

Suche nach einer bestimmten Lösung
(oft partikuläre Lösung genannt) einer
inhomogenen linearen ODE.

Man kann hier eine Theorie entwickeln.
Es ist allerdings praktischer, mit Beispielen
die Idee zu verstehen.

Beispiel 1 : $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = e^{2t}$

Man sucht hier eine bestimmte Lösung der Form:
 $y_p(t) = \alpha e^{2t}$. Man findet

$$y_p''(t) - 2y_p'(t) - 3y_p(t) = (4\alpha - 4\alpha - 3\alpha)e^{2t}$$

y_p ist genau dann eine Lösung, wenn $-3\alpha = 1$.

Die allgemeine Lösung der ODE ist $y = y_h + y_p$,
wobei y_h die allgemeine Lösung der assoziierten
homogenen ODE ist.

(Ass. Polynom: $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$)

Dann ist : $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{3} e^{2t}$

Beispiel 2: $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = te^{2t}$

Versuchen wir mit $y_{\text{p}}(t) = \alpha te^{2t}$

$$\begin{aligned} y_{\text{p}}''(t) - 2y_{\text{p}}'(t) - 3y_{\text{p}}(t) &= \\ &= 4\alpha e^{2t} + 4\alpha te^{2t} - 2\alpha e^{2t} - 4\alpha te^{2t} - 3\alpha te^{2t} = \\ &= -3\alpha te^{2t} + 2\alpha e^{2t} \neq te^{2t} \end{aligned}$$

○ Versuchen wir nochmals mit $y_{\text{p}}(t) = \alpha te^{2t} + \beta e^{2t}$

$$\begin{aligned} y_{\text{p}}''(t) - 2y_{\text{p}}'(t) - 3y_{\text{p}}(t) &= \\ &= -3\alpha te^{2t} + 2\alpha e^{2t} + (4\beta - 4\beta - 3\beta)e^{2t} = \\ &= -3\alpha te^{2t} + (2\alpha - 3\beta)e^{2t} = te^{2t} \end{aligned}$$

○ für $\begin{cases} -3\alpha = 1 \\ 2\alpha - 3\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -1/3 \\ \beta = -2/9 \end{cases}$

Eine bestimmte Lösung ist

$$y_{\text{p}}(t) = -\frac{1}{3}te^{2t} - \frac{2}{9}e^{2t}$$

Allgemein Falls $\sum_{i=0}^N \alpha_i y^{(i)}(t) = b(t)$ mit

1.1) $b(t) = p(\lambda) e^{\lambda t}$, p Polynom Ordnung r

Kann man versuchen, $y_{\text{st}}(t) = q(t) e^{\lambda t}$ zu benutzen, mit q Polynom mit Ordnung $\leq r$.

Beispiel 3: $y''(t) - 2y'(t) + 3y(t) = \cos t$

○ Versuchen wir mit $y_{\text{st}}(t) = \alpha \cos t$

$$\begin{aligned} y_{\text{st}}''(t) - 2y_{\text{st}}'(t) + 3y_{\text{st}}(t) &= -\alpha \cos t + 2\alpha \sin t + 3\alpha \cos t \\ &= 2\alpha \cos t + 2\alpha \sin t \neq \cos t \end{aligned}$$

Versuchen wir nochmals mit $y_{\text{st}}(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$

$$\begin{aligned} y_{\text{st}}''(t) - 2y_{\text{st}}'(t) + 3y_{\text{st}}(t) &= 2\alpha \cos t + 2\alpha \sin t + \\ &+ (-\beta \sin t) - 2\beta \cos t + 3\beta \sin t = \\ &= (2\alpha - 2\beta) \cos t + (2\alpha + 2\beta) \sin t = \cos t \end{aligned}$$

$$\text{für } \begin{cases} 2\alpha - 2\beta = 1 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1/4 \\ \beta = -1/4 \end{cases}$$

Deswegen ist $y_{\text{st}}(t) = \frac{1}{4} \cos t - \frac{1}{4} \sin t$ eine Lösung.

Allgemein Falls $b(t) = p(t) \cos t$, (oder $p(t) \sin t$) sucht man $y_{\text{st}}(t) = q_1(t) \cos t + q_2(t) \sin t$.

Beispiel 4 $y''(t) - 2y'(t) + 3y(t) = t^2 - 1$

Versuchen wir mit $y_{\text{st}}(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$

$$\begin{aligned} y_{\text{st}}''(t) - 2y_{\text{st}}'(t) + 3y_{\text{st}}(t) &= \\ &= 2\alpha - 4\alpha t - 2\beta + 3\alpha t^2 + 3\beta t + 3\gamma = t^2 - 1 \end{aligned}$$

für $\begin{cases} 3\alpha = 1 \\ -4\alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha - 2\beta + 3\gamma = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1/3 \\ \beta = 4/9 \\ \gamma = -2/27 \end{cases}$

Dann ist $y_{\text{st}}(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{9}t - \frac{2}{27}$

Beispiel 5 $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t$

Versuchen wir mit $y_{\text{st}}(t) = \alpha e^t$

$$y_{\text{st}}''(t) - 2y_{\text{st}}'(t) + y_{\text{st}}(t) = \alpha e^t - 2\alpha e^t + \alpha e^t = 0 \neq e^t$$

Versuchen wir mit $y_{\text{st}}(t) = \alpha t e^t$

$$y_{\text{st}}''(t) - 2y_{\text{st}}'(t) + y_{\text{st}}(t) = \alpha t e^t + 2\alpha e^t - 2\alpha e^t - 2\alpha t e^t + \alpha t e^t = 0$$

Hier haben wir das Problem, dass e^t und $t e^t$ Lösungen der ass. homogenen ODE sind.

Benutzen wir nochmals die Methode der Variation der Konstanten: versuchen wir mit $y_p(t) = c(t)e^t$

$$\begin{aligned} y_p''(t) - 2y_p'(t) + y_p(t) &= \\ &= c''(t)e^t + 2c'(t)e^t + c(t)e^t - 2c'(t)e^t \\ &\quad - 2c(t)e^t + c(t)e^t = c''(t)e^t \equiv e^t \end{aligned}$$

für $c''(t) = 1$

Nehmen wir dann $c(t) = \frac{t^2}{2}$ und $y_p(t) = \frac{t^2}{2} e^t$ ist eine bestimmte Lösung.

Beispiel 6 $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t \cos t$

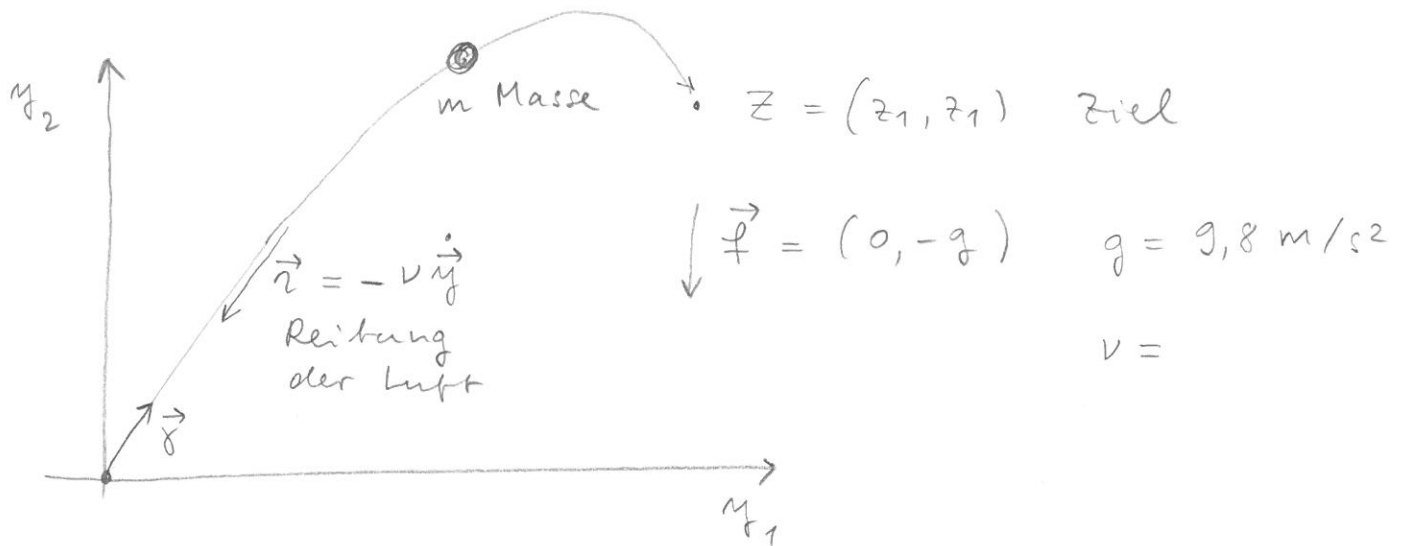
Dann ist $y_p(t) = c(t)e^t$ eine Lösung für

$c'(t) = \cos t$. Man kann $c(t) = -\cos t$ nehmen.

Allgemein Man kann versuchen, $y_p(t) = c(t)e^{\lambda t}$ zu benutzen, wobei $e^{\lambda t}$ eine Lösung der assoziierten homogenen ODE ist.

Das Shooting-Problem

Z erreichen zur Zeit 1



Newtonsches Gesetz: $m\vec{a} = \vec{f}_{\text{tot}}$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{y}}, \quad \vec{f}_{\text{tot}} = \vec{f} + \vec{n}$$

Cauchy Problem:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{y}} = (0, -g) - v \dot{\vec{y}} \\ \vec{y}(0) = (0, 0) \\ \dot{\vec{y}}(0) = \vec{f} = (\gamma_1, \gamma_2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1'' + v y_1' = 0 \\ y_2'' + v y_2' = -g \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$y_1(t) = c_1 + c_2 e^{-vt}$$

$$y_2(t) = c_3 + c_4 e^{-vt} - \frac{g}{v} t$$

Bedingungen

$$\begin{aligned} (0, 0) &= \vec{y}(0) = (c_1 + c_2, c_3 + c_4) \\ (\gamma_1, \gamma_2) &= \dot{\vec{y}}(0) = (c_1 - v c_2, c_3 - v c_4 - g/v) \end{aligned} \iff \begin{cases} c_1 = \gamma_1 / (1+v) \\ c_2 = -\gamma_1 / (1+v) \\ c_3 = (\gamma_2 + g/v) / (1+v) \\ c_4 = -(\gamma_2 + g/v) / (1+v) \end{cases}$$

Ziel Bedingung

$$\begin{aligned} (z_1, z_2) &= \vec{y}(1) = \left(c_1 + c_2 e^{-v}, c_3 + c_4 e^{-v} + \frac{g}{v} \right) = \\ &= \left(\frac{\gamma_1}{1+v} (1 - e^{-v}), \frac{\gamma_2 + \frac{g}{v}}{1+v} (1 - e^{-v}) \right) \iff \begin{cases} \gamma_1 = \frac{z_1 (1+v)}{1 - e^{-v}} \\ \gamma_2 = \frac{z_2 (1+v)}{1 - e^{-v}} - \frac{g}{v} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Eulersche Methode

Betrachten wir jetzt ein erstes Beispiel einer numerischen Methode, um das Cauchy-Problem

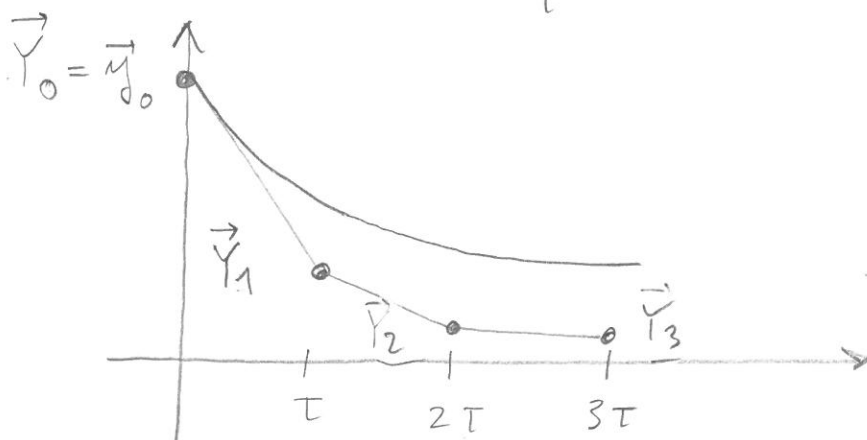
$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = \vec{f}(\vec{y}(t)) \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

zu lösen, wobei $\vec{f} \in \text{Lip}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$.
Da $\vec{f}$ global Lipschitz ist, hat dieses Problem eine einzige globale Lösung $\vec{y} \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$.

Wir möchten $\vec{y}$ durch die explizite Eulersche Methode auf dem Intervall $[0, T]$ approximieren.

Sei $\tau = T/m$ ($m \in \mathbb{N}$) der Zeitschritt und definieren wir

$$\vec{Y}_0 = \vec{y}_0, \quad \frac{\vec{Y}_i - \vec{Y}_{i-1}}{\tau} = \vec{f}(\vec{Y}_{i-1}) \quad \text{für } i=1, \dots, n$$



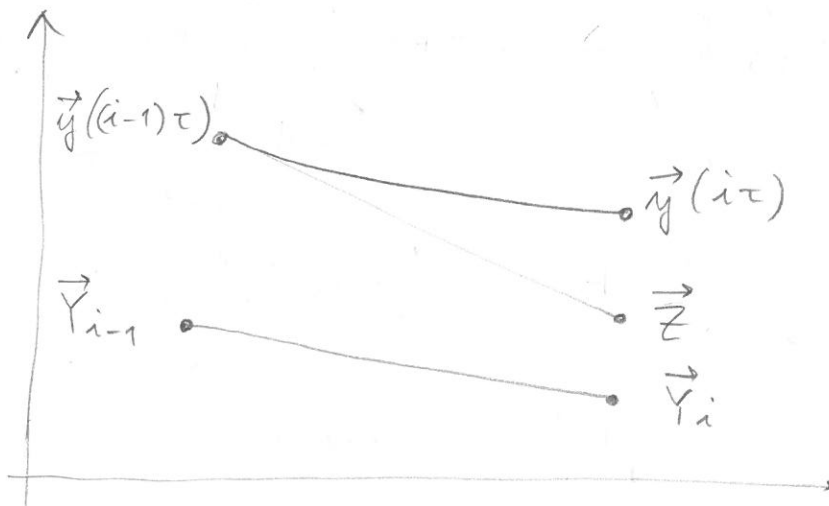
Bemerkung Es gibt viele numerische Methoden und die explizite Eulersche Methode ist sicher nicht das Beste, das man machen kann (aber das Einfachste). Sie werden andere Möglichkeiten in den Numerik Kursen sehen.

Jetzt gehen wir, dass die Eulersche Methode konvergent ist.

Satz $\|\vec{y}(i\tau) - \vec{Y}_i\| \leq \max_{[0, T]} \|\vec{y}''\| \frac{T^2}{2} e^{TL} \frac{1+n}{h^2} \quad \forall i = 1, \dots, n.$

Beweis Definieren wir $\vec{Z}$ durch

$$\frac{\vec{Z} - \vec{y}((i-1)\tau)}{\tau} = \vec{f}(\vec{y}((i-1)\tau))$$



Schätzen wir ab:

$$\|\vec{y}(i\tau) - \vec{Y}_i\| \leq \|\vec{y}(i\tau) - \vec{Z}\| + \|\vec{Z} - \vec{Y}_i\|. \quad (*)$$

Wir haben

$$\xi \in [(i-1)\tau, i\tau]$$

$$\begin{aligned} \vec{y}(i\tau) &= \vec{y}((i-1)\tau) + \vec{y}'((i-1)\tau)\tau + \frac{\vec{y}''(\xi)}{2}\tau^2 = \\ &= \underbrace{\vec{y}((i-1)\tau) + \tau \vec{f}(\vec{y}((i-1)\tau))}_{\vec{z}} + \frac{\vec{y}''(\xi)}{2}\tau^2 \\ &= \vec{z} + \frac{\vec{y}''(\xi)}{2}\tau^2 \end{aligned}$$

und somit $\|\vec{y}(i\tau) - \vec{z}\| \leq \frac{\|\vec{y}''(\xi)\|}{2} \tau^2 \leq \frac{\max_{[0,T]} \|\vec{y}''\|}{2} \tau^2$.

Andererseits hat man

$$\begin{aligned} \|\vec{z} - \vec{y}_i\| &= \|\vec{y}((i-1)\tau) - \vec{y}_{i-1} + \tau \vec{f}(\vec{y}((i-1)\tau)) - \tau \vec{f}(\vec{y}_{i-1})\| \\ &\leq (1 + \tau L_f) \|\vec{y}((i-1)\tau) - \vec{y}_{i-1}\|. \end{aligned}$$

Von (*) bekommt man

$$\|\vec{y}(i\tau) - \vec{y}_i\| \leq \underbrace{\frac{1}{2} \max_{[0,T]} \|\vec{y}''\| \tau^2}_{=: c} + \underbrace{(1 + \tau L_f)}_{\leq e^{\tau L_f}} \|\vec{y}((i-1)\tau) - \vec{y}_{i-1}\| \leq$$

$$\leq c\tau^2 + e^{\tau L_f} \|\vec{y}((i-1)\tau) - \vec{y}_{i-1}\| \leq$$

$$\leq c\tau^2 (1 + e^{\tau L_f}) + e^{2\tau L_f} \|\vec{y}((i-2)\tau) - \vec{y}_{i-2}\| \leq$$

$$\leq c\tau^2 (1 + e^{\tau L_f} + \dots + e^{i\tau L_f}) + e^{i\tau L_f} \|\vec{y}_0 - \vec{y}_0\|$$

$$\leq c\tau^2 (1+i)e^{\tau L_f} \leq c\tau^2 e^{\tau L_f} \frac{1+n}{n^2} \quad \square$$

Beispiel $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases} \rightarrow \text{Lösung } y(t) = y_0 e^{\lambda t}$

Eulersche Methode:

$$Y_0 = y_0$$

$$Y_1 = Y_0 + \tau f(Y_0) = y_0 + \tau \lambda y_0 = y_0 (1 + \tau \lambda)$$

$$Y_2 = Y_1 + \tau f(Y_1) = (y_0 + \tau \lambda y_0) + \tau \lambda (y_0 + \tau \lambda y_0) =$$

$$= y_0 (1 + \tau \lambda)^2$$

$$Y_i = y_0 (1 + \tau \lambda)^i$$

Sei jetzt $\tau = \frac{1}{n}$ und $i\tau \leq t \leq (i+1)\tau$

Nehmen wir an, dass $\tau \lambda > -1$ ist (das stimmt, für n groß genug). Dann ist

$$Y_i = y_0 \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^i \leq y_0 \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{nt} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_0 e^{\lambda t}$$

$$Y_i \geq y_0 \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{nt-1} = \frac{y_0 \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{nt}}{1 + \frac{\lambda}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_0 e^{\lambda t}$$