

Einfache Gleichungen der 2. Ordnung

$$\boxed{y''(t) = f(t, y'(t))}$$

Kann man als $v'(t) = f(t, v(t))$ mit $v(t) = y'(t)$ sehen.

Beispiel Lösen wir
$$\begin{cases} y'' = -(y')^2 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

Betrachten wir zuerst

$$\begin{cases} v' = -v^2 \\ v(1) = 1 \end{cases}$$

Da diese Gleichung trennbare Variablen hat, findet man

$$\int_1^{v(t)} \frac{dv}{v^2} = \int_1^t -1 ds \Rightarrow -\frac{1}{v(t)} + 1 = 1 - t$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{t}$$

Dann ist $y(t) = y(1) + \int_1^t v(s) ds = \ln t$

Übung Lösen Sie
$$\begin{cases} y''(t) = -e^t (y'(t))^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Autonome Gleichungen der 2. Ordnung (in normaler Form)

Um $y''(t) = f(y(t), y'(t))$ zu lösen

nehmen wir an, dass $t \mapsto y(t)$ (lokal) invertibel ist, mit Umkehrfunktion $y \mapsto t(y)$. Sei $y \mapsto v(y) := y'(t(y))$ und berechnen wir

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dt} = v'(y) y'(t(y)) = v'(y) v(y)$$

Falls y eine Lösung ist, löst v die Gleichung der 1. Ordnung

$$v'(y) = \frac{f(y, v(y))}{v(y)}$$

Beispiel Lösen wir $\begin{cases} y''(t) = y(t) y'(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1/2 \end{cases}$

Die Abbildung $v(y) = y'(t(y))$ löst

$$\begin{cases} v'(y) = y \\ v(y_0) = y'(t(y_0)) = y'(0) = 1/2 \end{cases}$$

Wir haben $v(y) = 1/2 + y^2/2 - y_0^2/2 = y^2/2$

Jetzt lösen wir $\begin{cases} y'(t) = y^2(t)/2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$\int_1^{y(t)} \frac{dy}{y^2} = \int_0^t \frac{ds}{2} \iff -\frac{1}{y(t)} + 1 = \frac{t}{2} \iff y(t) = \frac{2}{2-t}$$

Lineare Systeme (der 1. Ordnung)

Betrachten wir $\vec{y}: I \rightarrow \mathbb{R}^N$, Lösung von

$$\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{b}(t),$$

wobei $A \in C(I; \mathbb{R}^{N \times N})$, $\vec{b} \in C(I; \mathbb{R}^N)$.

Hier brauchen wir eine Matrix-Norm, d. h. eine Norm $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^N$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die allerdings alle "äquivalent" sind (im Sinne von Normen). Zwei davon sind

die Frobenius-Norm: $\|A\|_F := \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^2 \right)^{1/2}$

die Operator-Norm: $\|A\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|\vec{u}\|=1} \|A\vec{u}\|$

Sei $C = AB$. Dann $\|C\|_F^2 = \sum_{ij} c_{ij}^2 = \sum_{ijk} (a_{ik} b_{kj})^2 \leq \sum_{ij} \left(\sum_k a_{ik}^2 \sum_k b_{kj}^2 \right) = \|A\|_F^2 \|B\|_F^2$. Ferner hat man

$$\|A\vec{u}\|^2 = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} u_j \right)^2 \leq \sum_i \sum_j a_{ij}^2 \sum_j u_j^2 \leq \|A\|_F^2 \|\vec{u}\|^2$$

Dasselbe gilt für $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$, durch die Definition:

$$\|A\vec{v}\| = \|A\vec{v}/\|\vec{v}\|\| \|\vec{v}\| \leq \|A\|_{\mathcal{L}} \|\vec{v}\|.$$

Dann ist $\|C\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|\vec{u}\|=1} \|AB\vec{u}\| \leq \|A\|_{\mathcal{L}} \sup_{\|\vec{u}\|=1} \|B\vec{u}\| \leq \|A\|_{\mathcal{L}} \|B\|_{\mathcal{L}}$

Bemerkung Sei $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$ die Identitäts-Matrix.
 Dann ist $\|I\|_F = \sqrt{N}$, $\|I\|_2 = 1$.
 Allgemein hat man $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$.

Satz Seien $A \in C(I; \mathbb{R}^{N \times N})$, $\vec{b} \in C(I; \mathbb{R}^N)$
 $(t_0, \vec{y}_0) \in I \times \mathbb{R}^N$ gegeben. Dann hat das
 Cauchy-Problem

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{b}(t) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

eine einzige (maximale) Lösung auf I .

Beweis Die Behauptung folgt, in dem wir zeigen,
 dass $\vec{f}(t, \vec{y}) = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$ lokal Lipschitz
 stetig und sublinear ist:

1) Lokale Lipschitz Stetigkeit:

$$\begin{aligned} \|\vec{f}(t, \vec{\xi}_1) - \vec{f}(t, \vec{\xi}_2)\| &= \|A(t)(\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2)\| \\ &\leq \|A(t)\| \|\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2\|. \end{aligned}$$

2) Sublinearität:

$$\|\vec{f}(t, \vec{\xi})\| \leq \|A(t)\| \|\vec{\xi}\| + \|\vec{b}(t)\|. \quad \square$$

Das System heißt homogen, falls $\vec{r} = 0$.

Die Gleichung

$$\boxed{\vec{y}'(t) = A(t) \vec{y}(t)} \quad (3)$$

heißt homogene Gleichung assoziiert zu

$$\boxed{\vec{y}'(t) = A(t) \vec{y}(t) + \vec{r}(t)} \quad (4)$$

Man hat folgenden Satz.

Satz (Strukturatz). Sei V die Menge der Lösungen von (3). Dann ist V ein Vektorraum. Die Menge der Lösungen von (4) ist dann $V + \vec{w}$, wobei $\vec{w}$ eine beliebige Lösung von (4) ist.

Beweis. Sei $L: C^1(I; \mathbb{R}^N) \rightarrow C(I; \mathbb{R}^N)$ gegeben durch $(L\vec{y})(t) = \vec{y}'(t) - A(t)\vec{y}(t)$. Dann ist L linear und $V = \text{Ker } L$, und damit ein Vektorraum.

Sei $\vec{w}$ Lösung von (4) gegeben und $\vec{v} \in V$. Dann löst $\vec{v} + \vec{w}$ (4). Andererseits sei $\vec{y}$ eine Lösung von (4). Dann löst $\vec{y} - \vec{w}$ (3) und damit $\vec{y} - \vec{w} = \vec{v}$, für eine gewisse $\vec{v} \in V$. $\square$

Praktisch: Um alle Lösungen von (4) zu finden muss man:

- 1) Alle Lösungen von (3) finden
- 2) eine Lösung von (4) finden

Ferner, wenn man ein Cauchy-Problem für (4) lösen muss, muss man zusätzlich

- 3) Die Anfangsbedingung kennen, um N Konstanten zu bestimmen.

- Man kann das Programm 1)-3) nur in bestimmten Fällen abschließen!

Schritt 1: Lineare homogene Systeme

Satz Sei $A \in C(I; \mathbb{R}^{N \times N})$ und $t_0 \in I$. Dann ist $\vec{v} \in V \mapsto \vec{v}(t_0) \in \mathbb{R}^N$ ein Isomorphismus. Deshalb ist $\dim(V) = N$ und eine Basis für V sind die Lösungen der Cauchy-Probleme

$$\begin{cases} \vec{u}'(t) = A(t) \vec{u}(t) \\ \vec{u}(t_0) = \vec{u}_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, N,$$

wobei $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_N)$ eine Basis für $\mathbb{R}^N$ ist.

Beweis Da $\vec{v} \mapsto \vec{v}(t_0)$ linear ist, muss man nur zeigen, dass es bijektiv ist. Wir müssen deshalb checken, dass für alle $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^N$ das Cauchy-Problem eine einzige Lösung hat. Das wissen wir schon.

Da $V \cong \mathbb{R}^N$, hat man $\dim(V) = \mathbb{R}^N$. Seien $\vec{u}_i(t) \in V$ als vorgegeben. Da $\vec{u}_i(t_0) = \vec{u}_i$ eine Basis für $\mathbb{R}^N$ sind, müssen $\vec{u}_i(\cdot)$ eine Basis für V sein. $\square$

Beispiel Betrachten wir die Lösungen von
$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) \end{cases}$$
 (Das kann man so umschreiben $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}$)

Zwei Lösungen sind $\vec{y}_1(t) = (\cos t, \sin t)$ und $\vec{y}_2(t) = (\sin t, -\cos t)$. Da $\vec{y}_1(0) = (1, 0)$ und $\vec{y}_2(0) = (0, -1)$, sind alle Lösungen des Problems der Form

$$\vec{y}(t) = c_1 \vec{y}_1(t) + c_2 \vec{y}_2(t) \text{ für gewisse } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Wenn wir zusätzlich die Anfangsbedingung $\vec{y}(0) = (2, 3)$ hätten, würden wir das System $(2, 3) = c_1 \vec{y}_1(0) + c_2 \vec{y}_2(0)$ lösen, nämlich

$$(2, 3) = c_1 (1, 0) + c_2 (0, -1) \Leftrightarrow c_1 = 2, c_2 = -3$$

Die Lösung des Cauchy-Problem wäre deshalb

$$\vec{y}(t) = (2 \cos t - 3 \sin t, 2 \sin t + 3 \cos t).$$

Bemerkung Nach diesem Beispiel kann man sagen, dass alle Lösungen von (3) der Form

$$\vec{y}(t) = \sum_{k=1}^N c_k \vec{y}_k(t) = [\vec{y}_1(t) \dots \vec{y}_N(t)] \vec{c} \text{ sind,}$$

wobei $\vec{c} \in \mathbb{R}^N$ und $[\vec{y}_1(t) \dots \vec{y}_N(t)]$ die Matrix mit Spalten $\vec{y}_1(t) \dots \vec{y}_N(t)$ ist, die eine Basis sind

Bemerkung Seien $\vec{u}_1(\cdot), \dots, \vec{u}_m(\cdot)$ Lösungen von (3). Dann ist $\text{Rang}([\vec{u}_1(t) \dots \vec{u}_m(t)])$ von t unabhängig. Falls $m = N$ hat man

$$1) \text{Rang}([\vec{u}_1(t) \dots \vec{u}_N(t)]) \neq 0 \quad \forall t \in I \\ \iff \vec{u}_1(\cdot), \dots, \vec{u}_N(\cdot) \text{ eine Basis von } V \text{ sind.}$$

$$2) \text{Rang}([\vec{u}_1(t) \dots \vec{u}_N(t)]) = 0 \quad \forall t \in I \\ \iff \vec{u}_1(\cdot), \dots, \vec{u}_N(\cdot) \text{ keine Basis von } V \text{ sind.}$$

Definition Falls $\vec{u}_1(\cdot), \dots, \vec{u}_N(\cdot)$ eine Basis von V sind nennt man die Matrix

$$U(t) = [\vec{u}_1(t) \quad \dots \quad \vec{u}_N(t)]$$

fundamentale Matrix des Systems (3). Die heißt lösend, falls $U(0) = I$ (Identität).

Bemerkungen

- 1) die fundamentale Matrix löst die Matrix-Gleichung:

$$U'(t) = A(t)U(t)$$

Im Beispiel war $U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$

- 2) die fundamentale Matrix ist nicht eindeutig, da wir eine andere Matrix finden, wenn man eine andere Basis $c_1, \dots, c_N$ von $\mathbb{R}^N$ bestimmt. Insbesondere hat man, dass

$$[U(t)c_1 \quad \dots \quad U(t)c_N] = U(t)[c_1 \quad \dots \quad c_N]$$

eine weitere fundamentale Matrix ist.

Im Beispiel: Nehmen wir $[c_1 \quad c_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dann ist

$$\begin{aligned} U(t)[c_1 \quad c_2] &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \cos t + \sin t \\ \sin t & \sin t - \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine andere fundamentale Matrix.