

Variation der Konstanten

Satz Es gibt eine Lösung von $\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$ der Form $\vec{y}(t) = S(t)\vec{w}(t)$, wo $S(t)$ eine Fundamentalmatrix für A ist und $\vec{w} \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$.

Beweis Sei $\vec{w}(t) := \int_{t_0}^t S^{-1}(s)\vec{b}(s)ds$. Dann $\vec{y}(t) = S(t)\vec{w}(t)$ löst

$$\begin{aligned} (\vec{y}(t))' &= S'(t)\vec{w}(t) + S(t)\vec{w}'(t) = \\ &= A(t)S(t)\vec{w}(t) + S(t)S^{-1}(t)\vec{b}(t) \\ &= A(t)\vec{y}(t) + \vec{b}(t). \end{aligned} \quad \square$$

Die Lösungen von $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$ haben dann die allgemeine Form

$$\vec{y}(t) = S(t)\vec{c} + S(t)\int_{t_0}^t S^{-1}(s)\vec{b}(s)ds$$

mit $\vec{c} \in \mathbb{R}^N$ beliebig. Wenn wir die Anfangsbedingung des Cauchy Problems $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ zusätzlich betrachten, finden wir $\vec{y}_0 = S(t_0)\vec{c}$, somit $\vec{c} = S^{-1}(t_0)\vec{y}_0$ und

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= S(t)S^{-1}(t_0)\vec{y}_0 + S(t)\int_{t_0}^t S^{-1}(s)\vec{b}(s)ds \\ &= R(t)\vec{y}_0 + R(t)\int_{t_0}^t R^{-1}(s)\vec{b}(s)ds \end{aligned}$$

für $R(t) = S(t)S^{-1}(t_0)$ lösend.

Beispiel Lösen wir $\vec{y}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A(t)} \vec{y}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{b}(t)}$

Da $(e^t, 0)$ und $(0, e^{2t})$ zwei lineare unabhängige Lösungen des assoziierten homogenen Systems $\vec{y}' = A\vec{y}$ sind, ist

$$S(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix.

Anwenden wir die Methode der Variation der Konstanten, um $\vec{w}$ mit $S(t)\vec{w}'(t) = \vec{b}(t)$ zu finden, nämlich

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1'(t) \\ w_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir können daher nehmen

$$w_1(t) = -3e^{-t}, \quad w_2(t) = 0$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= S(t)\vec{c} + S(t)\vec{w}(t) = \\ &= (c_1 e^t - 3, c_2 e^{2t}) \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung.

Beispiel lösen wir $\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix}$.

Man findet (wir werden es später zeigen), dass $(e^{2t}, 2e^{2t})$ und $(e^{-2t}, -2e^{-2t})$ zwei Lösungen des assoziierten homogenen Systems sind. Damit ist

$$S(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ 2e^{2t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix. Um $\vec{w}$ zu finden, müssen wir lösen

$$S(t)\vec{w}'(t) = \vec{b}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2t}w_1'(t) + e^{-2t}w_2'(t) = 0 \\ 2e^{2t}w_1'(t) - 2e^{-2t}w_2'(t) = -t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_1'(t) = -\frac{t}{4}e^{-2t} \\ w_2'(t) = \frac{t}{4}e^{2t} \end{cases}$$

Wir können daher

nehmen $\begin{cases} w_1(t) = \frac{t}{8}e^{-2t} + \frac{1}{16}e^{-2t} \\ w_2(t) = \frac{t}{8}e^{2t} - \frac{1}{16}e^{2t} \end{cases}$

Die Lösung des Systems kann ist dann

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= S(t)\vec{c} + S(t)\vec{w}(t) = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \\ 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t}{8} + \frac{1}{16} + \frac{t}{8} - \frac{1}{16} \\ \frac{t}{4} + \frac{1}{8} - \frac{t}{4} + \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{t}{4} \\ 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{\vec{y}'(t) = A \vec{y}(t)} \quad A \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

Die Lösungen sind $\vec{y} \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$.

Fall $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$. Dann sind

$$\vec{u}_i(t) = \underbrace{e^{\lambda_i t}}_{\text{Exponential}} \underbrace{\vec{e}_i}_{\text{Basis von } \mathbb{R}^N}$$

lineare unabhängige Lösungen. Damit ist

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= [\vec{u}_1(t) \quad \vec{u}_N(t)] \vec{c} = \\ &= (c_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, c_N e^{\lambda_N t}) \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung.

Beispiel Die allgemeine Lösung von

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{pmatrix} \vec{y}(t)$$

ist $\vec{y}(t) = (c_1 e^t, c_2 e^{2t}, c_3 e^{-\pi t})$.

Fall A diagonalisierbar in $\mathbb{R}$:

$$\exists M \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ invertibel und } \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}: \\ M^{-1} A M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) =: D$$

$$\text{Dann } \vec{y}' = A \vec{y} \iff \vec{z}' = D \vec{z} \text{ für } \vec{z} = M^{-1} \vec{y}$$

$$\text{[check: } \vec{y}' = A \vec{y} \iff \vec{y}' = M D M^{-1} \vec{y} \iff \\ \iff (M^{-1} \vec{y}') = D M^{-1} \vec{y} \iff \vec{z}' = D \vec{z} \text{]}$$

Man findet dann $\vec{z}(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, c_N e^{\lambda_N t})$
und

$$\vec{y}(t) = M \vec{z}(t) = \left(y_i(t) = m_{ij} c_j e^{\lambda_j t} \right).$$

Beispiel Lösen wir $\vec{y}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_A \vec{y}(t).$

A hat Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und Eigenvektoren $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (-3, 1)$. Sei dann $M = [v_1, v_2] = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{z}(t) = M^{-1} \vec{y}(t)$

löst $\vec{z}'(t) = \text{diag}(1, 2) \vec{z}(t)$. Somit ist

$\vec{z}(t) = (c_1 e^t, c_2 e^{2t})$ und wir haben

$$\vec{y}(t) = M \vec{z}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix} = \\ = (c_1 e^t - 3c_2 e^{2t}, c_2 e^{2t}).$$

Bemerkung: M^{-1} muss nicht berechnet werden!

Fall $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ diagonalisierbar in $\mathbb{C}$:

$$\exists M \in \mathbb{C}^{N \times N} \text{ invertibel und } \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}: \\ M^{-1} A M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$$

Bemerkung Da A reell ist, sind alle Eigenwerte von A entweder reell oder zu zweit konjugiert: $\alpha \pm i\beta$.

- Man kann allerdings die Strategie des vorigen Falls benutzen, um $\vec{z}' = D \vec{z}$. Hier bekommt man

$$\vec{z}(t) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_N t}) \vec{c} \in \mathbb{C}^N$$

mit Werte in $\mathbb{C}$! Deshalb auch

$$\vec{y}(t) = M \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_N t}) \vec{c} \in \mathbb{C}!$$

- Wir wissen allerdings, dass eine Lösung mit Werte in $\mathbb{R}$ existiert!

Beispiel Lösen wir $\vec{y}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_A \vec{y}(t)$

Eigenwerte: $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \Rightarrow D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Eigenvektoren: $v_1 = (-i, 1), v_2 = (i, 1)$

$$\vec{z}(t) = (c_1 e^{it}, c_2 e^{-it}), \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{it} \\ c_2 e^{-it} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{y}(t) = (-i c_1 e^{it} + i c_2 e^{-it}, c_1 e^{it} + c_2 e^{-it})$$

Fundamentalmatrix für D : $\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$

Die entsprechende Fundamentalmatrix für A

$$\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i e^{it} & i e^{-it} \\ e^{it} & e^{-it} \end{pmatrix} = S(t)$$

ist in Ordnung. Allerdings hätten wir lieber eine Fundamentalmatrix in $\mathbb{R}^{N \times N}$ (wir wissen, dass sie existiert!). Wir können eine andere Fundamentalmatrix durch $S[\vec{c}_1, \vec{c}_2]$ finden, mit $\vec{c}_1$ und $\vec{c}_2$ l.u. unabh. Nehmen wir $[\vec{c}_1, \vec{c}_2] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ und wir finden die Fundamentalmatrix

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -i e^{it} & i e^{-it} \\ e^{it} & e^{-it} \end{pmatrix}}_S \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}}_{[\vec{c}_1, \vec{c}_2]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i e^{it} + i e^{-it} & e^{it} + e^{-it} \\ e^{it} + e^{-it} & i e^{it} - i e^{-it} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}!$$

$$\uparrow e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Falls man ein Cauchy-Problem zu lösen hat, bekommt man automatisch die richtige (d.h. reelle) Lösung:

$$\text{Lösen wir } \begin{cases} \vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}(t) \\ \vec{y}(0) = (1, 0) \end{cases}$$

Eine (komplexe) Fundamentalmatrix ist

$$S(t) = \begin{pmatrix} -ie^{it} & ie^{-it} \\ e^{it} & e^{-it} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{y}(t) = S(t) \vec{c}$$

Bestimmen wir die Konstanten $\vec{c} \in \mathbb{C}^2$, sodass

$$\vec{y}(0) = S(0) \vec{c} = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{2i} \\ c_2 = \frac{1}{2i} \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= S(t) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ie^{it} & ie^{-it} \\ e^{it} & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2i} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \frac{-e^{it} + e^{-it}}{2i} \end{pmatrix} = (\cos t, -\sin t). \end{aligned}$$

Fall $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ nicht diagonalisierbar in $\mathbb{C}$

Das passiert, falls A Eigenwerte hat, mit einer geometrischen Vielfachheit, die kleiner als die entsprechende algebraische Vielfachheit ist:

Paarweise verschiedene Eigenwerte: $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$

Algebraische Vielfachheit:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N} \\ (\alpha_1 + \dots + \alpha_k = N)$$

Geometrische Vielfachheit:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq \gamma_i = \max \{ \text{rang} [v_1 \dots v_{\alpha_i}] : v_i \text{ Eigenvek. von } \lambda_i \} = \\ = \dim \{ \text{Eigenraum von } \lambda_i \} \leq \alpha_i$$

Satz: A diagonalisierbar in $\mathbb{C} \iff \alpha_i = \gamma_i \quad \forall i=1, \dots, k$

Bemerkung A hat N paarweise verschiedene Eigenwerte ($k=N$) $\Rightarrow A$ diagonalisierbar

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\lambda_1 = 1$ als

Eigenwert, mit Vielfachheit $\alpha_1 = 2$. Der Eigenraum der Eigenvektoren von 1 ist $\{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{C} \}$, mit Dimension 1.

Damit ist $\gamma_1 = 1 < \alpha_1$ und A ist nicht diagonalisierbar.

Zweites Argument wäre $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar, würde $M \in \mathbb{C}^{N \times N}$ invertibel existieren, somit $M^{-1} A M = \text{diag}(1, 1)$ wäre. In diesem Fall $A = M I M^{-1} = M M^{-1} = I$, allerdings $A \neq I$.

Definition Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann nennen wir die Matrix $J_n(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Jordanscher Block (mit Eigenwert λ und Ordnung n).

Satz (Jordansche Normalform) Sei $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ gegeben mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit algebraischen Vielfachheiten $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ und geometrischen Vielfachheiten $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{N}$. Dann existieren $M, J \in \mathbb{C}^{N \times N}$, sodass M invertibel ist, $M^{-1} A M = J$

$$J = \text{diag} \left(J_{n_1^1}(\lambda_1), \dots, J_{n_{\gamma_1}^1}(\lambda_1), \dots, J_{n_1^k}(\lambda_k), \dots, J_{n_{\gamma_k}^k}(\lambda_k) \right)$$

mit $n_1^i + \dots + n_{\gamma_i}^i = \alpha_i$, für $1 \leq i \leq k$.

Die Matrix J heißt Jordansche Normalform von A und ist eindeutig, modulo Permutationen der Blöcke.