Analysis — Simulierte Prüfung, May 2015 - **Teil 1**

Name, Vorname ☐ Matrikelnummer ☐

Unterschrift ☐ Mundliche Prüfung: Ja ☐, Nein ☐

Dauer: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt. Jede Übung hat genau eine korrekte Antwort. Merken Sie sie so ■ an. Für jede Antwort: Richtig = +3, Leer = 0, Falsch= −1.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

1. Sei f mit $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ gegeben. Dann: ■ $\int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq 2$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\int_{-1}^{1} (f(x))^2\,\mathrm{d}x = 4$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\int_{-1}^{1} f(|x|)\,\mathrm{d}x = 2$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
2. Sei $f \in R[0,+\infty)$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. $\boxed{\mathbf{c}}$ f stetig $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. ■ f konvex $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. Sei O eine offene nicht leere Teilmenge des metrischen Raum (X,d). Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ O ist nicht kompakt. $\boxed{\mathbf{b}}$ $\exists x \in X\, \forall \varepsilon > 0 : O \setminus B_\varepsilon(x)$ ist abgeschlossen. $\boxed{\mathbf{c}}$ O ist nicht abgeschlossen. ■ $\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in X : O \cap B_\varepsilon(x)$ ist offen.
4. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und nicht leer. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $f^{-1}(K)$ offen. ■ $f^{-1}(K)$ abgeschlossen. $\boxed{\mathbf{c}}$ $f^{-1}(K)$ kompakt. $\boxed{\mathbf{d}}$ $f^{-1}(K)$ beschränkt.
5. Sei p das McLaurinpolynom von $f : x \mapsto \sin(x^3)$ der Ordnung 11. Welchen Wert hat $p(1)$? ■ $5/6$. $\boxed{\mathbf{b}}$ 5. $\boxed{\mathbf{c}}$ $6/5$. $\boxed{\mathbf{d}}$ 6.
6. Sei die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 2^k (x-2)^k$ gegeben. Welchen Wart hat ihr Konvergenzradius? $\boxed{\mathbf{a}}$ $+\infty$. $\boxed{\mathbf{b}}$ 0. ■ $1/2$. $\boxed{\mathbf{d}}$ 2.
7. Sei $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (x-3)^k/(k3^k)$ gegeben. Welchen Wert hat $f'(4)$? ■ $1/2$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $1/3$. $\boxed{\mathbf{c}}$ 3. $\boxed{\mathbf{d}}$ 0.
8. Berechnen Sie $I = \int_{-1}^{1} (\cos x \sin x + \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $I = -\mathrm{e}$. ■ $I = \mathrm{e} - 1/\mathrm{e}$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $I = 1/\mathrm{e} - \mathrm{e}$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $I = \mathrm{e}$.
9. Seien $a_k \geq 0$ und $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = a_0$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $f''(0) = a_2$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $(\forall k \in \mathbb{N} : a_{2k} = 0) \Rightarrow f$ konvex. ■ $f \in R[0,+\infty) \Rightarrow f = 0$.
10. Sei $f \in R[0,+\infty)$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $f^2 \in R[0,+\infty)$. ■ $2f \in R[0,+\infty)$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $f^+ \in R[0,+\infty)$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\sqrt{f^+} \in R[0,+\infty)$.

Bitte nicht unter der Linie schreiben

Analysis — Simulierte Prüfung, May 2015 - **Teil 2**

Name, Vorname ______________________ Matrikelnummer ______________

Unterschrift ______________________ Mundliche Prüfung: Ja ☐, Nein ☐

Zeit: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

11. Berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 9^k \pi^{2k}}{(2k)!}.$$

Merken Sie die richtige Antwort an:

-7	-6	-5	-4	-3	$-$[redacted]	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

(Richtig $= +5$, Leer $= 0$, Falsch$= -2$)

12. Berechnen Sie

$$2\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Merken Sie die richtige Antwort an:

0	[redacted]	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

(Richtig $= +5$, Leer $= 0$, Falsch$= -2$)

13. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$f \in R[1, +\infty),\ \forall x \geq 1 : f(x) \geq \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)^{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Zur Erinnerung $\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \,:\, z \leq x\}$.

(Bis zum $= +10$, Leer $=$ Falsch $= 0$)

Bitte nicht unter der Linie schreiben