Dauer: 60 Minuten.

Kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit, kein Internet. Unterlagen sind erlaubt.

Vollständige Lösungsverfahren sind hochzuladen. Ohne Lösungsverfahren werden Ergebnisse nicht bewertet.

Alle Aufgaben bekommen bis zu +10 Punkte:
0-24 Punkte: Note 5, 25-29 Punkte: Note 4, 30-34 Punkte: Note 3, 35-39 Punkte: Note 2, 40-50 Punkte: Note 1.

Wenn Sie nicht drücken können, benutzen Sie bitte ein einfaches A4 Blatt.

Technische Fragen bitte an SSC (+43-1-4277-50403).

Aufgabe 1. Sei die Funktionenfolge $f_n(x) = \max\{-1, \min\{x^n, 1\}\}$ für $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Berechnen Sie ihren punktweisen Limes f, wo er existiert, und zeigen Sie, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig ist. Sei A das größte Interval von $\mathbb{R}$, wo gleichmäßige Konvergenz stattfindet. Zeigen Sie, dass A nicht kompakt ist.

Aufgabe 2. Sei $f(x,y) = xy^2$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Für alle $y \in \mathbb{R}$ fest, definiert man $F(x,y)$ als die Stammfunktion von $x \mapsto f(x,y)$ mit $F(0,y) = \sin y$. Finden Sie die Tangentialhyperebene $z = g(x,y)$ zu F im Punkt $(0,0,0)$.

Aufgabe 3. Sei $f(x) = \ln(1 + x^{2020})$ für $x \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie die entsprechende McLaurinreihe und betrachen ihre Konvergenz.

Aufgabe 4. Sei $f(x,y) = (x^3/3 - x)\mathrm{e}^{-y^2}$ für $(x,y) \in Q = [0,2] \times [0,2] \subset \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $\min_Q f$ und $\max_Q f$.

Aufgabe 5. Sei $f(x) = g(\|x\|_2^2)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $g \in C^1(\mathbb{R})$ ist, und seien u, $v \in S^{n-1} = \{w \in \mathbb{R}^n \ : \ \|w\|_2 = 1\}$ mit $u \cdot v = 0$. Zeigen Sie, dass $(\partial f/\partial u)(v) = 0$ (Richtungsableitung).

Lösungen:

1. Falls $x \in (-1,1)$ hat man $f_n(x) = x^n \to 0$, für $x \geq 1$ hat man $f_n(x) = 1 \to 1$ und falls $x \leq -1$, hat man $f_n(x) = (-1)^n$. Deshalb $f_n \to f$ punktweise mit
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 < x < 1, \\ 1 & \text{für } 1 \leq x, \end{cases}$$
für $x > -1$ und konvergiert nicht für $x \leq -1$. Der Limes ist nicht gleichmäßig, da f nicht stetig ist. Wir haben $A = (1, +\infty)$, was nicht bechränkt ist, und somit nicht kompakt.

2. Wir haben
$$F(x,y) = \int_0^x sy^2 \, \mathrm{d}s + \sin y = \frac{1}{2} x^2 y^2 + \sin y.$$
Da $\nabla F(x,y) = (xy^2, x^2 y + \cos y)$ und $\nabla F(0,0) = (0,1)$, hat man $z = g(x,y) = F(0,0) + \nabla F(0,0) \cdot (x,y) = y$.

3. Da $\ln(1+t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} t^k / k$ für $t \to 0$, ist die McLaurinreihe von $f(x) = \ln(1 + x^{2020})$ folgende $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} (x^{2020})^k / k$. Der Konvergenzradius ist $\rho = \limsup_{k \to \infty} k^{-k} = 1$. In $x = \pm 1$ ist die Reihe $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}/k$ und somit konvergent aber nicht absolut.

4. Man sucht zuerst kritische Punkte:
$$(0,0) = \nabla f(x,y) = \left((x^2 - 1) \mathrm{e}^{-y^2}, (x^3/3 - x)(-2y) \mathrm{e}^{-y^2} \right) \Leftrightarrow (x,y) = (\pm 1, 0).$$
Da $(\pm 1, 0) \notin \mathring{Q}$, muss man den Rand von Q betrachten.
   - Auf $y = 0$ hat man $f(t,0) = (t^3/3 - t)$ für $t \in [0,2]$ mit Min in $t = 1$ und Max in $t = 2$, und $f(1,0) = -2/3$, $f(2,0) = 2/3$,
   - Auf $x = 0$ hat man $f(0,t) = 0$ für $t \in [0,2]$,
   - Auf $y = 2$ ist $f(t,2) = (t^3/3 - t) \mathrm{e}^{-4}$ für $t \in [0,2]$ mit Min in $t = 1$ und Max in $t = 2$, und $f(1,2) = (-2/3) \mathrm{e}^{-4}$, $f(2,2) = (2/3) \mathrm{e}^{-4}$,
   - Auf $x = 2$ hat man $f(2,t) = (2/3) e^{-t^2}$ für $t \in [0,2]$ mit Min in $t = 2$ und Max in $t = 0$, und $f(2,0) = 2/3$, $f(2,2) = (2/3) \mathrm{e}^{-4}$.

   Daher ist $\max_Q f = 2/3$ und $\min_Q f = -2/3$.

5. Man hat $\nabla f(x) = g'(\|x\|_2^2) 2x$. Somit ist $(\partial f / \partial u)(v) = \nabla f(v) \cdot u = g'(\|v\|_2^2) v \cdot u = 0$.