Dauer: 60 Minuten.

Kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit, kein Internet. Unterlagen sind erlaubt.

Vollständige Lösungsverfahren sind hochzuladen. Ohne Lösungsverfahren werden Ergebnisse nicht bewertet.

Alle Aufgaben bekommen bis zu +10 Punkte:
0-24 Punkte: Note 5, 25-29 Punkte: Note 4, 30-34 Punkte: Note 3, 35-39 Punkte: Note 2, 40-50 Punkte: Note 1.

Wenn Sie nicht drücken können, benutzen Sie bitte ein einfaches A4 Blatt.

Technische Fragen bitte an SSC (+43-1-4277-50403).

Wenn Sie mit dem Hochladen problem haben, melden Sie sich beim SSC oder bei ulisse.stefanelli@univie.ac.at **ausschließlich vor 10.30 Uhr.**

Aufgabe 1. Für $\alpha > 1$, seien $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \max\{0, n - n^\alpha |x - n|\}.$$

Zeigen Sie, dass $f_n \to 0$ punktweise auf $[0, +\infty)$ aber nicht gleichmäßig. Bestimmen Sie die Werte von α, sodass $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \le n$ und sodass $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \to 0$ für $n \to +\infty$.

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ zweimal differenzierbar und wachsend und sei $g(x) = \int_0^{f(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$. Zeigen Sie, dass g wachsend. Ferner zeigen Sie, dass g konvex ist, falls f konvex ist.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie die Funktion $v : (x, y) \in D \mapsto xy\mathrm{e}^{x^2}$ mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \ge 0, \ x^2 \le y \le 1\}$ auf Extrema.

Aufgabe 4. Seien $X = [0, 2\pi)$ und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $d(x, y) = \min\{|x - y|, 2\pi - |x - y|\}$. Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 5. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{(k)}(0) = 2$ (k-te Ableitung) für $k = 0, 1, 2, \ldots$, und p das McLaurin-Polynom von $x \mapsto xf(x)$ der Ordnung 4. Berechnen Sie $p(0) + 3p(1)$.