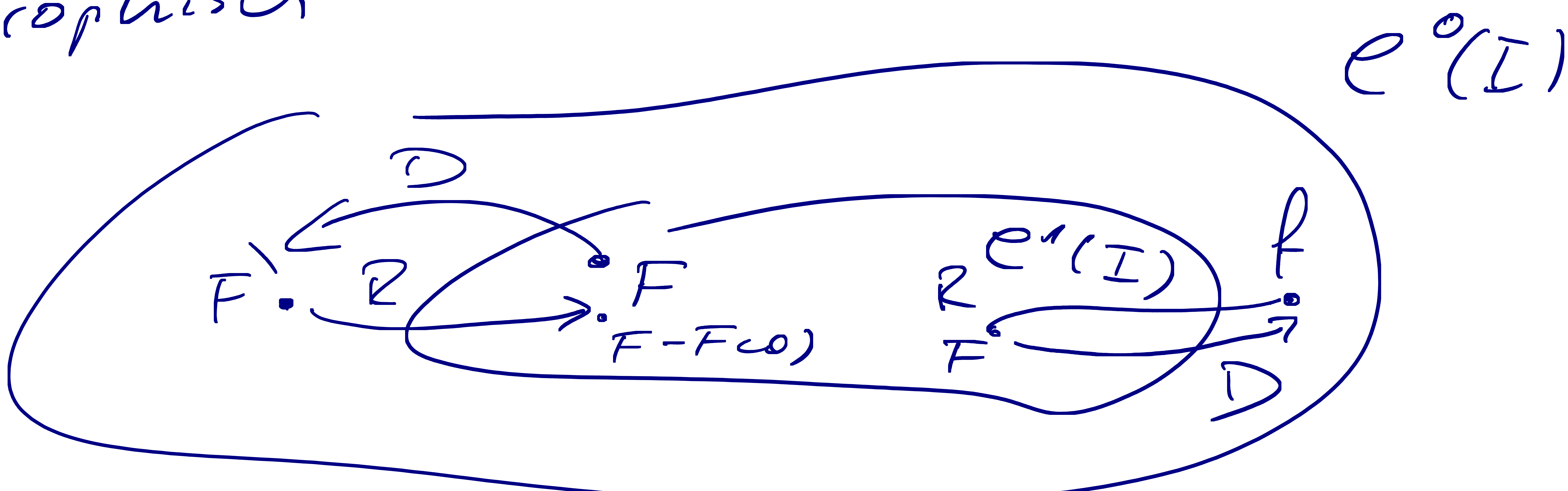
bzw

$$D\circ R : C^0 \to C^0 \text{ erfüllt } D\circ R = \mathrm{id}.$$

Wir sehen also, dass $D\circ R$ die Identität auf $C^0(I)$ ergibt und $R\circ D$ die Identität auf $C^1(I)$ bis auf den additiven Faktor $F(0)$.

Daher sind D & R fast inverse Operatoren; die 2 „Schönheitsfehler" sind die unterschiedlichen Definitionsbereiche (C^0 bzw C^1) & der Faktor $F(0)$.

Graphisch



[oder auch links $\int_0^x f(t)\,dt$ statt F bzw. rechts F' statt f.]