

Lineare Gleichungen der N. Ordnung

$$\boxed{\sum_{i=0}^N a_i(t) y^{(i)}(t) = b(t)} \quad (5)$$

$$b, a_i \in C(\mathbb{R}; \mathbb{C}), \quad a_N(\cdot) = 1$$

Diese Gleichung kann als N-System der 1. Ord. betrachtet werden: [trick: $y_i = y^{(i)}$]

$$\begin{cases} y_0'(t) = y_1(t) \\ y_1'(t) = y_2(t) \\ \vdots \\ y_{N-1}'(t) = -\sum_{i=0}^{N-1} a_i(t) y_i(t) \end{cases} \quad \vec{y} = (y_0, \dots, y_{N-1})$$

$$\Leftrightarrow \vec{y}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{N-1}(t) \end{bmatrix} \vec{y}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_A \quad \underbrace{\hspace{1em}}_{\vec{b}(t)}$

Die ganze Theorie für Systeme ist noch anwendbar!

Nennen wir

$$\boxed{\sum_{i=1}^N a_i(t) y^{(i)}(t) = 0} \quad (6)$$

homogene Gleichung, zu (5) assoziiert.

Satz (Struktursatz, nochmals) Die Lösungen von (6) sind ein Vektorraum V mit Dimension N . Die Lösungen von (5) sind $V + y_h$, wobei y_h eine beliebige Lösung von (5) ist.

Homogene lineare Gleichungen der N . Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{\sum_{i=1}^N a_i y^{(i)}(t) = 0} \quad a_N = 1, a_1, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{C} \quad (7)$$

Satz Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen Lösungen von

$$0 = P(\lambda) = \sum_{i=1}^N a_i \lambda^i$$

mit entsprechenden Vielfachheiten $m_1, \dots, m_k$.

Dann sind

$$t^j e^{\lambda_i t}, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

eine Basis von Lösungen von (7).

Beimerkung Die Funktionen $t^j e^{\lambda_i t}$ sind genau N und sind alle linear unabhängig.

Beweis Man kann (6) als

$$0 = \sum_{k=0}^N a_k y^{(k)} = \left(\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1 \right)^{m_1} \cdots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k \right)^{m_k} \right) y = P\left(\frac{d}{dt}\right) y$$

formell umschreiben. Man hat, dass

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_i \right) e^{\lambda_i t} = \lambda_i e^{\lambda_i t} - \lambda_i (e^{\lambda_i t}) = 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_i \right)^2 t e^{\lambda_i t} &= \left(\frac{d}{dt} - \lambda_i \right) (e^{\lambda_i t} + t \lambda_i e^{\lambda_i t} - \lambda_i e^{\lambda_i t}) = \\ &= \left(\frac{d}{dt} - \lambda_i \right) e^{\lambda_i t} = 0 \end{aligned}$$

Induktion

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_i \right)^{m_i} t^{m_i-1} e^{\lambda_i t} = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_i \right)^{m_i-1} (m_i-1) t^{m_i-2} e^{\lambda_i t} = 0$$

Induktion!

Dann ist

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dt}\right) t^j e^{\lambda_i t} &= \prod_{l=1}^k \left(\frac{d}{dt} - \lambda_l \right)^{m_l} t^j e^{\lambda_i t} = \\ &= \prod_{l \neq i} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_l \right)^{m_l} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_i \right)^{m_i-j+1} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_i \right)^{j-1} t^j e^{\lambda_i t} = 0 \end{aligned}$$

Daher sind alle $t^j e^{\lambda_i t}$ Lösungen. Da sie linear unabhängig sind, sind sie eine Basis von Lösungen von (7). $\square$

Beispiel Lösen wir $y'' - 2y' + y = 0$

Da das Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ ist, sind e^t , te^t eine Basis. Daher ist die allgemeine Lösung der ODE

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

○ Beispiel Lösen wir $y^{(7)} - 8y^{(5)} + 16y^{(3)} = 0$

Da das Polynom $P(\lambda) = \lambda^7 - 8\lambda^5 + 16\lambda^3 =$

$$= \lambda^3 (\lambda^4 - 8\lambda^2 + 16) = \lambda^3 (\lambda^2 - 4)^2 = \lambda^3 (\lambda + 2)^2 (\lambda - 2)^2$$

ist, sind $1, t, t^2, e^{-2t}, te^{-2t}, e^{2t}, te^{2t}$ eine Basis. Die allgemeine Lösung ist

○ $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 e^{-2t} + c_5 t e^{-2t} + c_6 e^{2t} + c_7 t e^{2t}.$

Beispiel Lösen wir $y'' + y = 0.$

Wir haben $P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$. Damit sind e^{it}, e^{-it} eine Basis und $y(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$ die allgemeine Lösung. Eine andere Basis ist

$$\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t, \quad \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t$$

Somit ist auch $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ die allgemeine Lösung.

Bemerkung Eine reelle Basis für Lösungen von

$$\sum_{i=0}^N a_i y^{(i)}(t) = 0 \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{R}, a_N = 1$$

sind die Funktionen

$$t^j e^{\lambda_i t}, \quad t^{\tilde{j}} e^{\alpha_\ell t} \cos \beta_\ell t, \quad t^{\tilde{j}} e^{\alpha_\ell t} \sin \beta_\ell t$$

$$0 \leq j \leq m_i - 1 \quad i = 1, \dots, r$$

$$0 \leq \tilde{j} \leq \tilde{m}_\ell - 1 \quad \ell = 1, \dots, k$$

wo $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die reellen Lösungen von $P(\lambda) = 0$ sind, mit entsprechenden Vielfachheiten $m_1, \dots, m_r$ und $\alpha_\ell \pm i\beta_\ell, \dots, \alpha_k \pm i\beta_k$ die komplexen Lösungen von $P(\lambda) = 0$ sind, mit entsprechenden Vielfachheiten $\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_k$.

Beispiel Lösen wir $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

$$\begin{aligned} \text{Wir haben } P(\lambda) &= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = \\ &= (\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2 \end{aligned}$$

Daher sind die Lösungen von $P(\lambda) = 0$:

$$\pm i \quad \text{mit } \tilde{m}_1 = 2$$

Eine Basis von Lösungen ist

$$\cos t, \sin t, t \cos t, t \sin t.$$

Begründung der Bemerkung

Seien $\alpha \pm i\beta$ zwei Lösungen von $P(\lambda) = 0$. Dann

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - \alpha - i\beta \right) \left(\frac{d}{dt} - \alpha + i\beta \right) &= \\ &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha \right)^2 - (i\beta)^2 = \frac{d^2}{dt^2} - 2\alpha \frac{d}{dt} + \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

und wir haben

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} - 2\alpha \frac{d}{dt} + \alpha^2 + \beta^2 \right) (e^{\alpha t} \cos \beta t) &= \\ &= \alpha^2 e^{\alpha t} \cos \beta t - 2\alpha \beta e^{\alpha t} \sin \beta t - \beta^2 e^{\alpha t} \cos \beta t \\ &\quad - 2\alpha (\alpha e^{\alpha t} \cos \beta t - \beta e^{\alpha t} \sin \beta t) + \\ &\quad + \alpha^2 e^{\alpha t} \cos \beta t + \beta^2 e^{\alpha t} \cos \beta t = 0 \end{aligned}$$

Beispiele lösen wir

$$1.) \quad y^{(4)} - 4y^{(2)} + 4y = 0 \rightarrow P(\lambda) = (\lambda^2 - 2)^2 = (\lambda - \sqrt{2})^2 (\lambda + \sqrt{2})^2$$

Basiss: $e^{\sqrt{2}t}, te^{\sqrt{2}t}, e^{-\sqrt{2}t}, te^{-\sqrt{2}t}$.

$$2.) \quad y^{(4)} + 18y^{(2)} + 81y = 0 \rightarrow P(\lambda) = (\lambda + 3i)^2 (\lambda - 3i)^2$$

Basiss: $\cos 3t, \sin 3t, t \cos 3t, t \sin 3t$.

$$3.) \quad y^{(6)} - 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0 \rightarrow P(\lambda) = \lambda (\lambda^2 + 1)^2 (\lambda^2 - 1)^2$$

Basiss: $1, \cos t, \sin t, t \cos t, t \sin t, e^t, te^t, e^{-t}, te^{-t}$.

Beispiel Finden wir die Lösungen von

$$y'' + 2By' + Cy = 0 \quad B, C \in \mathbb{R}$$

① Fall $B^2 - C > 0$:

$$0 = P(\lambda) = \lambda^2 + 2B\lambda + C \Rightarrow \lambda_{1,2} = -B \pm \sqrt{B^2 - C} \in \mathbb{R}$$

Allgemeine Lösung: $y(t) = c_1 e^{(-B - \sqrt{B^2 - C})t} + c_2 e^{(-B + \sqrt{B^2 - C})t}$

② Fall $B^2 - C = 0$

$$0 = P(\lambda) = (\lambda + B)^2 \Rightarrow \lambda_1 = -B, m_1 = 2$$

Allgemeine Lösung: $y(t) = c_1 e^{-Bt} + c_2 t e^{-Bt}$

③ Fall $B^2 - C < 0$:

$$0 = P(\lambda) = (\lambda - (-B - i\sqrt{C - B^2}))(\lambda - (-B + i\sqrt{C - B^2}))$$

Allgemeine Lösung:

$$y(t) = c_1 e^{-Bt} \cos \sqrt{C - B^2} t + c_2 e^{-Bt} \sin \sqrt{C - B^2} t$$

"Übung Finden Sie $B, C \in \mathbb{R}$, sodass alle Lösungen von $y'' + 2By' + Cy = 0$ periodisch sind.

Man muss Bedingungen finden, somit die Nullstellen von $P(\lambda)$ rein komplex sind, d.h.

$$0 = \operatorname{Re}(\lambda) = \operatorname{Re}\left(-B \pm \sqrt{B^2 - C}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B^2 - C < 0 \\ -B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C > 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

"Übung Sei $y \neq 0$ eine Lösung von $y'' + 2y' - 3y = 0$ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. Berechnen Sie $\lim_{t \rightarrow -\infty} |y(t)|$.

Assoziiertes Polynom: $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1)$

Allgemeine Lösung: $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t$

Da $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, muss $c_2 = 0$. Daher ist

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |y(t)| = \left| \lim_{t \rightarrow -\infty} c_1 e^{-3t} \right| = \infty.$$

↑
da $c_1 \neq 0$. Ansonsten wäre $y = 0$ gewesen.

"Übung Zeigen Sie, dass das Problem

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

(Achtung!
Kein Cauchy-Problem)

Keine Lösung $y \neq 0$ hat.

Assoziiertes Polynom: $P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$

Allgemeine Lösung: $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$$\text{Bedingungen: } \begin{cases} 0 = y(0) = c_1 \\ 0 = y(1) = c_1 \cos 1 + c_2 \sin 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

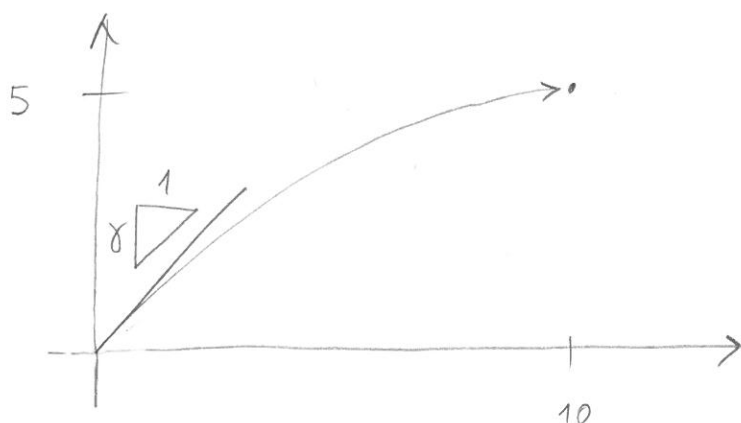
"Übung Lösen Sie $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$

Allgemeine Lösung: $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$$\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 \\ 0 = y(\pi) = c_1 \cos \pi + c_2 \sin \pi = -c_1 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Die Lösung des Problems ist $y(t) = c_2 \sin t$.

Übung (Shooting) Finden Sie $\gamma \in \mathbb{R}$, sodass die Lösung von

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \gamma \end{cases} \quad y(10) = 5 \text{ erfüllt.}$$


Ass. Polynom: $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$

All. Lösung: $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$

Bedingungen: $0 = y(0) = c_1$
 $\gamma = y'(0) = 2c_1 + c_2$

Lösung: $y(t) = \gamma t e^{2t}$

Target-Bedingung: $5 = \gamma 10 e^{20} \Rightarrow \gamma = \frac{e^{-20}}{2}$