

Name, Vorname

Matrikelnummer

Unterschrift

Dauer: 60 Minuten. Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.
Bitte schreiben Sie in den Rahmen und **leserlich**.

Aufgabe 1. (10 Punkte). Seien die Kurve C mit Parametrisierung $\gamma : t \in [-1, 1] \rightarrow (1+t^2, t)$ und die Abbildung $f(x, y) = 4y(x^2 - 2y^2)^{-1}(1 + 4y^2)^{-1/2}$ gegeben. Berechnen Sie $\int_C f ds$.

Aufgabe 2. (10 Punkte). Seien $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z + x^2 = 2y^2\}$, $p = (0, 0, 0) \in M$ und K und H die Gaußsche bzw. die mittlere Krümmung von M im Punkt p . Berechnen Sie $K + H^2$.

Aufgabe 3. (10 Punkte). Seien $Q = [-1, 1]^2 \setminus (-1/2, 1/2)^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $E = \cup_{k=0}^{+\infty} 4^{-k}Q$, wobei $rQ = \{rq : q \in Q\}$ für $r > 0$. Beweisen Sie, dass E messbar ist und berechnen Sie $m(E)$.

Aufgabe 4. (10 Punkte). Seien $f_k : x \in [0, 10] \mapsto (\sin x)^k$. Beweisen Sie, dass $\int_0^{10} f_k(x) dx \rightarrow 0$. Stellen Sie ein Beispiel von Abbildungen $g_k \in \mathcal{L}(0, 10)$ vor, sodass $\int_0^{10} g_k(x) dx \rightarrow 0$ und $\int_0^{10} g_k^2(x) dx \not\rightarrow 0$.