Analysis — Prüfung am 25. Juni 2015 - **Teil 1**

Name, Vorname $\boxed{}$ Matrikelnummer $\boxed{}$

Unterschrift $\boxed{}$ Mündliche Prüfung: Ja $\boxed{}$, Nein $\boxed{}$

Dauer: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt. Jede Übung hat genau eine korrekte Antwort. Merken Sie sie so ■ an. Für jede Antwort: Richtig = +3, Leer = 0, Falsch= −1.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

---

1. Welchen Wert hat $\int_{-\infty}^{1/2} x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$? ■ 0. $\boxed{\mathbf{b}}$ 1. $\boxed{\mathbf{c}}$ e. $\boxed{\mathbf{d}}$ -1.
2. Sei p das McLaurinpolynom der Ordnung 9 von $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^7 \cos x$. Welchen Wert hat $2(p'(1) + p(1)) + 1$? $\boxed{\mathbf{a}}$ 1. $\boxed{\mathbf{b}}$ -1. ■ 7. $\boxed{\mathbf{d}}$ -7.
3. Seien $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ kritisch für f und $H_f(x_0)$ positiv definit. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $f(x_0) > 0$. $\boxed{\mathbf{b}}$ x_0 ist eine lokale Maximumstelle. $\boxed{\mathbf{c}}$ x_0 ist ein Sattelpunkt. ■ x_0 ist eine lokale Minimumstelle.
4. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $f^{-1}(0)$ beschränkt. ■ $f^{-1}(0)$ abgeschlossen. $\boxed{\mathbf{c}}$ $f^{-1}(0)$ kompakt. $\boxed{\mathbf{d}}$ $f^{-1}(0)$ offen.
5. Sei $f : (x, y) \mapsto 2x^2 - \sin y$ und $u = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^T$. Welchen Wert hat $\sqrt{2}(\partial f/\partial u)(1, \pi)$? ■ 5. $\boxed{\mathbf{b}}$ 2. $\boxed{\mathbf{c}}$ 1. $\boxed{\mathbf{d}}$ -1.
6. Sei $A \subset \mathbb{R}$ offen. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $A \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \;\Rightarrow A$ beschränkt. $\boxed{\mathbf{b}}$ A beschränkt $\Rightarrow A \cap \mathbb{N} = \emptyset$. ■ $A \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; A = \emptyset$. $\boxed{\mathbf{d}}$ A beschränkt $\Rightarrow \overline{A} \cup \mathbb{N}$ kompakt.
7. Seien $f,\, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f stetig, g monoton. Dann: ■ $f - g \in R[a, b]$. $\boxed{\mathbf{b}}$ fg monoton. $\boxed{\mathbf{c}}$ $\sin \circ g$ monoton. $\boxed{\mathbf{d}}$ $g \circ f$ stetig.
8. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 5^n x^n/n!$ für $x \in \mathbb{R}$. Welchen Wert hat $5\int_0^{1/5} f(x)\,\mathrm{d}x$? $\boxed{\mathbf{a}}$ 1. ■ $\mathrm{e} - 1$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $1 - \mathrm{e}$. $\boxed{\mathbf{d}}$ e.
9. Seien $f,\, g \in R[0, +\infty)$. Dann: ■ $x \in [0, -\infty) \mapsto f(-x) \in R(-\infty, 0]$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $f^+ + g^+ \in R[0, +\infty)$. $\boxed{\mathbf{c}}$ $fg \in R[0, +\infty)$. $\boxed{\mathbf{d}}$ $\min\{f, g\} \in R[0, +\infty)$.
10. Sei $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (3x)^{2k}$. Dann: $\boxed{\mathbf{a}}$ $f'(0) > 0$. ■ f konvex. $\boxed{\mathbf{c}}$ $f(1/9) = 9/8$. $\boxed{\mathbf{d}}$ Der Konvegenzradius ist $\rho = +\infty$.

Bitte nicht unter der Linie schreiben

Analysis — Prüfung am 25. Juni 2015 - **Teil 2**

Name, Vorname [ ] Matrikelnummer [ ]

Unterschrift [ ] Mündliche Prüfung: Ja [ ], Nein [ ]

Zeit: 40 Minuten für Teil 1, 80 Minuten insgesamt.
Keine Unterlagen, kein Handy/PC, kein Taschenrechner, keine Gruppenarbeit.

11. Sei $f : (x, y) \in \mathbb{R} \mapsto 7 + 2x^5 + 2y^3 + 5x^2 - 3y^2$ und seien (x_m, y_m) und (x_M, y_M) die einzige Minimumstelle bzw. Maximumstelle von f. Welchen Wert hat $f(x_m, y_m)/2 + f(x_M, y_M)$?

    Merken Sie die richtige Antwort an:

    -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | [redacted] | 14 | 15 | 16 | 17

    (Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

12. Sei die Menge A so definiert

$$A = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \ : \int_3^{+\infty} x^{-\alpha/3} \mathrm{d}x < +\infty \ \text{ und } \ \sum_{k=1}^{+\infty} (\beta x)^{3k} \text{ konvergiert mind. für } |x| \leq 1 \right\}.$$

    Welchen Wert hat $\inf\{3\alpha - \beta \,:\, (\alpha, \beta) \in A\}$?

    Merken Sie die richtige Antwort an:

    0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | [redacted] | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25

    (Richtig = +5, Leer = 0, Falsch= −2)

13. Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$f \in C^1(\mathbb{R}^n), \ \exists u \in S^{n-1} \, \forall x \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f(x) \cdot u \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(u) \geq f(0).$$

    (Bis zum = +10, Leer = Falsch = 0)

Bitte nicht unter der Linie schreiben