Name, Vorname [ ] Matrikelnummer [ ]

Unterschrift [ ] Mundliche Prüfung: Ja [ ], Nein [ ]

Dauer: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt. Jede Übung hat genau eine korrekte Antwort. Merken Sie sie so ■ an. Für jede Antwort: Richtig = +3, Leer = 0, Falsch= −1.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

1. Sei f mit $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ gegeben. Dann: **a** $\int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq 2$. **b** $\int_{-1}^{1} (f(x))^2\,\mathrm{d}x = 4$. **c** $\int_{-1}^{1} f(|x|)\,\mathrm{d}x = 2$. **d** $\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

2. Sei $f \in R[0,+\infty)$. Dann: **a** $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. **b** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. **c** f stetig $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. **d** f konvex $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. Sei O eine offene nicht leere Teilmenge des metrischen Raum (X,d). Dann: **a** O ist nicht kompakt. **b** $\exists x \in X\, \forall \varepsilon > 0 : O \setminus B_\varepsilon(x)$ ist abgeschlossen. **c** O ist nicht abgeschlossen. **d** $\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in X : O \cap B_\varepsilon(x)$ ist offen.

4. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und nicht leer. Dann: **a** $f^{-1}(K)$ offen. **b** $f^{-1}(K)$ abgeschlossen. **c** $f^{-1}(K)$ kompakt. **d** $f^{-1}(K)$ beschränkt.

5. Sei p das McLaurinpolynom von $f : x \mapsto \sin(x^3)$ der Ordnung 11. Welchen Wert hat $p(1)$? **a** 5/6. **b** 5. **c** 6/5. **d** 6.

6. Sei die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 2^k (x-2)^k$ gegeben. Welchen Wart hat ihr Konvergenzradius? **a** $+\infty$. **b** 0. **c** 1/2. **d** 2.

7. Sei $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (x-3)^k/(k3^k)$ gegeben. Welchen Wert hat $f'(4)$? **a** 1/2. **b** 1/3. **c** 3. **d** 0.

8. Berechnen Sie $I = \int_{-1}^{1} (\cos x \sin x + \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x$. Dann: **a** $I = -\mathrm{e}$. **b** $I = \mathrm{e} - 1/\mathrm{e}$. **c** $I = 1/\mathrm{e} - \mathrm{e}$. **d** $I = \mathrm{e}$.

9. Seien $a_k \geq 0$ und $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann: **a** $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = a_0$. **b** $f''(0) = a_2$. **c** $(\forall k \in \mathbb{N} : a_{2k} = 0) \Rightarrow f$ konvex. **d** $f \in R[0,+\infty) \Rightarrow f = 0$.

10. Sei $f \in R[0,+\infty)$. Dann: **a** $f^2 \in R[0,+\infty)$. **b** $2f \in R[0,+\infty)$. **c** $f^+ \in R[0,+\infty)$. **d** $\sqrt{f^+} \in R[0,+\infty)$.

Bitte nicht unter der Linie schreiben

Name, Vorname [ ] Matrikelnummer [ ]

Unterschrift [ ] Mundliche Prüfung: Ja [ ], Nein [ ]

Zeit: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

11. Berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 9^k \pi^{2k}}{(2k)!}.$$

Merken Sie die richtige Antwort an:

$\boxed{-7}$ $\boxed{-6}$ $\boxed{-5}$ $\boxed{-4}$ $\boxed{-3}$ $\boxed{-2}$ $\boxed{-1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{12}$ $\boxed{13}$ $\boxed{14}$ $\boxed{15}$ $\boxed{16}$ $\boxed{17}$

(Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

12. Berechnen Sie

$$2\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Merken Sie die richtige Antwort an:

$\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{12}$ $\boxed{13}$ $\boxed{14}$ $\boxed{15}$ $\boxed{16}$ $\boxed{17}$ $\boxed{18}$ $\boxed{19}$ $\boxed{20}$ $\boxed{21}$ $\boxed{22}$ $\boxed{23}$ $\boxed{24}$ $\boxed{25}$

(Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

13. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$f \in R[1, +\infty),\ \forall x \geq 1 : f(x) \geq \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)^{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Zur Erinnerung $\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \,:\, z \leq x\}$.

(Bis zum = +10, Leer = Falsch = 0)