Dauer: 60 Minuten.

Kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit, kein Internet. Unterlagen sind erlaubt.

Vollständige Lösungsverfahren sind hochzuladen. Ohne Lösungsverfahren werden Ergebnisse nicht bewertet.

Alle Aufgaben bekommen bis zu +10 Punkte:
0-24 Punkte: Note 5, 25-29 Punkte: Note 4, 30-34 Punkte: Note 3, 35-39 Punkte: Note 2, 40-50 Punkte: Note 1.

Wenn Sie nicht drücken können, benutzen Sie bitte ein einfaches A4 Blatt.

Technische Fragen bitte an SSC (+43-1-4277-50403).

Wenn Sie mit dem Hochladen problem haben, melden Sie sich beim SSC oder bei ulisse.stefanelli@univie.ac.at **ausschließlich vor 17:00 Uhr.**

Aufgabe 1. Seien $f_n(x) = nx\,\mathrm{e}^{-nx}$ und $g_n(x) = \int_0^x f_n(s)\,\mathrm{d}s$ für $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f_n \to 0$ punktweise auf $[0, +\infty)$ aber nicht gleichmäßig, und dass $g_n \to 0$ gleichmäßig auf $[0, +\infty)$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie $\int_0^{2\pi} \cos(\cos x) \sin x \,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie die Funktion $v : (x, y) \in D \mapsto y^2 \cos x$ mit $D = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$ auf Extrema.

Aufgabe 4. Seien $X = \mathbb{R}$ und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $d(x, y) = \arctan(|x - y|)$. Zeigen Sie, dass (X, d) ein vollständiger metrischer Raum ist.

Aufgabe 5. Sei $f(x) = (1 + x)^x$ für $|x| < 1$, und p ihr McLaurin-Polynom der Ordnung 3. Berechnen Sie $p(-1) + p'(1)$.

Lösungen:

1. Für alle $x \geq 0$ hat man $\lim_{n\to\infty} nx\,\mathrm{e}^{-nx} = 0$, sodass $f_n(x) \to 0$ punktweise auf $[0,\infty)$. Da $f_n'(x) = (n-n^2x)\mathrm{e}^{-nx}$ ist $\sup|f_n| = f_n(1/n) = \mathrm{e}^{-1} \not\to 0$ und $f_n \not\to 0$ gleichmäßig auf $[0,\infty)$. Man berechnet
$$g_k(x) = \int_0^x ns\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s = -x\mathrm{e}^{-nx} + \int_0^x \mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s = -\left(x+\frac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-nx} + \frac{1}{n}$$
und hat
$$\sup_{x\geq 0}|g_n(x)| \leq \sup_{x\geq 0} x\mathrm{e}^{-nx} + \frac{2}{n} = \frac{1}{n\mathrm{e}} + \frac{2}{n} \to 0.$$
Daher $g_n \to 0$ gleichmäßig auf $[0,\infty)$.

2. Da $\cos(\cos x)\sin x = -(\sin(\cos x))'$ hat man
$$\int_0^{2\pi} \cos(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = -[\sin(\cos x)]_0^{2\pi} = -\sin(\cos 2\pi) + \sin(\cos 0) = -\sin(1) + \sin(1) = 0.$$

3. Da $\nabla v(x,y) = (-y^2\sin x, 2y\cos x)$, ist $K\{(x,0) \mid x \in (0,2\pi)\}$ die Menge der kritischen Punkte von v in $(0,2\pi)\times(-1,1)$. Auf K ist $v=0$. Allerdings hat man $v(0,1) = 1$ und $v(\pi,1) = -1$. Daher sind die Punkte in K keine Extrema von v. Auf $\{y=\pm 1\}$ hat man $v(x,\pm 1) = \cos x$ mit Maximum 1 für $x=0$ und $x = 2\pi$ und Minimum -1 für $x=\pi$. Auf $\{x=0\}$ und $\{x=2\pi\}$ hat man $v(0,y) = v(2\pi,y) = y^2$ mit Maximum 1 für $y=\pm 1$ und Minimum 0 für $y=0$. Daher sind $(0,1)$, $(0,-1)$, $(2\pi,1)$ und $(2\pi,-1)$ die Maximumstellen on v, mit Maximum 1, und $(\pi,1)$, $(\pi,-1)$ die Minimustellen von v, mit Minimum -1.

4. Da $s\geq 0 \Rightarrow \arctan(s)\geq 0$, hat man $d(x,y)\geq 0$ für alle x, $y\in\mathbb{R}$. Da $\arctan(s) = 0$ genau dann, wenn $s=0$ hat man: $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$. Ferner ist $d(x,y) = \arctan(|x-y|) = \arctan(|y-x|) = d(y,x)$.

   Für alle a, $b\geq 0$ kann man checken, dass $\arctan(a+b) \leq \arctan(a) + \arctan(b)$. In der Tat, hat man
$$\arctan(a+b) - \arctan(a) = \int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{1+(a+t)^2} \leq \int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(b). \tag{1}$$
   Da $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ und arctan monoton wachsend ist, hat man
$$d(x,y) = \arctan(|x-y|) \leq \arctan(\underbrace{|x-z|}_{a} + \underbrace{|z-y|}_{b}) \overset{(1)}{\leq} \arctan(\underbrace{|x-z|}_{a}) + \arctan(\underbrace{|z-y|}_{b}) = d(x,z) + d(z,y)$$
   sodass die Dreieckungleichung stimmt.

   Sei jetzt (x_n) eine Cauchy-Folge in (X,d). Dann ist $d(x_n,x_m)\leq\varepsilon$ für n, m groß genug. Damit ist $|x_n - x_m| \leq \tan\varepsilon$ für n, m groß genug und (x_n) ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, hat man $x_{n_k}\to x$ für eine gewisse Teilfolge und wir haben $d(x_{n_k},x) = \arctan(|x_{n_k}-x|) \leq |x_{n_k}-x| \to 0$ für $k\to\infty$. Daher konvergiert $x_{n_k}\to x$ in (X,d), der somit vollständig ist.

5. Man hat $f(0) = 1$ und
$$f'(x) = f(x)\left(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right), \quad f'(0) = 0,$$
$$f''(x) = f'(x)\left(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right) + f(x)\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}\right), \quad f''(0) = 2,$$
$$f'''(x) = f''(x)\left(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right) + 2f'(x)\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}\right) + f(x)\left(-\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^3}\right),$$
$$f'''(0) = -3.$$
   Daher ist $p(x) = 1 + x^2 - x^3/2$ und $p(-1) + p'(1) = 3$.