Dauer: 60 Minuten.

Kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit, kein Internet. Unterlagen sind erlaubt.

Vollständige Lösungsverfahren sind hochzuladen. Ohne Lösungsverfahren werden Ergebnisse nicht bewertet.

Alle Aufgaben bekommen bis zu +10 Punkte:
0-24 Punkte: Note 5, 25-29 Punkte: Note 4, 30-34 Punkte: Note 3, 35-39 Punkte: Note 2, 40-50 Punkte: Note 1.

Wenn Sie nicht drücken können, benutzen Sie bitte ein einfaches A4 Blatt.

Technische Fragen bitte an SSC (+43-1-4277-50403).

Wenn Sie mit dem Hochladen problem haben, melden Sie sich beim SSC oder bei ulisse.stefanelli@univie.ac.at **ausschließlich vor 10.30 Uhr.**

Aufgabe 1. Für $\alpha > 1$, seien $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \max\{0, n - n^\alpha |x - n|\}.$$

Zeigen Sie, dass $f_n \to 0$ punktweise auf $[0, +\infty)$ aber nicht gleichmäßig. Bestimmen Sie die Werte von α, sodass $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \le n$ und sodass $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \to 0$ für $n \to +\infty$.

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ zweimal differenzierbar und wachsend und sei $g(x) = \int_0^{f(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$. Zeigen Sie, dass g wachsend. Ferner zeigen Sie, dass g konvex ist, falls f konvex ist.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie die Funktion $v : (x, y) \in D \mapsto xy\mathrm{e}^{x^2}$ mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \ge 0,\ x^2 \le y \le 1\}$ auf Extrema.

Aufgabe 4. Seien $X = [0, 2\pi)$ und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $d(x, y) = \min\{|x - y|, 2\pi - |x - y|\}$. Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 5. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{(k)}(0) = 2$ (k-te Ableitung) für $k = 0, 1, 2, \ldots$, und p das McLaurin-Polynom von $x \mapsto xf(x)$ der Ordnung 4. Berechnen Sie $p(0) + 3p(1)$.

Lösungen:

1. Da $f_n(y) = 0$ für alle $y \leq n - n^{1-\alpha}$ und $n - n^{1-\alpha} \to +\infty$ für $n \to +\infty$, hat man $f_n \to 0$ punktweise auf $[0, +\infty)$. Allerdings ist $\max f_n = f_n(n) = n$ und somit $f_n \not\to 0$ gleichmäßig. Man berechnet $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = n^{2-\alpha}$. Dadurch hat man
$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \leq n \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \geq 1, \qquad \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 2.$$

2. Sei $F(y) = \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t$. Dann hat man $g(x) = F(f(x))$. Man berechnet
$$g'(x) = f(f(x))f'(x) \geq 0,$$
$$g''(x) = f'(f(x))(f'(x))^2 + f(f(x))f''(x) \geq 0.$$

3. Da $\nabla f(x, y) = (y\mathrm{e}^{x^2} + 2x^2 y\mathrm{e}^{x^2}, x\mathrm{e}^{x^2})$, ist $(0, 0)$ der einzige kritischer Punkt, der allerdings nicht im Inneren von D ist. Deshalb muss man den Rand von D untersuchen.

   Auf $x = 0$ hat man $f = 0$. Da $f \geq 0$ auf D, sind alle die Punkte $(0, y)$ mit $y \in [0, 1]$ Minimumstellen mit $f(0, y) = 0$.

   Auf $y = 1$ hat man $x \in [0, 1] \mapsto f(x, 1) = x\mathrm{e}^{x_2}$, was in $x = 1$ maximal ist mit $f(1, 1) = \mathrm{e}$. Auf $\{y = x^2\}$ hat man $x \in [0, 1] \mapsto f(x, x^2) = x^3\mathrm{e}^{x^2}$, was steigend ist. Dadurch ist $(1, 1)$ der einzige Maximumstelle.

4. Checken wir, dass d eine Metrik ist. Seien x, $y \in X$:

   - Da $|x - y| < 2\pi$, ist $d(x, y) \geq 0$;
   - Falls $x = y$ hat man $d(x, y) = \min\{0, 2\pi\} = 0$;
   - Falls $d(x, y) = 0$ hat man $|x - y| = 0$ (und somit $x = y$) oder $|x - y| = 2\pi$, was unzulässig ist;
   - $d(x, y) = \min\{|x - y|, 2\pi - |x - y|\} = \min\{|y - x|, 2\pi - |y - x|\} = d(y, x)$.

   Um die Dreiecksungleichung zu checken, identifizieren wir X und den Kreis mit Radius 1 durch die Abbildung $t \in X \mapsto (\cos t, \sin t)$. Dann ist $d(x, y)$ die Länge der minimalen Sehne S, die die Punkte $(\cos x, \sin x)$ und $(\cos y, \sin y)$ verbindet. Wir können o.B.d.A. $x = 0$ nehmen. Betrachten wir $z \in [0, 2\pi)$:

   - $z \leq y \leq \pi$ oder $\pi \leq y \leq z \quad \Rightarrow \quad d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$;
   - $y \leq z \leq \pi$ oder $\pi \leq z \leq y \quad \Rightarrow \quad d(x, y) = d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$;
   - $y \leq \pi \leq z$ oder $z \leq \pi \leq y \quad \Rightarrow \quad d(x, y) \leq \pi \leq d(x, z) + d(z, y)$;

   und somit wurden alle Möglichkeiten gedeckt, sehe Abbildung 1

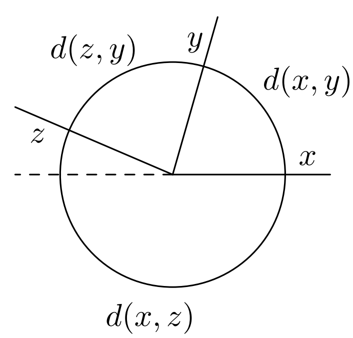

Abbildung 1: Der Fall $y \leq z \leq \pi$.

5. Man hat $g(0) = 0$, $g'(0) = f(0) + 0 \cdot f'(0) = 2$, $g''(0) = 2f'(0) + 0 \cdot f''(0) = 4$, $g'''(0) = 3f''(0) + 0 \cdot f'''(0) = 6$ und $g''''(0) = 4f'''(0) + 0 \cdot f''''(0) = 8$. Somit ist $p(x) = 2x + 2x^2 + x^3 + x^4/3$, $p(0) = 0$, $p(1) = 5 + 1/3$ und $p(0) + 3p(1) = 16$.