Dauer: 60 Minuten.

Kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit, kein Internet. Unterlagen sind erlaubt.

Vollständige Lösungsverfahren sind hochzuladen. Ohne Lösungsverfahren werden Ergebnisse nicht bewertet.

Alle Aufgaben bekommen bis zu +10 Punkte:
0-24 Punkte: Note 5, 25-29 Punkte: Note 4, 30-34 Punkte: Note 3, 35-39 Punkte: Note 2, 40-50 Punkte: Note 1.

Wenn Sie nicht drücken können, benutzen Sie bitte ein einfaches A4 Blatt.

Technische Fragen bitte an SSC (+43-1-4277-50403).

Wenn Sie mit dem Hochladen problem haben, melden Sie sich beim SSC oder bei ulisse.stefanelli@univie.ac.at **ausschließlich vor 17:00 Uhr.**

Aufgabe 1. Finden Sie alle die Funktionen $u \in C(\mathbb{R})$, die die Gleichung $u(x) = \int_1^{u(x)} s \, \mathrm{d}s$ für alle $x \in \mathbb{R}$ lösen.

Aufgabe 2. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ungerade und p ihr McLaurin-Polynom der Ordnung 2021. Zeigen Sie, dass p ungerade ist.

Aufgabe 3. Sei der metrischer Raum (X, d) mit $X = [0, 1)$ und $d(x, y) = |x - y|$ gegeben. Zeigen Sie, dass (X, d) nicht vollständig ist.

Aufgabe 4. Untersuchen Sie die Abbildung

$$g(x,y) = \begin{cases} |xy| \ln(|xy|) & \text{für } xy \neq 0, \\ 0 & \text{für } xy = 0, \end{cases}$$

auf Extrema.

Aufgabe 5. Sei $h : [0, +\infty) \to [0, a)$ für $a > 0$ gegeben und $h_n : [0, +\infty) \to [0, 1]$ durch $h_n(x) = (h(nx))^n$ definiert. Zeigen Sie folgende:

(a) $a < 1 \quad \Rightarrow \quad h_n \to 0$ gleichmäßig;

(b) $a = 1,\ h$ monoton fallend $\quad \Rightarrow \quad h_n \to 0$ gleichmäßig;

(c) $a \geq 1 \quad \not\Rightarrow \quad h_n \to 0$ punktweise.

Lösungen:

1. Die Gleichung kann man als $u(t) = (u(t))^2/2 - 1/2$ umschreiben. Um sie zu lösen, für alle $t \in \mathbb{R}$ muss $u(t) = 1 + \sqrt{2}$ oder $u(t) = 1 - \sqrt{2}$. Da u stetig sein muss, hat die Aufgabe genau zwei Lösungen und zwar $u(t) \equiv 1 + \sqrt{2}$ und $u(t) \equiv 1 - \sqrt{2}$.

2. Da f ungerade ist, ist f' gerade:

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) + f(x)}{-h} = f'(x).$$

   Da f' gerade ist, ist f'' ungerade:

$$f''(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(-x+h) - f'(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x-h) - f'(x)}{h} = -\lim_{-h\to 0} \frac{f'(x-h) + f'(x)}{-h} = -f''(x).$$

   Man kann das Argument iterieren, um $f^{(2k)}$ ungerade und $f^{(2k+1)}$ gerade zu finden. Deshalb ist $f^{(2k)}(0) = 0$ und $p(x) = \sum_{k=0}^{1010} (f^{(2k+1)}(0)/(2k+1)!)\, x^{2k+1}$, d.h. eine Summe von ungeraden Polynomen. Deshalb ist p ungerade.

3. Die Folge $a_n = 1 - 1/n \in X$ konvergiert in $\mathbb{R}$. Sie ist dehalb eine Cauchy-Folge. Allerdings ist der Limes 1, was in X nicht enthalten ist. X ist deshalb nicht vollständig.

4. Die Funktion $j(t) = g(\sqrt{t}, \sqrt{t}) = t \ln t$ für $t \geq 0$ hat in 0 ein lokales Maximum, in e^{-1} ein globales Minimum und kein globales Maximum. Daher hat g lokale Minima auf den Axen $\{xy = 0\}$, globale Minima auf den Hyperbeln$\{|xy| = \mathrm{e}^{-1}\}$ und kein globales Maximum.

5. (a) $\|h_n - 0\|_\infty = \sup_{x\geq 0} |h_n(x)| \leq a^n \to 0$.
   (b) Wir haben $h(x) \leq h(0) < 1$ für alle $t \geq 0$. Daher $\|h_n - 0\|_\infty = \sup_{x\geq 0} |h_n(x)| \leq (h(1))^n \to 0$.
   (c) Mit $h(x) \equiv 1$ hat man $h_n \equiv 1 \not\to 0$.