Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2024, 1. Termin, 27.6.2022, Roland Steinbauer
Prüfungsausarbeitung

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und fundamentale Ideen

1. (*Zur Grenzwertdefinition.*) Für eine relle Folge $(a_n)_n$ und ein $a \in \mathbb{R}$ gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Welche Aussagen sind dazu äquivalent?
   (a) [true] In jeder ε-Umgebung von a liegen fast alle Folgenglieder a_n.
   (b) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$
   (c) [false] Es gibt eine ε-Umgebung von a in der fast alle Folgenglieder a_n liegen.
   (d) [false] $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$

2. (*Grenzwert vs. Häufungswerts.*) Welche Aussagen sind für reelle Folgen $(a_n)_n$ und $a \in \mathbb{R}$ korrekt?
   (a) [false] Falls außerhalb jeder ε-Umgebung von a nur endlich viele a_n liegen, dann ist a Häufungswert aber nicht Grenzwert von (a_n).
   (b) [true] Falls außerhalb jeder ε-Umgebung von a nur endlich viele a_n liegen, dann ist a Häufungswert und Grenzwert von (a_n).
   (c) [false] Falls a der einzige Häufungswert von (a_n) ist, dann ist a auch schon Grenzwert von (a_n).
   (d) [true] Ist a Grenzwert von (a_n), dann ist a auch ein Häufungswert von (a_n) und zwar der einzige.

3. (*Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen.*) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine reelle Reihe. Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [true] Falls alle a_n positiv sind und die Reihe konvergiert, dann konvergiert sie auch absolut.
   (b) [false] Falls $a_n \to 0$, dann konvergiert die Reihe.
   (c) [false] Falls unendlich viele a_n positiv sind und die Reihe konvergiert, dann konvergiert sie auch absolut.
   (d) [false] Falls $|a_n| \to 0$, dann konvergiert die Reihe absolut.

4. (*Cauchy-Folge.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine reelle Folge (a_n) ist eine Cauchyfolge, falls
   (a) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N : \quad |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$
   (b) [true] a_n gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.
   (c) [false] eine Teilfoge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ konvergiert
   (d) [false] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \quad |a_n - a_{n+1}| \leq \varepsilon.$

5. (*Stetigkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in D$, falls
   (a) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D$ mit $|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$
   (b) [false] es eine reelle Folge (x_n) mit $x_n \to a$ gibt, für die schon $f(x_n) \to f(a)$ gilt.
   (c) [false] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D$ mit $|x - a| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \delta.$
   (d) [true] es zu jedem (noch so kleinen) ε ein $U_\delta(a) \subseteq D$ gibt, sodass alle $x \in U_\delta(a)$ nach $U_\varepsilon(f(a))$ abgebildet werden (d.h. $f(x)$ in $U_\varepsilon(f(a))$ liegt).

6. (*Elementar transzendente Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [true] Für die Exponentialfunktion gilt $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$
   (b) [true] Die Logarithmusfunktion ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich $(0, \infty)$ streng monoton wachsend.
   (c) [false] Für die Sinusfunktion gilt $\sin(0) = 1$ und $\sin'(0) = 1$.
   (d) [true] Die allgemeine Potenzfunktion ist definiert als $x^\alpha = \exp(\alpha \log(x))$ $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$.

7. (*Stetigkeit und Differenzierbarkeit.*) Welche Aussagen sind für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ (I ein Intervall) korrekt?
   (a) [true] Hat (der Graph von) f einen Knick, so ist f nicht differenzierbar.
   (b) [true] Hat (der Graph von) f einen Sprung, so ist f nicht differenzierbar.
   (c) [true] Wenn f stetig ist, so hat (der Graph von) f keinen Sprung.
   (d) [false] Hat (der Graph von) f einen Knick, so ist f nicht stetig.
8. (*Stammfunktion.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ (mit I einem Intervall) ist Stammfunktion einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, falls
   (a) [true] F differenzierbar ist und $F' = f$ auf ganz I gilt.
   (b) [true] F gegeben ist durch $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + 17$ mit $a \in I$ beliebig.
   (c) [false] $f' = F + c$ gilt, für ein $c \in \mathbb{R}$.
   (d) [false] F gegeben ist durch $F(x) = \int_a^x \big(f(t) + c\big)\,dt$ mit $a \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ beide beliebig.

2 Sätze & Resultate

9. *(Beschränktheit & Konvergenz von Folgen).* Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?
   (a) [false] Es gibt konvergente Folgen die nicht beschränkt sind.
   (b) [true] Jede beschränkte Folge hat einen Häufungswert.
   (c) [false] Es gibt monoton fallende nach unten beschränkte Folgen, die nicht beschränkt sind.
   (d) [false] Jede beschränkte Folge konvergiert.
10. (*Folgen & Konvergenz.*) Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?
   (a) [true] Jede Cauchy-Folge konvergiert.
   (b) [true] Jede streng monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge konvergiert.
   (c) [true] Es gibt monotone Folgen, die nicht konvergieren.
   (d) [false] Es gibt unbeschränkte, monotone Folgen, die konvergieren.
11. (*Zur Reihenkonvergenz.*) Welche der folgenden Aussagen über reelle Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sind korrekt?
   (a) [true] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, falls $|a_n| \leq \frac{1}{n^2}$ gilt.
   (b) [false] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, falls $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ gilt.
   (c) [true] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls alle $a_n \geq 0$ sind und die Folge der Partialsummen $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ beschränkt ist.
   (d) [false] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls die Folge (a_n) eine Nullfolge ist.
12. (*Zur Vollständigkeit.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] Es gibt konvergente Folgen in $\mathbb{Q}$, die keine Cauchyfolgen sind.
   (b) [true] Es gibt Folgen irrationaler Zahlen, die gegen $\sqrt{2}$ konvergieren.
   (c) [true] Jede reelle Zahl ist Limes einer Folge rationaler Zahlen.
   (d) [true] Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ konvergiert (als Folge in $\mathbb{R}$) aber ihr Limes muss nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.
13. (*Eigenschaften stetiger Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [true] Stetige Funktionen auf abgeschlossenen und beschränkten Intervallen haben Maximum und Minimum.
   (b) [true] Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ hat einen Fixpunkt.
   (c) [true] Ist f stetig auf $[a, b]$ und nicht konstant, dann ist $f([a, b])$ wieder ein Intervall.
   (d) [false] Jedes stetige $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.
14. (*Mittelwertsatz.*) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

(b) [true] Es gibt eine Stelle $\xi \in (a, b)$ in der die Tangente $g(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$ den Anstieg $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ hat.

(c) [false] Dann ist f auch auf $[a, b]$ differenzierbar, wobei in a und b nur die einseitigen Ableitungen existieren.

(d) [true] Gilt zusätzlich $f(a) = f(b)$, so gibt es einen Punkt in (a, b), in dem die Ableitung von f verschwindet.

15. (*Extrema.*) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

    (a) [false] Falls f in ξ ein lokales Maximum hat, so gilt $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$.

    (b) [false] f kann in ξ ein lokales Extremum haben, obwohl $f'(\xi) \neq 0$ gilt.

    (c) [true] f kann in ξ ein globales Extremum haben, obwohl $f'(\xi) \neq 0$ gilt.

    (d) [true] Hat f ein lokales Minimum in ξ, dann ist f knapp links von ξ monoton fallend und knapp rechts von ξ monoton wachsend.

16. (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*) Welche Aussagen sind für eine auf einem Intervall I definierte stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und ein beliebiges $a \in I$ korrekt?

    (a) [true] $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$.

    (b) [true] f hat eine Stammfunktion.

    (c) [false] $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f und f ist stetig differenzierbar.

    (d) [false] $\frac{d}{dt} \int_a^x f(t)dx = f(x)$.

3 Beispiele, Gegenbeispiele, Rechenaufgaben

17. (*Konvergenz von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind korrekt?

    (a) [true] $\left(\frac{n!}{n}\right)_{n\geq 1}$ ist unbeschränkt.

    (b) [false] $\frac{(-1)^n}{n}$ hat zwei verschiedene Häufungswerte.

    (c) [true] $\frac{3n^3 + 2n^2 + n}{n^2 + 7 - 6n^3} \to -\frac{1}{2}$.

    (d) [true] Falls für eine reelle Folge $(a_n)_n$ für alle n gilt, dass $0 \leq a_n \leq 1/n^2$, dann ist (a_n) eine Nullfolge.

18. (*Konvergenz & absolute Konvergenz von Reihen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) [false] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert absolut nach dem Quotiententest.

    (b) [false] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert absolut nach dem Quotiententest.

    (c) [true] $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$

    (d) [true] $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert absolut nach dem Wurzeltest.

19. (*Funktionsgrenzwerte 1*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [false] $\lim_{x\to\infty} \cos(x) = 1$.

(b) [true] $\lim_{x\searrow 0} \log(x) = -\infty$.

(c) [false] $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 1$.

(d) [true] $\lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

20. (*Funktionsgrenzwerte 2*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$.

(b) [true] $\lim_{x\to 0} x\log(x) = 0$

(c) [true] $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

(d) [false] $\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = \infty$

21. (*Stetigkeit & Differenzierbarkeit*). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [false] $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ ist überall stetig und differenzierbar.

(b) [true] $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in [0,\infty))$ ist überall stetig aber differenzierbar nur für alle $x > 0$.

(c) [true] Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist überall stetig.

(d) [false] Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

ist in $\xi = 0$ differenzierbar.

22. (*Differenzierbarkeit.*) Wir betrachten die Funktion

$$f:\ [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] Der Limes des Differenzenquotienten von f bei $\xi = 0$ divergiert für $0 \neq h \searrow 0$ und daher ist f in $\xi = 0$ nicht differenzierbar.

(b) [false] Es gilt $\lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty$ und daher ist f in $\xi = 0$ nicht differenzierbar.

(c) [false] Es gilt $\lim_{x\searrow 0} f'(x) = \infty$ und daher ist f in $\xi = 0$ nicht differenzierbar.

(d) [true] Es gilt $\lim_{0\neq h\searrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \infty$ und daher ist f in $\xi = 0$ nicht differenzierbar.

23. (*Funktionen, vermischtes.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$ ist streng monoton steigend, obwohl $f'(0)$ verschwindet.

(b) [false] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ hat in $x = 1$ ein (lokales und globales) Maximum, obwohl die Funktion dort nicht $f'(1) = 0$ erfüllt.

(c) [false] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ hat in $x = 0$ ein Minimum, weil $f'(0) = 0$ gilt.

(d) [true] $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^2$ ist stetig in 0 fortsetzbar, weil die einseitigen Grenzwerte für $x \to 0$ beide existieren und übereinstimmen.

24. (*Integrierbare Funktionen und Integral.*) Welche der folgenden Aussagen über beschränkte Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

(a) [true] $f(x) = |x|$ ist stetig und daher auch Riemann integrierbar.

(b) [true] $f(x) = \cos(x)$ ist streng monoton fallend, und daher auch Riemann integrierbar.

(c) [true] Sei f die charakteristische Funktion von $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ (d.h. $f(x) = 1$ für $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ und $f(x) = 0$ sonst), dann ist f Riemann integrierbar und es gilt

$$\int_0^1 f(x)\ dx \ = \ \frac{1}{2}.$$

(d) [false] $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\sin^2(x)}\ dx \ = \ \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\ dx \ = \ 0.$

Teil 2 – Offene Aufgaben

[1] (a) Die Summe zweier konvergenter Folgen (ist wieder konvergent und) konvergiert gegen die Summe der Grenzwerte.

Um diese Aussage zu beweisen, müssen wir zeigen, dass außerhalb jeder ε-Umgebung von $a+b$ nur endlich viele Folgenglieder der Summenfolge $(a_n+b_n)_n$ liegen.

Für vorgegebenes $\varepsilon>0$ liegen wegen $a_n\to a$ und $b_n\to b$ nur jeweils endlich viele der a_n's bzw b_n's außerhalb von $U_{\varepsilon/2}(a)$ bzw $U_{\varepsilon/2}(b)$, sagen wir $a_0,\dots,a_N$ und $b_0,\dots,b_M$. Für alle $n>\max(N,M)$ liegen daher die entsprechenden Folgenglieder (a_n+b_n) in $U_\varepsilon(a+b)$.

(b) Intervallschachtelungsprinzip: Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener, beschränkter Intervalle sodass

(i) $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$

(ii) $\operatorname{diam}(I_n)\to 0 \quad (n\to\infty)$.

Dann $\exists!\, a\in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$

Der Beweis verläuft grob in 4 Schritten:

(1) Aus den Voraussetzungen folgt, dass die Folge der linken (genauso gut der rechten) Randpunkte a_n der I_n $(=[a_n,b_n])$ eine Cauchyfolge bildet

(2) Das Cauchyprinzip ergibt $\exists a=\lim a_n$

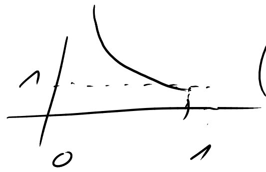
(3) Dieses a liegt wegen des Sandwich-Lemmas in allen I_n

(4) Die Eindeutigkeit von a folgt aus (ii).

(c) Dezimaldarstellung. $\pm\sum_{n=0}^{\infty} a_n 10^{-n}$ konvergiert, weil die geometrische Reihe eine konv. Majorante bildet: $\sum\left|a_n \frac{1}{10^n}\right| \le 9\sum\left(\frac{1}{10}\right)^n < \infty$

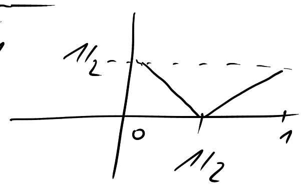
(Alternativ ist die Folge der Partialsummen monoton & beschränkt, also konvergent.)

[2] (a) Bsp f. Funktionen (i) $f(x)=1/x$



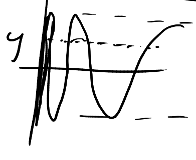
(unbeschränkt für $x\downarrow 0$)

(ii) $f(x)=|x-1/2|$



(nicht diffbar in $x=1/2$)

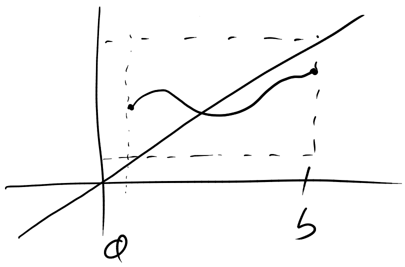
(iii) $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist beschränkt $(|\sin(x)|\le 1)$ und für $x>0$ diffbar nach Kettenregel, kann aber nicht stetig nach $x=0$ fortgesetzt werden



$(\forall y\in[-1,1]\ \exists (x_n)_n$ mit $\sin(x_n)=y\ \forall n)$

[2] (b) <u>Fixpunktsatz</u>. Bedeutung: Es gibt ein $x \in [a,b]$ mit $f(x)=x$, d.h. x schneidet die 1. Mediane

<u>Skizze</u>:



Man sieht, dass die Funktion, soll sie von $[a,b]$ auf $[a,b]$ abbilden, die 1. Mediane schneiden muss

[3] (a) <u>Notwendige Bedingung für lok. Extreme</u>. Sei $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar auf dem Intervall I und sei $\xi \in I$ ein innerer Punkt. Falls f in ξ ein lokales Extremum hat, dann gilt

$$f'(\xi)=0$$

<u>Beweis</u>: (Kombiniere die Def lok. Extr mit der Def der Diffbarkeit)

- ξ lok. Minimum (Max. analog) $\Rightarrow \exists\, U_\varepsilon(\xi)$ mit $f(x) \geq f(\xi)\ \forall x \in U_\varepsilon(\xi)$ (*)
- f diffbar in $\xi \Rightarrow \lim\limits_{\xi \neq x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ existiert und ist endlich, also insbes

$$\lim_{x \nearrow \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi) = \lim_{x \searrow \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

Zähler ≥ 0 wg (*)
Nenner ≤ 0 $\Rightarrow f'(\xi) \leq 0$

Zähler ≥ 0 wg (*)
Nenner ≥ 0
$\Rightarrow f'(\xi) \geq 0$

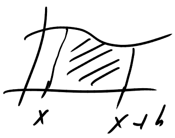
- Daher insgesamt $f'(\xi)=0$. ∎

(b) <u>Hauptsatz Diff-Int</u>. Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $a \in I$ beliebig. Dann ist die für $x \in I$ die Funktion $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ stetig diffbar & es gilt $F' = f$

<u>Beweisskizze</u>: Es ist z.z., dass $F' = f$ gilt, damit ist F automatisch C^1!
Das erreicht man durch berechnen des Differenzialquotienten

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \overset{MWS-\int}{=} \frac{1}{h} f(\xi_h)\cdot h \quad \text{für ein } \xi_h \in [x, x+h]$$

$$\xrightarrow{h \to 0} f(x) \qquad [\Rightarrow \xi_h \to x \text{ für } h \to 0]$$

anschaulich bedeutet dieser Schritt $\int_x^{x+h} f(t)\,dt =$  $\hat{=}$  $= f(\xi)\cdot h$

$x \leq \xi \leq x+h$