Dauer: 60 Minuten.

Kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit, kein Internet. Unterlagen sind erlaubt.

Vollständige Lösungsverfahren sind hochzuladen. Ohne Lösungsverfahren werden Ergebnisse nicht bewertet.

Alle Aufgaben bekommen bis zu +10 Punkte:
0-24 Punkte: Note 5, 25-29 Punkte: Note 4, 30-34 Punkte: Note 3, 35-39 Punkte: Note 2, 40-50 Punkte: Note 1.

Wenn Sie nicht drücken können, benutzen Sie bitte ein einfaches A4 Blatt.

Technische Fragen bitte an SSC (+43-1-4277-50403).

Plausibilitätscheck im moodle am Montag 27.7 von 10 bis 11 Uhr (nicht alle Studierenden sondern nur die, die eine entsprechende Einladung bis Samstag 25.7, 23.59 Uhr per E-Mail erhalten).

Aufgabe 1. Seien $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \min\{n^2 x, \max\{2n - n^2 x, 0\}\}.$$

Zeigen Sie, dass $f_n \to 0$ punktweise aber nicht gleichmäßig und dass $f_n \to 0$ gleichmäßig auf $(a,1]$ für alle $a > 0$.

Aufgabe 2. Seien $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : (0,2) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(t) = 2\int_0^t s\,\mathrm{d}s, \quad g(t) = \int_1^{h(t)} \ln r\,\mathrm{d}r.$$

Berechnen Sie $g(1) + g'(1)$.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie die Funktion $v : (x,y) \in D \mapsto y^3 - x^2 y$ mit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x + y \leq 1\}$ auf Extrema.

Aufgabe 4. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Man definiert

$$D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } 0 < d(x,y) \leq 1, \\ 2 & \text{für } 1 < d(x,y). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass (X,D) ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0,+\infty)$ gegeben durch $f(x) = \|x\|_2^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\Delta f = 0$ genau dann, wenn $\alpha = 0$ or $\alpha = 2 - n$ ist.
(Zur Erinnerung: $\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f)$)