Dauer: 60 Minuten.

Kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit, kein Internet. Unterlagen sind erlaubt.

Vollständige Lösungsverfahren sind hochzuladen. Ohne Lösungsverfahren werden Ergebnisse nicht bewertet.

Alle Aufgaben bekommen bis zu +10 Punkte:
0-24 Punkte: Note 5, 25-29 Punkte: Note 4, 30-34 Punkte: Note 3, 35-39 Punkte: Note 2, 40-50 Punkte: Note 1.

Wenn Sie nicht drücken können, benutzen Sie bitte ein einfaches A4 Blatt.

Technische Fragen bitte an SSC (+43-1-4277-50403).

Aufgabe 1. Sei die Funktionenfolge $f_n(x) = \max\{-1, \min\{x^n, 1\}\}$ für $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Berechnen Sie ihren punktweisen Limes f, wo er existiert, und zeigen Sie, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig ist. Sei A das größte Interval von $\mathbb{R}$, wo gleichmäßige Konvergenz stattfindet. Zeigen Sie, dass A nicht kompakt ist.

Aufgabe 2. Sei $f(x,y) = xy^2$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Für alle $y \in \mathbb{R}$ fest, definiert man $F(x,y)$ als die Stammfunktion von $x \mapsto f(x,y)$ mit $F(0,y) = \sin y$. Finden Sie die Tangentialhyperebene $z = g(x,y)$ zu F im Punkt $(0,0,0)$.

Aufgabe 3. Sei $f(x) = \ln(1 + x^{2020})$ für $x \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie die entsprechende McLaurinreihe und betrachen ihre Konvergenz.

Aufgabe 4. Sei $f(x,y) = (x^3/3 - x)\mathrm{e}^{-y^2}$ für $(x,y) \in Q = [0,2] \times [0,2] \subset \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $\min_Q f$ und $\max_Q f$.

Aufgabe 5. Sei $f(x) = g(\|x\|_2^2)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $g \in C^1(\mathbb{R})$ ist, und seien u, $v \in S^{n-1} = \{w \in \mathbb{R}^n \ :\ \|w\|_2 = 1\}$ mit $u \cdot v = 0$. Zeigen Sie, dass $(\partial f/\partial u)(v) = 0$ (Richtungsableitung).