

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Eigenwerte $\lambda_1 = 2, \alpha_1 = 2, \gamma_1 = 1$
 $\lambda_2 = -1, \alpha_2 = 1, \gamma_2 = 1$

Dann ist $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(J_2(2), J_1(-1))$

und $M^{-1}AM = J$ mit

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $J_n(\lambda)$ ein Jordanscher Block. Das System $\vec{z}' = J_n(\lambda) \vec{z}$ kann dann gelöst werden und eine Fundamentalmatrix ist

$$S_{n,\lambda}(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} & & \\ & & 1 & t & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & t \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiele Für $J_2(\lambda)$ ist $S_{2,\lambda}(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Für $J_3(\lambda)$ ist $S_{3,\lambda}(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Beispiel Lösen wir $\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(t)$.

A ist der Jordansche Block $J_2(2)$.
Deshalb ist eine Fundamentalmatrix

$$S(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist dann

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= S(t) \vec{c} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \\ &= (c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}, c_2 e^{2t}). \end{aligned}$$

Check:

$$\begin{aligned} \vec{y}'(t) &= \left(\underbrace{2c_1 e^{2t} + 2c_2 t e^{2t}}_{\substack{1 \\ 1}} + \underbrace{c_2 e^{2t}}_{\substack{1 \\ 1}}, 2c_2 e^{2t} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das System $\vec{z}' = J \vec{z}$ mit

$$J = \text{diag} (J_{n_1}(\lambda_1), \dots, J_{n_r}(\lambda_r))$$

kann gelöst werden. Eine Fundamentalmatrix ist

$$S(t) = \text{diag} (S_{n_1, \lambda_1}(t), \dots, S_{n_r, \lambda_r}(t)).$$

Beispiel Lösen wir $\vec{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{= \text{diag}(J_2(2), J_2(3))} \vec{y}$

Die allgem. Lösung ist

$$\vec{y}(t) = S(t) \vec{c} = \text{diag}(S_{2,2}(t), S_{2,3}(t)) \vec{c} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & t e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & t e^{3t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \vec{c} =$$

$$= (c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}, c_2 e^{2t}, c_3 e^{3t} + c_4 t e^{3t}, c_4 e^{3t})$$

Sei jetzt $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ nicht diagonalisierbar in $\mathbb{C}$
 und sei J ihre Jordansche Normalform, somit
 $M^{-1}AM = J$, für $M \in \mathbb{C}^{N \times N}$ invertibel, mit

$$J = \text{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \dots, J_{n_r}(\lambda_r))$$

Da $\vec{z}(t) = \text{diag}(S_{n_1, \lambda_1}(t), \dots, S_{n_r, \lambda_r}(t)) \vec{c}$
 die allgemeine Lösung von $\vec{z}' = J\vec{z}$ ist, ist

$$\vec{y}(t) = M \text{diag}(S_{n_1, \lambda_1}(t), \dots, S_{n_r, \lambda_r}(t)) \vec{c}$$

die allgemeine Lösung von $\vec{y}' = A\vec{y}$.

Somit haben wir alle möglichen Fälle betrachtet.

Die Fälle für $N=2$ $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit Eigenwerte λ_1, λ_2

- ① $\lambda_1 \neq \lambda_2$ oder $\lambda_1 = \lambda_2$ mit geom. Vielfachheit = 2
 $\Rightarrow A$ diagonalisierbar : $M^{-1} A M = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$

Eine Fundamentalmatrix ist

$$S(t) = M \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})$$

$$\uparrow M = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2]$$

$\uparrow$ Eigenvektoren

- ② $\lambda_1 = \lambda_2$ mit geom. Vielfachheit = 1

$$\Rightarrow A \text{ nicht diagonalisierbar : } M^{-1} A M = J_2(\lambda_1)$$

Eine Fundamentalmatrix ist

$$S(t) = M \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$$

$$\uparrow M = [\vec{v}_1 \quad \vec{w}]$$

$\uparrow$ Eigenvektor, $\vec{w} \neq \vec{0}$
 und $\vec{v}$ und $\vec{w}$ lin. unab.

- ③ $\lambda_1 = \lambda_2$ mit geom. Vielfachheit = 0 $\Rightarrow A = 0$

Fundamentalmatrix $S(t) = I$

Beispiel Lösen wir $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1, \alpha_1 = 2, \gamma_1 = 1 \Rightarrow A$ nicht diagonal.

$\vec{v}_1$ löst $(A - I) \vec{v}_1 = \vec{0} \iff \vec{v}_1 = (1, 1)$

Nehmen wir $w = (1, 0)$, somit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$J = M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= M \begin{pmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \vec{c} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 t e^t \\ c_2 e^t \end{pmatrix} \\ &= (c_1 e^t + c_2 t e^t + c_2 e^t, c_1 e^t + c_2 t e^t). \end{aligned}$$

Check:
$$\begin{aligned} \vec{y}'(t) &= \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^t + c_2 t e^t + c_2 e^t \\ c_1 e^t + c_2 e^t + c_2 t e^t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2(c_1 e^t + c_2 t e^t + c_2 e^t) - (c_1 e^t + c_2 t e^t) \\ c_1 e^t + c_2 t e^t + c_2 e^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y} \end{aligned}$$

Die Exponentialmatrix

Definition Sei $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ gegeben. Die entsprechende Exponentialmatrix e^A ist definiert durch

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Bemerkungen

1) Die Serie ist absolut konvergent, da

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq e^{\|A\|}$$

für jede Matrixnorm $\|\cdot\|$ und alle A .

2) $A, B \in \mathbb{C}^{N \times N}$, $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$

3) $A \in \mathbb{C}^{N \times N} \Rightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}$

4) $A = M J M^{-1} \in \mathbb{C}^{N \times N} \Rightarrow e^A = M e^J M^{-1}$

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(M J M^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M J^k M^{-1}}{k!} = M e^J M^{-1}$$

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}}{k!} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$$

Beispiel Sei $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$. Dann

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_N^k)}{k!} = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_N})$$

Für $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ hat man $e^A = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-3} \end{pmatrix}$

Beispiel Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{= M^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = M^{-1}$$

$$e^A = M e^{\text{diag}(1,3)} M^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e^3 \\ e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^3 & e - e^3 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

Beispiel Sei $A = J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Dann

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}. \text{ Somit ist}$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k I}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\begin{pmatrix} 0 & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{k!}$$

$$= e^\lambda I + e^\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e^\lambda J_2(1).$$

Satz Sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Dann ist $R(t) = e^{At}$ die Lösungsmatrix für A in $t_0 = 0$. Die allgemeine Lösung von $\vec{y}' = A\vec{y}$ ist $\vec{y}(t) = e^{At} \vec{c}$. Die Lösung von $\begin{cases} \vec{y}' = A\vec{y} \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases}$ ist $\vec{y}(t) = e^{At} \vec{y}_0$.

Beweis Zeigen wir, dass $R'(t) = AR(t)$.

Man hat

$$\begin{aligned} \frac{R(t+h) - R(t)}{h} - AR(t) &= \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} - Ae^{At} = \\ &= \frac{e^{At}}{h} (e^{Ah} - I - Ah) = \\ &= \frac{e^{At}}{h} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(Ah)^k}{k!} - I - Ah \right). \end{aligned}$$

Nehmen wir die Matrixnorm.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{R(t+h) - R(t)}{h} - AR(t) \right\| &\leq \frac{\|e^{At}\|}{|h|} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|A\|^k h^k}{k!} \\ &\stackrel{|h|^k \leq |h|^2}{\leq} \frac{\|e^{At}\|}{|h|} |h|^2 \|A^2\| e^{\|A\|} \end{aligned}$$

und $R' = AR$ folgt für $h \rightarrow 0$.

Ferner hat man, dass $R(t)$ invertibel ist (Bemerkung 3, Seite 66) und $R(0) = e^0 = I$. $\square$

Anwendung Die Lösung von $\vec{y}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_A \vec{y}(t)$
 ist $\vec{y}(t) = e^{At} \vec{c} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \vec{c}$.

Anwendung Die Lösung von $\vec{y}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_A \vec{y}(t)$

ist $\vec{y}(t) = e^{At} \vec{c}$. Da

$$(At)^2 = \begin{pmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 t^2 & 2\lambda t^2 \\ 0 & \lambda^2 t^2 \end{pmatrix}$$

$$(At)^k = \begin{pmatrix} (\lambda t)^k & k \lambda^{k-1} t^k \\ 0 & (\lambda t)^k \end{pmatrix} \quad \text{ist}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} I + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k \lambda^{k-1} t^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= e^{\lambda t} I + t e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dadurch hat man

$$\vec{y}(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{c}$$

Bemerkung $e^{J_n(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ & 1 & t & \dots & t^{n-2}/(n-2)! \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$