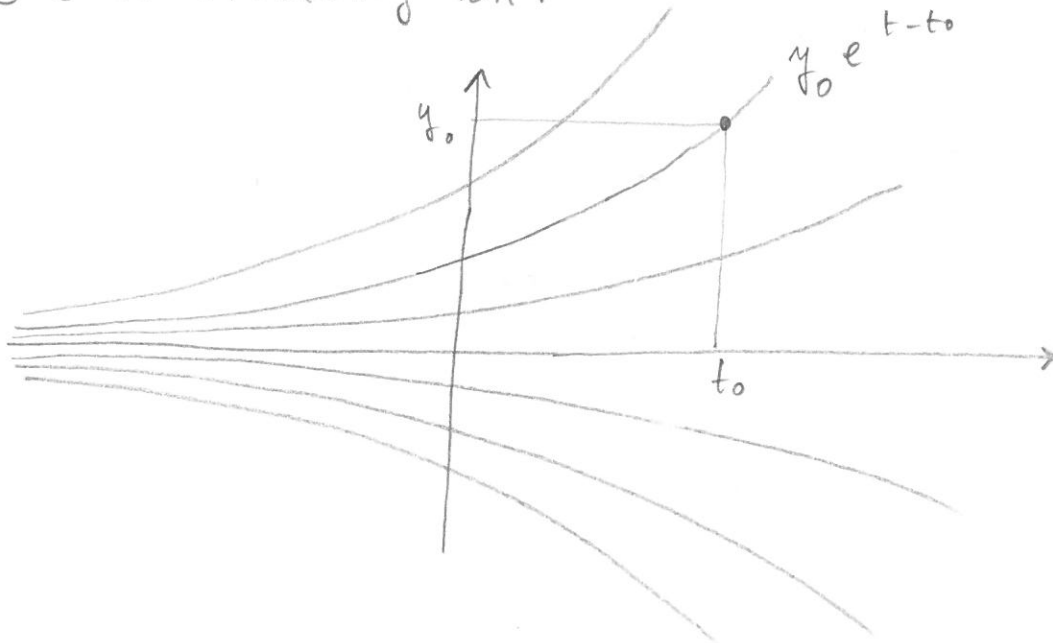


Das Cauchy-Problem

Wir haben schon bemerkt, dass ODEs oft viele Lösungen haben. Z.B. hat die ODE $y'(t) = y(t)$ die Lösungen $y(t) = c e^t$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist:



Wir werden bald zeigen, dass $y_0 e^{t-t_0}$ einzige Lösung von $y'(t) = y(t)$ mit $y(t_0) = y_0$ ist. Allgemein kann man die Lösung einer ODE eindeutig bestimmen, indem man den Wert der Lösung in einem (Zeit) Punkt vorschreibt. Das ist das Cauchy-Problem.

Beispiel: Lösen Sie
$$\begin{cases} y'(t) = y(t) \\ y(2) = 7 \end{cases}$$

Die Lösung ist $y(t) = c e^t$. Um $y(2) = c e^2 = 7$ zu haben, muss $c = 7 e^{-2}$ sein. Die Lösung des Cauchy-Problems ist dann $y(t) = 7 e^{t-2}$.

Seien $U \subset \mathbb{R}^{1+N}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^N$ und $(t_0, \vec{y}_0) \in U$ gegeben.

Definition Wir nennen $(\vec{y}, I)$ eine lokale Lösung des Cauchy Problem, falls $t_0 \in I$, $\vec{y}: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ ist differenzierbar, $(t, \vec{y}(t)) \in U \ \forall t \in I$ und

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = f(t, \vec{y}(t)) \quad \forall t \in I, \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0. \end{cases}$$

Satz (Peano) Sei f stetig. Dann hat das Cauchy-Problem eine lokale Lösung.

Definition $f: U \rightarrow \mathbb{R}^N$ ist lokal Lipschitz stetig in $(t_0, \vec{y}_0)$, wenn $\exists \eta > 0, \exists L > 0$, sodass

$$\|f(t, \vec{y}) - f(t, \vec{z})\| \leq L \|\vec{y} - \vec{z}\|$$

$$\forall t: |t - t_0| \leq \eta, \forall \vec{y}, \vec{z}: \|\vec{y} - \vec{y}_0\|, \|\vec{z} - \vec{y}_0\| \leq \eta.$$

Bemerkung $f \in C^1(U; \mathbb{R}^N) \Leftrightarrow f$ lokal Lipschitz stetig in $U \Leftrightarrow f \in C(U; \mathbb{R}^N)$

Satz (Picard-Lindelöf) Sei f lokal Lipschitz stetig in $(t_0, \vec{y}_0)$. Dann hat das Cauchy-Problem eine lokale Lösung (η, I) , die einzig ist, in der Menge der lokalen Lösungen auf I .

Gegenbeispiel (Peano's Schurbar)

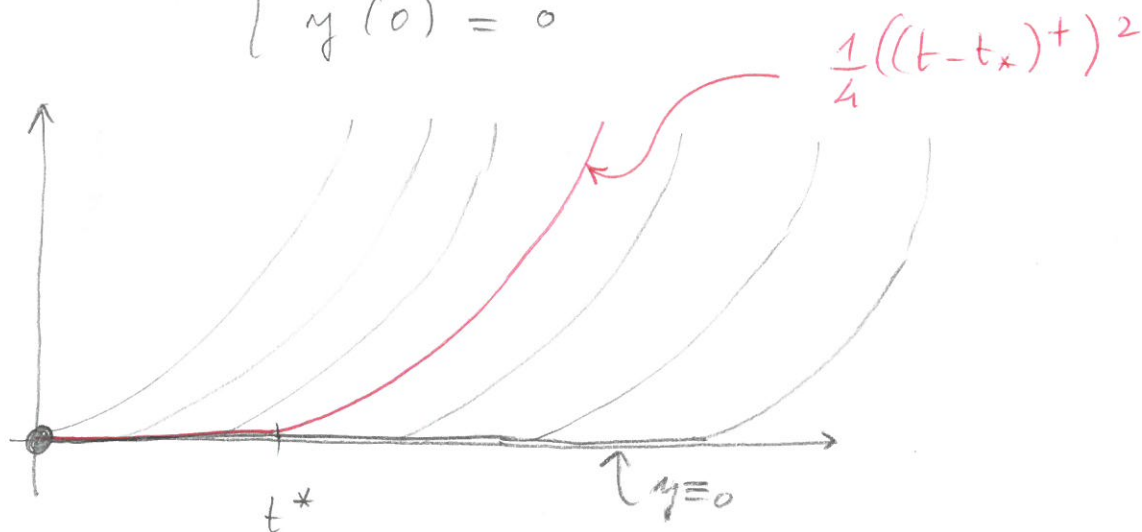
Für $\vec{f}$ stetig aber nicht lokal Lipschitz
stetig in $(t_0, \vec{y}_0)$ kann man keine Eindeutig-
keit erwarten!

Seien $f(y) = \sqrt{y^+}$, $t_0 = 0$, $y_0 = 0$.

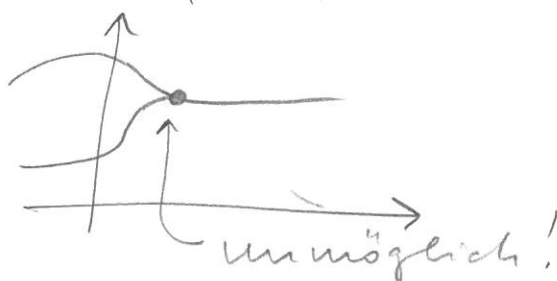
Dann ist $y(t) = 0$ sowie $y(t) = \frac{1}{4}((t - t_*)^+)^2$
für alle $t_* \geq 0$ Lösungen des

Cauchy-Problems

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y^+(t)} & \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$



Bemerkung Falls f in allen Punkten lokal
Lipschitz stetig ist, können die Lösungen
der Gleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ sich nicht
überschneiden



"Übung (Qualitatives Cauchy-Problem.)

Betrachten Sie das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(y(t)) & \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ohne das Problem zu lösen, zeigen Sie folgende

- 1) $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ und ist Lipschitz;
- 2) $y_0 \in (0, \pi) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \pi$;
- 3) $y_0 \in (0, \pi/2) \Rightarrow y$ Konvex auf $(-\infty, 0]$;
- 4) $y_0 = \pi/2 \Rightarrow y''(0) = 0, y'''(0) = -1$.

Lösung:

Ad 1) $y \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow \sin(y) \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow y' \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow y \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \sin(y) \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow y' \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow y \in C^2(\mathbb{R}) \dots \Rightarrow y \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$\|y'\|_\infty := \sup_t |y'(t)| = \sup_t |\sin(y(t))| \leq 1$$

Daher ist y Lipschitz mit Lipschitz-Konstante 1.

Ad 2) $y_1 \equiv 0$ und $y_2 \equiv \pi$ sind Lösungen der Gleichung. Da $\sin$ Lipschitz ist, werden wir

bald sehen, dass die Lösung des Cauchy-Problems eindeutig ist. Damit kann y die zwei konstante Lösungen y_1 und y_2 nicht überschneiden. Deshalb ist y beschränkt zwischen 0 und π .

Andererseits: $y(t) \in [0, \pi] \Rightarrow \sin(y(t)) \geq 0$
 $\Rightarrow y'(t) \geq 0$ somit ist y steigend. Das impliziert, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = l \in [y_0, \pi]$.

○ Nehmen wir an, dass $l \neq \pi$. Dann
 $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sin(y(t)) = \sin(l) > 0$
 was ein Widerspruch liefert. So muss $l = \pi$.

Ad 3) Berechnen wir $y''(t) = \cos(y(t)) y'(t)$
 Da $y' \geq 0$ hat man $y(t) \leq y_0 < \pi/2$ für $t \in (-\infty, 0]$. Deshalb $\cos(y(t)) \geq 0$ für $t \in (-\infty, 0]$
 und $y''(t) = \underbrace{\cos(y(t))}_{\geq 0} \underbrace{y'(t)}_{\geq 0} \geq 0$ für $t \in (-\infty, 0]$.

Ad 4) Man hat $y'(0) = \sin(y_0) = \sin(\pi/2) = 1$,
 $y''(0) = \cos(y_0) y'(0) = \cos(\pi/2) \cdot 1 = 0$,
 $y'''(t) = -\sin(y(t)) (y'(t))^2 + \cos(y(t)) y''(t)$
 $y'''(0) = -\sin(\pi/2) (y'(0))^2 + \cos(\pi/2) y''(0) = -1$.

Beispiel (Cauchy-Problem für Systeme. Regel:
N-System der ersten Ordnung $\Rightarrow$ N Anfangsbedingungen).

Lösen wir:

$$\begin{cases} y_1'(t) = 3y_1(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 5 \end{cases} \quad \text{Anfangsbedingung}$$

Man hat $y_1(t) = c_1 e^{3t}$. Die Anfangsbedingung $y_1(0) = 2$ ergibt $c_1 = 2$. Somit ist $y_1(t) = 2e^{3t}$.

Die zweite Gleichung ist $y_2'(t) = 2e^{3t} + y_2(t)$.

Wir werden später beweisen, dass die Lösung dieser Gleichung ist:

$$y_2(t) = c_2 e^t + e^{3t}$$

Jetzt benutzen wir die Anfangsbedingung $y_2(0) = 5$ und wir finden

$$y_2(0) = c_2 + 1 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = 4$$

Die gesamte Lösung des Cauchy-Problem ist

$$\begin{cases} y_1(t) = 2e^{3t} \\ y_2(t) = 4e^t + e^{3t} \end{cases}$$

Beispiel (Cauchy-Problem für Gleichungen der höheren Ordnung: Regel: Gleichung der n -ten Ord. $\iff$ n Anfangsbedingungen)

lösen wir
$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

- Wir werden später beweisen, dass die Lösung der Gleichung ist

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Die erste Anfangsbedingung gibt

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 \equiv 0.$$

- Die zweite Anfangsbedingung gibt

$$y'(0) = -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = c_2 \equiv 3.$$

Die Lösung des Cauchy-Problem ist:

$$y(t) = 3 \sin t.$$

Satz (Banach Kontraktionsprinzip) Sei der metrische Raum (X, d) vollständig und sei $S: X \rightarrow X$ eine Kontraktion $[\exists k \in (0, 1): d(S(x), S(y)) \leq k d(x, y) \quad \forall x, y \in X]$.

Dann hat S genau einen Fixpunkt $[S(x) = x]$.

Beweis (Eindeutigkeit) Seien x_1 und x_2 Fixpunkte mit $x_1 \neq x_2$. Dann $d(x_1, x_2) = d(S(x_1), S(x_2)) < d(x_1, x_2)$,
 ein Widerspruch.

(Existenz) Sei $x_0 \in X$ fix und beliebig und definiert man $x_1 = S(x_0)$, $x_2 = S(x_1)$, ..., $x_n = S(x_{n-1})$. Da $d(x_n, x_{n-1}) \leq k d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq k^{n-1} d(x_1, x_0)$,

hat man

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{i=n+1}^{n+p} d(x_i, x_{i-1}) \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} k^{i-1} d(x_1, x_0) \\ &= d(x_1, x_0) k^n \frac{k^p}{1-k} \xrightarrow{n, p \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Da x_n eine Cauchy-Folge ist und X vollständig ist, hat man $x_n \rightarrow x$. Ferner $S(x_n) \rightarrow S(x)$, da S Lipschitz stetig ist. Damit hat man

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = S(x)$$

und x ist der Fixpunkt von S . $\square$

Satz. Sei $\bar{I} \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist $C(\bar{I}; \mathbb{R}^N)$ ein Banach Raum (insbesondere vollständig) mit der Norm $\|\vec{y}(\cdot)\|_\infty = \sup \{ \|\vec{y}(t)\| : t \in \bar{I} \}$.

Beweis: Sei $\vec{y}_m(\cdot)$ eine Cauchy-Folge:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_\varepsilon \forall t \in \bar{I}: \|\vec{y}_m(t) - \vec{y}_n(t)\| < \varepsilon.$$

Dann ist $\vec{y}_n(t)$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^N$, für

alle $t \in \bar{I}$. Deshalb findet man den Limes $\vec{y}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{y}_n(t)$ für alle $t \in \bar{I}$.

In dem man $m \rightarrow \infty$ in (*) nimmt, findet man

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\varepsilon \forall t \in \bar{I}: \|\vec{y}_n(t) - \vec{y}(t)\| \leq \varepsilon$$

Somit konvergiert $\vec{y}_n(\cdot) \rightarrow \vec{y}(\cdot)$ gleichmäßig.

Da $\vec{y}_n \in C(\bar{I}; \mathbb{R}^N)$ muss auch $\vec{y} \in C(\bar{I}; \mathbb{R}^N)$. $\square$

Da abgeschlossene Mengen eines vollständigen metrischen Raum noch vollständig sind, ist

$$X = \{ \vec{y} \in C(\bar{I}; \mathbb{R}^N) : \|\vec{y}(\cdot) - \vec{y}_0\|_\infty \leq \eta \}$$

für gegebene $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^N$ und $\eta \geq 0$ ein vollständiger metrischer Raum mit der Distanz

$$d(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|_\infty.$$

Beweis vom Satz von Picard-Lindelöf

Seien $M = \max \{ \|\vec{f}(t, \vec{y})\| : |t - t_0| \leq \eta, \|\vec{y} - \vec{y}_0\| \leq \eta \}$
 $0 < \delta < \min \{ \eta, \eta/(2M), 1/(2L) \}, I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$
 $X = \{ \vec{y} \in C(\bar{I}; \mathbb{R}^N) : \|\vec{y} - \vec{y}_0\|_\infty \leq \eta \}.$

Definieren wir $S: X \rightarrow C(\bar{I}; \mathbb{R}^N)$ durch

$$S(\vec{y})(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(s, \vec{y}(s)) ds \quad \forall t \in \bar{I}.$$

1) Man hat, dass $S(X) \subset X$, da

$$\begin{aligned} \|S(\vec{y}) - \vec{y}_0\|_\infty &= \left\| \int_{t_0}^{\cdot} \vec{f}(s, \vec{y}(s)) ds \right\|_\infty \\ &\leq \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} \|\vec{f}(\cdot, \vec{y}(\cdot))\|_\infty ds \leq 2\delta M \leq \eta. \end{aligned}$$

2) $S: X \rightarrow X$ ist eine Kontraktion:

$$\begin{aligned} \|S(\vec{y}_1) - S(\vec{y}_2)\|_\infty &= \left\| \int_{t_0}^{\cdot} \vec{f}(s, \vec{y}_1(s)) - \vec{f}(s, \vec{y}_2(s)) ds \right\|_\infty \\ &\leq \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} \|\vec{f}(\cdot, \vec{y}_1(\cdot)) - \vec{f}(\cdot, \vec{y}_2(\cdot))\|_\infty ds \\ &\leq \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} L \|\vec{y}_1(\cdot) - \vec{y}_2(\cdot)\|_\infty ds = \underbrace{2\delta L}_{< 1} \|\vec{y}_1(\cdot) - \vec{y}_2(\cdot)\|_\infty \end{aligned}$$

Dann hat S einen Fixpunkt $\vec{y} \in C(\bar{I}; \mathbb{R}^N)$. Er löst

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(s, \vec{y}(s)) ds \quad \forall t \in \bar{I}.$$

Daraus folgt, dass $\vec{y} \in C^1(\bar{I}; \mathbb{R}^N)$,

$$\vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)) \quad \forall t \in I \quad \text{und} \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0.$$

Deshalb ist $(\vec{y}, I)$ eine lokale Lösung des Cauchy-Problems. $\square$

Satz (Ascoli-Arzelà) Seien $\vec{y} \in C(\bar{I}; \mathbb{R}^N)$ gleichmäßig beschränkt $[\exists M > 0 \forall t \in \bar{I} \forall n: \|\vec{y}_n(t)\| \leq M]$ und gleichgradig stetig $[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n \forall t, s \in \bar{I}: |t-s| < \delta \Rightarrow \|\vec{y}_n(t) - \vec{y}_n(s)\| < \varepsilon]$.

Dann gibt es eine gleichmäßige konvergente Teilfolge $\vec{y}_{n_k}$.

Beweis Seien $t_i, i \in \mathbb{N}$ dicht in $\bar{I}$, $\vec{y}_{1,n}$ eine Teilfolge von $\vec{y}_n$ mit $\vec{y}_{1,n}(t_1)$ konvergent, $\vec{y}_{2,n}$ eine Teilfolge von $\vec{y}_{1,n}$ mit $\vec{y}_{2,n}(t_2)$ konvergent und so weiter. Die Diagonal-Teilfolge $\vec{y}_{n_k} := \vec{y}_{k,k}$ konvergiert in allen t_i . Checken wir, dass sie gleichmäßig konvergent ist.

Nehmen wir $\varepsilon > 0$ und wählen wir $\delta > 0$, sodass $|t-s| < \delta \Rightarrow \|\vec{y}_n(t) - \vec{y}_n(s)\| < \frac{\varepsilon}{3} \forall n$. Sei $M > 0$ groß genug, sodass $\min_{i=1, \dots, M} |t - t_i| < \delta \forall t \in \bar{I}$ und $N > 0$ groß genug, sodass

$$\|\vec{y}_{n_k}(t_i) - \vec{y}_{n_{k'}}(t_i)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k, k' > N, \quad \forall i \leq M.$$

Sei jetzt $t \in \bar{I}$ gegeben. Dann existiert t_i mit $i \leq M$, sodass $|t - t_i| < \delta$ ist. Dann

$$\begin{aligned} \|\vec{y}_{n_k}(t) - \vec{y}_{n_{k'}}(t)\| &\leq \|\vec{y}_{n_k}(t) - \vec{y}_{n_k}(t_i)\| + \|\vec{y}_{n_k}(t_i) - \vec{y}_{n_{k'}}(t_i)\| \\ &\quad + \|\vec{y}_{n_{k'}}(t_i) - \vec{y}_{n_{k'}}(t)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \\ &\quad \forall k, k' > N. \end{aligned}$$

Die Teilfolge $\vec{y}_{n_k}$ ist deshalb eine Cauchy-Folge. Da $C(\bar{I}; \mathbb{R}^N)$ komplett ist, konvergiert $\vec{y}_{n_k}$ gleichmäßig. $\square$

Beispiele

- 1) $y_n(t) = \sin(t+n)$, $t \in [0, 1]$, sind gleichgradig stetig, da

$$|y_n(t) - y_n(s)| \leq |t - s|.$$

(Man kann $\delta = \varepsilon$ nehmen)

- 2) $\vec{y}_n \in C(\bar{I}; \mathbb{R}^N)$ Lipschitz-stetig mit Konstante $L > 0$ (von n unabhängig) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{y}_n$ gleichgradig stetig.

(Man nimmt $\delta = \varepsilon/L$).

- 3) $y_n(t) = t^{1/n}$, $t \in [0, 1]$, sind nicht gleichgradig stetig: $\forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists n$, sodass $(2\varepsilon)^n < \delta$. Sei dann $t = (2\varepsilon)^n$.
Man hat

$$|y_n(t) - y_n(0)| = |t^{1/n} - 0^{1/n}| = 2\varepsilon > \varepsilon$$

Bemerkung Seien $\vec{y}_n \in C([0, 1]; \mathbb{R}^N)$ mit $\vec{y}_n \rightarrow \vec{y}$ gleichmäßig, $t > 0$ und $\delta_n \rightarrow 0$.
Dann $\vec{y}_n(t - \delta_n) \rightarrow \vec{y}(t)$.

Das ist definiert, sobald $t - \delta_n \geq 0$ ist.

Beweis (Satz von Peano).

Sei $K \subset U$ kompakt mit $(t_0, \vec{y}_0) \in \text{int } K$ und $M := \max_K |\vec{f}|$. Sei $\delta > 0$ so klein, dass

$[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_{\delta M}(\vec{y}_0) \subset K$. Definieren wir $I_{n,i} = [t_0 + (i-1)\frac{\delta}{n}, t_0 + i\frac{\delta}{n}]$, $i=0, \dots, n$ und $\vec{y}_n(t) = \vec{y}_0$ auf $I_{n,0}$ und $\vec{y}_n(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(s, \vec{y}_n(s - \frac{\delta}{n})) ds$ auf $I_{n,i}$, für $i=1, \dots, n$. Alle $\vec{y}_n$ sind in $C([t_0, t_0 + \delta]; \mathbb{R}^N)$. Man kann (induktiv auf n) zeigen, dass

$|\vec{y}_n(t) - \vec{y}_0| \leq \left| \int_{t_0}^t \vec{f}(s, \vec{y}_n(s - \frac{\delta}{n})) ds \right| \leq \delta M \quad \forall t \in I$
 sodass $(t, \vec{y}_n(t)) \in K$, $\forall t \in [t_0, t_0 + \delta] \quad \forall n$ und $\vec{y}_n$ gleichmäßig beschränkt sind. Ferner hat man

$$|\vec{y}_n(t) - \vec{y}_n(s)| \leq \left| \int_s^t \vec{f}(r, \vec{y}_n(r - \frac{\delta}{n})) dr \right| \leq M |t - s|$$

$\forall t, s \in [t_0, t_0 + \delta] \quad \forall n$.

Deshalb sind die $\vec{y}_n$ gleichmäßig stetig.

Gemäß Ascoli-Arzelà-Satz gibt es $\vec{y}_n \rightarrow \vec{y} \in C(I; \mathbb{R}^N)$ gleichmäßig. Da $\vec{f}(t, \vec{y}_{n_k}(t - \delta/n_k)) \rightarrow \vec{f}(t, \vec{y}(t))$, $\forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$, und der Dominante-Konvergenz-Satz gilt, dass

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= \lim_k \vec{y}_{n_k}(t) = \lim_k \left(\vec{y}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(s, \vec{y}_{n_k}(s - \frac{\delta}{n_k})) ds \right) = \\ &= \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(s, \vec{y}(s)) ds. \end{aligned}$$

Der Fundamentalsatz sagt, dass $\vec{y} \in C^1((t_0, t_0 + \delta); \mathbb{R}^N)$ ist und dass $\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y})$ für $t \in [t_0, t_0 + \delta)$. Das Argument für $t \in (t_0 - \delta, t_0]$ ist ähnlich. $\square$