

Lineare Gleichungen der ersten Ordnung

1) $\boxed{y'(t) = a y(t)} \quad a \in \mathbb{R}, t \in I$

Betrachten wir die Abbildung $e^{-at} y(t)$:

$$\begin{aligned} (e^{-at} y(t))' &= -a e^{-at} y(t) + e^{-at} y'(t) = \\ &= e^{-at} (y'(t) - a y(t)). \end{aligned}$$

Daher ist $y'(t) = a y(t) \iff (e^{-at} y(t))' = 0$

$$\iff e^{-at} y(t) = c \text{ für } c \in \mathbb{R} \iff$$

$$\iff y(t) = c e^{at} \text{ für } c \in \mathbb{R}.$$

2) $y'(t) = a(t) y(t) \quad a \in C(I), t \in I$

Sei $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$ für $t, t_0 \in I$. Dann

$$\begin{aligned} (e^{-A(t)} y(t))' &= -a(t) e^{-A(t)} y(t) + e^{-A(t)} y'(t) = \\ &= e^{-A(t)} (y'(t) - a(t) y(t)) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} y'(t) = a(t)y(t) &\Leftrightarrow (e^{-A(t)}y(t))' = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-A(t)}y(t) = c \text{ für } c \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow y(t) = ce^{-A(t)} \text{ für } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ferner hat man $y(t_0) = c$, sodass die maximale Lösung des Cauchy-Problems

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) & t \in \mathbb{R} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\text{ist } y(t) = y_0 e^{-A(t)} = y_0 e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}.$$

$$3) \quad \boxed{y'(t) = a(t)y(t) + b(t)} \quad a, b \in C(I), t \in I$$

Mit $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$ für $t, t_0 \in I$ berechnen wir

$$(e^{-A(t)}y(t))' = -a(t)e^{-A(t)}y(t) + e^{-A(t)}y'(t)$$

Daher ist

$$\begin{aligned} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) &\Leftrightarrow (e^{-A(t)}y(t))' = e^{-A(t)}b(t) \\ &\Leftrightarrow e^{-A(t)}y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A(s)}b(s) ds \\ &\Leftrightarrow y(t) = e^{A(t)} \left(y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(s)}b(s) ds \right) \end{aligned}$$

Die Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ist daher $y(t) = e^{A(t)} \left(y_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right).$

Übung 1 Lösen Sie $\begin{cases} y' = 3y \\ y(1) = -1 \end{cases}$

○ $y' = 3y \Leftrightarrow y(t) = ce^{3t}$. Anfangsbedingung
 $y(1) = ce^3 = -1 \Leftrightarrow c = -e^{-3}.$

Die Lösung ist: $y(t) = -e^{3(t-1)}$

Übung 2 Lösen Sie $\begin{cases} y'(t) = ty(t) \\ y(0) = 2 \end{cases}$

$a(t) = t$, $A(t) = \int_0^t a(s) ds = t^2/2$

○ $y'(t) = ty(t) \Leftrightarrow y(t) = ce^{t^2/2}$

Anfangsbedingung $y(0) = c = 2$.

Lösung: $y(t) = 2e^{t^2/2}$

Übung 3 Lösen Sie $\begin{cases} y'(t) = (\sin t)y(t) \\ y(\pi) = 3 \end{cases}$

$a(t) = \sin t$, $A(t) = \int_{\pi}^t \sin s ds = [-\cos s]_{\pi}^t = -\cos t - 1$

Dann ist $y(t) = ce^{-\cos t - 1}$. Anfangs. $y(\pi) = ce^0 = 3$

Lösung: $y(t) = 3e^{-\cos t - 1}$.

"
Übung 4: Lösen Sie $\begin{cases} y'(t) = ty(t) + t \\ y(0) = 3 \end{cases}$

$$a(t) = t, \quad A(t) = \int_0^t s \, ds = t^2/2, \quad b(t) = t$$

Lösung
$$\begin{aligned} y(t) &= e^{t^2/2} \left(3 + \int_0^t e^{-s^2/2} s \, ds \right) \\ &= e^{t^2/2} \left(3 + \left[-e^{-s^2/2} \right]_0^t \right) = \\ &= e^{t^2/2} (3 - e^{-t^2/2} + 1) = \\ &= 4e^{t^2/2} - 1. \end{aligned}$$

"
Übung 5: Finden Sie $a \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{cases} y'(t) = a y(t) \\ 2y(0) = y(1) \end{cases}$$

(Achtung: das ist kein Cauchy-Problem!)

Die Lösung der Gleichung ist $y(t) = y(0) e^{at}$.

Die Bedingung gibt

$$2y(0) = y(1) = y(0) e^a$$

Deshalb ist $2 = e^a \iff a = \ln 2$.

Gleichungen mit trennbaren Variablen

$$y'(t) = a(t) b(y(t))$$

mit I, J offene Intervalle, $a \in C(I)$,
 $b \in \text{Lip}_{\text{loc}}(J)$ (lokal
 Lipschitz stetig). Für alle $(t_0, y_0) \in I \times J$
 kann man das entsprechende Cauchy-Problem
 mit Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ lösen.
 Falls $J = \mathbb{R}$ und b sublinear ist, d.h.

$\exists c_1, c_2 > 0 : |b(\xi)| \leq c_1 + c_2 |\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$,
 ist die Lösung des Cauchy-Problems global auf I .

Nehmen wir an, dass $b \in \text{Lip}_{\text{loc}}(J)$ ist
 und y eine Lösung des Cauchy-Problems ist.
 Wenn $b(y_0) = 0$, ist die konstante Lösung
 $y(t) = y_0$ die einzige Lösung des Cauchy-Problems.
 Wenn $b(y_0) \neq 0$, hat man $b(y(t)) \neq 0$
 für alle t . Dann kann man die Gleichung
 umschreiben als:

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t)$$

Bestimmen wir jetzt $J_0 \subset J$ als das größte
 Intervall mit $y_0 \in J_0$, auf dem $b \neq 0$.

Ferner, definieren wir die Stammfunktionen

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds, \quad B(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\xi}{b(\xi)}$$

$$\forall t \in I, \quad \forall \eta \in J_0.$$

Satz Die Lösung von
$$\begin{cases} \eta'(t) = a(t) b(\eta(t)) \\ \eta(t_0) = \eta_0 \end{cases}$$

ist $(B^{-1}(A(t)), I_0)$, wobei I_0 das größte offene Intervall mit $t_0 \in I_0$ und $A(I_0) \subset B(J_0)$ ist.

Beweis. b ist entweder positiv oder negativ. Daher ist B invertibel in J_0 und $\eta(t) = B^{-1}(A(t))$ ist auf I_0 wohl definiert. $\eta(t_0) = B^{-1}(A(t_0)) = B^{-1}(0) = \eta_0$.

$$\begin{aligned} (\eta'(t)) &= (B^{-1}(A(t)))' = (B^{-1})'(A(t)) a(t) = \\ &= \frac{a(t)}{B'(B^{-1}(A(t)))} = \frac{a(t)}{b(\eta(t))}. \end{aligned}$$

Sei jetzt (z, I') eine Lösung des Cauchy-Problems. Für $t > t_0$ hat man

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds = \int_{t_0}^t \frac{z'(s) ds}{b(z(s))} = B(z(t))$$

und deshalb $z(t) = B^{-1}(A(t))$. Das heißt, dass $t \in I_0$ und $z(t) = \eta(t)$. Somit ist η eine Erweiterung von (z, I') . □

Beispiele

1) Zu lösen:
$$\begin{cases} y'(t) = t^2 y^2(t) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^t s^2 ds = \int_3^{y(t)} \frac{dy}{y^2} \iff$$

$$\iff \frac{t^3}{3} = \left[-\frac{1}{y} \right]_3^{y(t)} \iff$$

$$\iff \frac{t^3}{3} = -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{3} \iff$$

$$\iff \frac{1}{y(t)} = \frac{1-t^3}{3} \iff y(t) = \frac{3}{1-t^3}$$

2) Zu lösen:
$$\begin{cases} y'(t) = e^{t+y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^t e^s ds = \int_0^{y(t)} e^{-y} dy \iff e^t - 1 = -e^{-y(t)} + 1 \iff$$

$$\iff e^{-y(t)} = 2 - e^t \iff -y(t) = \ln(2 - e^t) \iff$$

$$\iff y(t) = -\ln(2 - e^t)$$

3) Zu lösen:
$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y^2(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^t 1 ds = \int_1^{y(t)} \frac{dy}{1+y^2} \iff t = \arctan(y(t)) - \arctan 1 \iff$$

$$\iff y(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

"Homogene" Gleichungen

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

Sei $v(t) = y(t)/t$. Dann

$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2} = \frac{f\left(\frac{y(t)}{t}\right) - \frac{y(t)}{t}}{t} \\ &= \frac{f(v(t)) - v(t)}{t}, \end{aligned}$$

die eine Gleichung mit trennbaren Variablen ist.

Beispiel Zu lösen ist $\begin{cases} y'(t) = e^{-y(t)/t} + \frac{y(t)}{t} \\ y(2) = 3 \end{cases}$

Problem für $v(t) = \frac{y(t)}{t}$

$$\begin{cases} v'(t) = \frac{e^{-v(t)} + v(t) - v(t)}{t} = \frac{e^{-v(t)}}{t} \\ v(2) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\int_2^t \frac{ds}{s} = \int_{3/2}^{v(t)} e^v dv \Leftrightarrow \ln t - \ln 2 = e^{v(t)} - e^{3/2}$$

$$\Leftrightarrow e^{v(t)} = \ln t + e^{3/2} - \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(t) = \ln(\ln t + e^{3/2} - \ln 2)$$

$$\Leftrightarrow y(t) = t \ln(\ln t + e^{3/2} - \ln 2).$$

Bernoulli-Gleichung

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y^\alpha(t) \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Nehmen wir an, dass $y(t) > 0$ ist und sei $v(t) = (y(t))^{1-\alpha}$. Dann

$$\begin{aligned} v'(t) &= (1-\alpha) y^{-\alpha}(t) y'(t) = \\ &= (1-\alpha) a(t) y^{1-\alpha}(t) + (1-\alpha) b(t) \\ &= (1-\alpha) a(t) v(t) + (1-\alpha) b(t) \end{aligned}$$

Dann ist $v(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left(v(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(r) dr} (1-\alpha) b(s) ds \right)$

und $y(t) = (v(t))^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Beispiel Zu lösen $\begin{cases} y'(t) = y(t) + e^{-t} y^2(t) \\ y(0) = 2 \end{cases}$

$$v(t) = \frac{1}{y(t)} \Rightarrow \begin{cases} v'(t) = -v(t) - e^{-t} \\ v(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(t) = e^{-t} \left(\frac{1}{2} - \int_0^t e^s e^{-s} ds \right) = e^{-t} \left(\frac{1}{2} - t \right)$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{2e^t}{1-2t}$$

Achtung: diese Lösung gilt für $t < 1/2$.