Dauer: 60 Minuten.

Kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit, kein Internet. Unterlagen sind erlaubt.

Vollständige Lösungsverfahren sind hochzuladen. Ohne Lösungsverfahren werden Ergebnisse nicht bewertet.

Alle Aufgaben bekommen bis zu +10 Punkte:
0-24 Punkte: Note 5, 25-29 Punkte: Note 4, 30-34 Punkte: Note 3, 35-39 Punkte: Note 2, 40-50 Punkte: Note 1.

Wenn Sie nicht drücken können, benutzen Sie bitte ein einfaches A4 Blatt.

Technische Fragen bitte an SSC (+43-1-4277-50403).

Plausibilitätscheck im moodle am Montag 27.7 von 10 bis 11 Uhr (nicht alle Studierenden sondern nur die, die eine entsprechende Einladung bis Samstag 25.7, 23.59 Uhr per E-Mail erhalten).

Aufgabe 1. Seien $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \min\{n^2 x, \max\{2n - n^2 x, 0\}\}.$$

Zeigen Sie, dass $f_n \to 0$ punktweise aber nicht gleichmäßig und dass $f_n \to 0$ gleichmäßig auf $(a, 1]$ für alle $a > 0$.

Aufgabe 2. Seien $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : (0,2) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(t) = 2\int_0^t s\,\mathrm{d}s, \quad g(t) = \int_1^{h(t)} \ln r\,\mathrm{d}r.$$

Berechnen Sie $g(1) + g'(1)$.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie die Funktion $v : (x,y) \in D \mapsto y^3 - x^2 y$ mit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y \leq 1\}$ auf Extrema.

Aufgabe 4. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Man definiert

$$D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } 0 < d(x,y) \leq 1, \\ 2 & \text{für } 1 < d(x,y). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass (X, D) ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0, +\infty)$ gegeben durch $f(x) = \|x\|_2^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\Delta f = 0$ genau dann, wenn $\alpha = 0$ or $\alpha = 2 - n$ ist.
(Zur Erinnerung: $\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f)$)

Lösungen:

1. Wir haben $f_n(0) = 0$ und $f_n(x) = 0$ für alle $x \in (0,1]$ und $n > 2/x$. Deshalb konvergiert $f_n \to 0$ punktweise. Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, da $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \not\to 0 = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x$.

   Für alle $a > 0$ und $n > 2/a$ hat man $f_n \equiv 0$ auf $(a,1]$. Deshalb $\sup_{x\in(a,1]} |f_n(x) - 0| = 0$ für $n > 2/a$ und $f_n \to 0$ gleichmäßig auf $(a,1]$.

2. Man hat $h(t) = t^2$ und

$$g(1) = \int_1^{h(1)} \ln r\,\mathrm{d}r = \int_1^1 \ln r\,\mathrm{d}r = 0, \quad g'(t) = \ln(h(t))\,h'(t), \quad g'(1) = (\ln 1)2 = 0.$$

   Somit ist $g(1) + g'(1) = 0$.

3. Da $\nabla v(x,y) = (-2xy, 3y^2 - x^2)$ ist $(0,0)$ der einzige kritische Punkt. Man hat $v(0,0) = 0$ und $v(0,\pm\varepsilon) = \pm\varepsilon^3$ für alle $\varepsilon \in (0,1]$. Somit ist $(0,0)$ keine lokale Minimum- oder Maximumstelle.

   Untersuchen wir den Rand $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 1-x\}$. Dort ist $v(x,1-x) = (1-x)((1-x)^2 - x^2) = (1-x)(1-2x)$, was eine Minimumstelle für $x = 3/4$ hat. Um zu zeigen, dass $(3/4,1/4)$ eine lokale Minimumstelle für v ist, kann man v im Dreieck $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ y \leq x, \ y \leq 1-x\}$ untersuchen. Im Inneren von T hat v keinen kritischen Punkt. Auf $\{x = y\}$ und $\{y = 0\}$ ist $v = 0$.Deshalb ist $\min_T v = v(3/4,1/4) = -1/8$.

   Die Funktion v hat keine globale Maximum- oder Minimumstellen, da $\lim_{x\to\infty} v(x,1-x) = +\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} v(1,x) = -\infty$.

4. Da $D(x,y) \geq 0$, $D(x,y) = D(y,x)$, and $D(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0$, muss man nur die Dreiecksungleichung $D(x,y) \leq D(x,z) + D(z,y)$ checken. Falls $x = z = y$, $x = z \neq y$, oder $x \neq z = y$, gilt die Dreiecksungleichung (als Gleichung). Falls $x \neq z \neq y$, hat man $D(x,z) + D(z,y) \geq 2$, und die Dreiecksungleichung gilt nochmals, da $D(x,y) \leq 2$.

5. Man hat $\nabla f(x) = \alpha\|x\|_2^{\alpha-1}\nabla(\|x\|_2) = \alpha\|x\|_2^{\alpha-2}x$ und

$$\Delta f(x) = \nabla\cdot(\nabla f(x)) = \nabla\cdot\left(\alpha\|x\|_2^{\alpha-2}x\right) = \alpha(\alpha-2)\|x\|_2^{\alpha-3}\frac{x}{\|x\|_2}\cdot x + \alpha\|x\|_2^{\alpha-2}n = \alpha(\alpha-2+n)\|x\|_2^{\alpha-2}$$

   und haben $\Delta f = 0$ genau dann, wenn entweder $\alpha = 0$ oder $\alpha - 2 + n = 0$.