NAME:		MAT.NR.	

Prüfung zu

Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2024, 2. Termin, 26.9.2024

Roland Steinbauer

Erläuterungen zum Multiple Choice Teil: Für jede der 24 Fragen sind

4 Antwortmöglichkeiten angegeben, von denen 1, 2 oder 3 korrekt sind.

Die **„Bepunktung“** ist wie folgt: Für das Kreuzen einer korrekten Antwort erhalten Sie 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte (also z.B. bei 2 richtigen Antwortmöglichkeiten 1/2 Pkt pro gekreuzter richtiger Antwort, etc). Beim Ankreuzen einer falschen Antwort wird 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte abgezogen. Nichtankreuzen einer richtigen oder einer falschen Antwort ergibt keine Punkte. Pro Frage gibt es keine negativen Punkte, d.h. Sie können jeweils zwischen 0 und 1 Punkt pro Frage erreichen, insgesamt also höchstens 24 Punkte.

Die MC-Fragen müssen Sie auf dem gesonderten Antwortbogen ankreuzen. Dort müssen Sie Ihren Namen angeben und ihre Matrikelnummer eintragen **und vertikal als Ziffern ankreuzen**.

Beim **offenen Teil** der Prüfung können Sie ebenfalls maximal 24 Punkte erreichen. Die Punkte sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

MC	1	2	3	OT	$\sum$	Note
(24)	(7)	(7)	(10)	(24)	(48)	

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und fundamentale Ideen

1. (*Zur Grenzwertdefinition.*) Für eine relle Folge $(a_n)_n$ und ein $a \in \mathbb{R}$ gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Welche Aussagen sind dazu äquivalent?
   (a) In jeder ε-Umgebung von a liegen unendlich Folgenglieder a_n.
   (b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$
   (c) $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$
   (d) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$
2. (*Grenzwert vs. Häufungswerts.*) Welche Aussagen sind für reelle Folgen $(a_n)_n$ und $a \in \mathbb{R}$ korrekt?
   (a) Falls außerhalb jeder ε-Umgebung von a nur endlich viele a_n liegen, dann ist a Grenzwert von (a_n).
   (b) Falls außerhalb einer ε-Umgebung von a nur endlich viele a_n liegen, dann ist a Häufungswert und Grenzwert von (a_n).
   (c) Falls (a_n) beschränkt ist und a der einzige Häufungswert von (a_n) ist, dann ist a auch schon Grenzwert von (a_n).
   (d) Falls außerhalb einer ε-Umgebung von a unendlich viele a_n liegen, dann ist a sicher nicht Grenzwert von (a_n).
3. *(Zum Begriff der Reihe.)* Welche Aussagen sind korrekt? Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge.
   (a) Unter der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ versteht man die Folge $(s_k)_k$ mit $s_k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.
   (b) Falls der Limes der Partialsummen s existiert und endlich ist, dann schreibt man $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s$.
   (c) Nur wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ endlich ist, kann die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ definiert werden.
   (d) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ endlich ist, bezeichnen wir diese Zahl als Reihenwert.
4. *(b-adische Entwicklung.)* Welche Aussagen sind korrekt? Bei einer b-adischen Entwicklung $a = \pm \sum_{n=N}^{\infty} a_n b^{-n}$ einer beliebigen reellen Zahl a gilt:
   (a) Als Basis kommen ganze Zahlen $b \geq 2$ in Frage.
   (b) Die Ziffern a_n können genau folgende Werte annehmen: $1, \ldots, b$.
   (c) Die Summe beginnt immer bei einem $N \in \mathbb{Z}$ zu laufen.
   (d) Bei der Dezimaldarstellung (d.h. $b = 10$) einer Zahl a mit $10 \leq |a| < 100$ gilt $N = 2$.

5. (*Potenzen.*) Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) $x^\alpha = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{\alpha \text{ mal}}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) $x^q = \sqrt[n]{x^m}$ für $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

   (c) Die Definition der allgemeinen Potenz ist $x^\alpha = \exp(\alpha \log(x))$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (d) Es gilt $\log(x^\alpha) = \alpha \log(x)$ nicht nur für $a \in \mathbb{N}$ sondern auch für $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. (*Stetigkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in D$, falls

   (a) $\exists \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in D$ mit $|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

   (b) es für jede vorgegebene ε-„Toleranzgrenze" um $f(a)$ ein δ-„Sicherheitsintervall" um a gibt, sodass für alle Punkte $x \in D$ im δ-„Sicherheitsintervall" um a (d.h. für alle x mit $|x - a| < \delta$) der entsprechende Funktionswert innerhalb der ε-„Toleranzgrenze" um $f(a)$ liegt (d.h. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ gilt).

   (c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D$ mit $|x - a| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \delta$.

   (d) für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ schon $f(x_n) \to f(a)$ gilt.

7. (*Stetigkeit und Differenzierbarkeit.*) Welche Aussagen sind für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ (I ein Intervall) korrekt?

   (a) Hat (der Graph von) f einen Knick, so ist f nicht stetig.

   (b) Hat (der Graph von) f einen Sprung, so ist f nicht stetig.

   (c) Wenn (der Graph von) f keinen Sprung hat, dann ist f stetig.

   (d) Hat (der Graph von) f einen Knick, so ist f nicht stetig.

8. (*Stammfunktion.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ (mit I einem Intervall) ist Stammfunktion einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, falls

   (a) $f' = F$ gilt.

   (b) $(F + c)' = f$ gilt für jedes $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

   (c) $F' = f + c$ gilt, für ein $c \in \mathbb{R}$.

   (d) F gegeben ist durch $F(x) = \int_a^b (f(t)\, dt$ mit $a, b \in I$ beliebig.

2 Sätze & Resultate

9. (*Folgen: Konvergenz & Häufungswerte.*) Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?
   (a) Es gibt beschränkte Folgen, die nicht konvergieren.
   (b) Es gibt monotone, beschränkte Folgen, die nicht konvergieren.
   (c) Jede monotone, beschränkte Folge hat einen Häufungswert.
   (d) Jede beschränkte Folge hat einen Häufungswert.

10. (*Folgen: Monotonie, Beschränktheit & Konvergenz.*) Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?
   (a) Jede konvergente Folge ist auch Cauchy-Folge.
   (b) Jede streng monoton wachsende und nach unten beschränkte Folge ist beschränkt.
   (c) Jede streng monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge ist beschränkt.
   (d) Jede streng monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge ist konvergent.

11. *(Grenzwertsätze strukturell).* Welche der folgenden Aussagen über reelle Folgen und deren Konvergenz sind korrekt?
   (a) Der Grenzwert einer konvergenten positiven Folge (d.h. alle Folgenglieder $a_n > 0$) ist ebenfalls positiv.
   (b) Das Produkt zweier konvergenter Folgen ist immer konvergent und zwar gegen das Produkt der Grenzwerte.
   (c) Der Quotient zweier konvergenter Folgen ist immer konvergent und zwar gegen den Quotienten der Grenzwerte.
   (d) Der Grenzwert konvergenter Folgen respektiert die $\leq$-Beziehung.

12. (*Zur Vollständigkeit.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) Schon die rationalen Zahlen bilden den gesamten Zahlenstrahl.
   (b) Jede rationale Zahl ist Limes einer Folge irrationaler Zahlen.
   (c) Jede irrationale Zahl ist Limes einer Folge rationaler Zahlen.
   (d) Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ konvergiert auch in $\mathbb{Q}$ (dh. ihr Grenzwert ist in $\mathbb{Q}$).

13. (*Eigenschaften stetiger Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) Stetige Funktionen auf abgeschlossenen und beschränkten Intervallen haben Infimum und Supremum.

   (b) Stetige Funktionen auf abgeschlossenen und beschränkten Intervallen haben einen Fixpunkt.

   (c) Stetige Funktionen auf beschränkten Intervallen sind beschränkt.

   (d) Jedes stetige $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.

14. (*Differenzierbarkeit.*) Welche der folgenden Aussagen über Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) Falls f und g in $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind, dann auch jede Linearkombination $\lambda f + \mu g$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   (b) f ist differenzierbar in einem Punkt $\xi \in \mathbb{R}$, falls es eine Zahl a gibt und eine Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

   $$f(\xi + h) - f(\xi) = ah + r(h) \quad \text{und} \lim_{0 \neq h \to 0} r(h) = 0.$$

   (c) Falls f stetig in $\xi \in \mathbb{R}$ ist, dann ist f dort auch differenzierbar.

   (d) Falls f differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist mit auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetiger Ableitung f', dann ist f auf ganz $\mathbb{R}$ zumindest stetig.

15. (*Winkelfunktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) $\sin(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots$.

   (b) $\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x) = e^{ix}$.

   (c) $\cos(x) = \dfrac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}$.

   (d) $\dfrac{\cos(x) - 1}{x} \to 1 \quad (x \to 0)$.

16. (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*) Welche Aussagen sind für eine auf einem Intervall I definierte stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ für ein beliebiges $a \in I$ korrekt?

   (a) $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

   (b) F' ist stetig.

   (c) $F'(x) = f(x) - f(a)$ für alle $x \in I$.

   (d) f ist differenzierbar.

3 Beispiele, Gegenbeispiele, Rechenaufgaben

17. (*Konvergenz von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind korrekt?

    (a) $\left(\dfrac{n^2}{n!}\right)_{n\geq 1}$ ist beschränkt.

    (b) $\dfrac{2n^3+n}{n^2+7}$ ist eine Cauchy-Folge.

    (c) Die Folge $x_n = 13\,\dfrac{1}{n^2}$ ist als Produkt der konstanten Folge $a_n = 13$ mit den Nullfolgen $b_n = 1/n = c_n$ ebenfalls eine Nullfolge.

    (d) $\dfrac{(-1)^n}{n}$ hat nur einen Häufungswert.

18. (*Konvergenz & absolute Konvergenz von Reihen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergiert zwar, konvergiert aber nicht absolut.

    (b) Konvergente Reihen mit nur positiven Gliedern konvergieren sogar absolut.

    (c) Eine konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \to 0$ konvergiert.

    (d) Konvergiert $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dann ist a_n eine Nullfolge.

19. (*Funktionsgrenzwerte*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$, weil $\cos(0) = 1$ und cos stetig ist.

    (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \log(x) = -\infty$.

    (c) Für alle $\alpha > 0$ gilt $x^\alpha \to 1$ $(x \searrow 0)$.

    (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^k} \to \infty$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

20. (*Stetige Funktionen.*) Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

    (a) $f:\ \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \log(x+2)$.

    (b) $f:\ \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{x}$.

    (c) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(1/x)\ (x \neq 0), \quad f(0) = 1$.

    (d) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{x}\sin(x)\ (x \neq 0), \quad f(0) = 0$.

21. (*Differenzierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Funktionen sind für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar?

   (a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

   (b) $f(x) = |x + 1|$.

   (c) $f(x) = x \sin(1/x)\,(x \neq 0), \quad f(0) = 0$.

   (d) $f(x) = \sqrt{|x - 1|}$.

22. (*Differenzierbarkeit.*) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4.$$

   Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Als Polynom ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

   (b) Es gilt $f'(0) = 0$ und daher hat f in $x = 0$ einen Extrempunkt.

   (c) Es gilt $f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0$ und daher hat f in $x = 0$ ein Minimum.

   (d) f hat in $x = 0$ ein Minimum und daher gilt $f'(0) = 0$.

23. (*Funktionen, vermischtes.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Weil $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ in $x = 0$ eine verschwindende Ableitung hat ist f nicht auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend.

   (b) $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ist zwar beschränkt, hat aber kein Maximum.

   (c) $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ hat nirgends eine verschwindende Ableitung, daher muss sein Maximum am Rand liegen.

   (d) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ ist nicht stetig in 0 fortsetzbar, weil die einseitigen Grenzwerte für $x \to 0$ zwar existieren aber nicht übereinstimmen.

24. (*Integrierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) sin und cos sind beide auf $[-\pi, \pi]$ monoton und daher dort auch Riemann-integrierbar

   (b) $\exp(x)$ ist nicht auf $[0, 10^6]$ Riemann-integrierbar, weil dort ja nichteinmal beschränkt.

   (c) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $[0, 1]$ uneigentlich integrierbar und es gilt

$$\int_0^1 f(x)dx = \log(2).$$

   (d) Die Funktion $f(x) = x \sin(1/x)$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$ ist auf $[-1, 1]$ Riemann-integrierbar.

Teil 2: Offene Aufgaben

1. *Folgen, Reihen & Konvergenz*

   (a) (*Sandwich Lemma.*) Bekanntlich lautet das Sanwich Lemma: Für reelle Folgen (a_n), (b_n) und (c_n) mit $a_n \leq b_n \leq c_n$, sowie $a_n \to a$ und $c_n \to a$ gilt auch $b_n \to c$.

   (i) Formulieren Sie diese Aussage ohne Verwendung mathematischer Symbole[1]. (1 Pkt)

   (ii) Beweisen Sie die Aussage. (3 Pkte)

   (b) (*Leibnitzkriterium.*) Das Leibnitzkriterium gibt hinreichende Bedingungen für die Konvergenz alternierenden Reihen.

   (i) Geben Sie eine mathematisch exakte Formulierung des Kriteriums. (2 Pkte)

   (ii) Zeigen Sie, dass die alternierende harmonische Reihe konvergiert. (1 Pkt)

2. *Funktionen, Stetigkeit & Differenzierbarkeit*

   (a) (*Folgenstetigkeit.*) Formulieren Sie in (möglichst knapp aber mathematisch exakt) die Charakterisierung der Stetigkeit einer reellen Funktion via Folgen und illustrieren Sie diese mit einer Skizze. (3 Pkte)

   (b) (*Funktionen explizit.*)
   Geben Sie explizit (formal oder durch Zeichnen des Graphen) jeweils eine Funktion mit den geforderten Eigenschaften auf $[0, \infty)$ an (je 1 Pkt):

   (i) Eine stetige Funktion, die nicht beschränkt ist.

   (ii) Eine stetige Funktion, die nicht differenzierbar ist.

   (c) (*Kettenregel.*) Die Kettenregel handelt von der Differenzierbarkeit und der Ableitung der Verknüpfung zweier Funktionen. Formulieren Sie die Kettenregel in eigenen Worten, ohne Formeln[1] zu verwenden. (2 Punkte)

Bitte umblättern

[1] Also insbesondere *ohne* für die beteiligten Folgen, Funktionen etc. eine Bezeichnung, wie etwa (a_n), (b_n) bzw. f und g zu verwenden.

3. *Differenzieren & Integrieren*

   (a) (*Satz von Rolle.*) Der Satz von Rolle ist das technische Herz des Mittelwersatzes und besagt das Folgende: Wenn eine stetige Funktion auf einem (endlichen) abgeschlossenen Intervall im Inneren differenzierbar ist und an den Rändern übereinstimmt, dann gibt es einen Punkt im Inneren, an dem die Ableitung der Funktion verschwindet.

      (i) Formulieren Sie den Satz exakt unter Verwendung mathematischer Notation. (1 Pkt)

      (ii) Skizzieren Sie seinen Beweis. Machen Sie dabei explizit welche Werkzeuge (d.h. früheren Resultate) Sie verwenden. (4 Pkte)

   (b) (*Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnunng.*) Diskutieren Sie inwiefern Differenzieren und Integrieren im Wesentlichen Umkehroprationen sind. (5 Pkte)