

Satz (Instabilität, nichtlinearer Fall)

Sei $\vec{l}$ ein isolierter stationärer Punkt von $\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y})$. Falls $D\vec{f}(\vec{l})$ einen Eigenwert mit positivem Realteil hat, ist $\vec{l}$ instabil.

Beispiel Betrachten wir $\vec{y}' = (y_1 y_2 - 1, y_1 - y_2)$.

Stationäre Punkte:

$$\begin{cases} y_1 y_2 = 1 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \iff \vec{y} = (1, 1) \text{ oder } \vec{y} = (-1, -1).$$

○ Berechnen wir $D\vec{f}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} y_2 & y_1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Wir haben

$$D\vec{f}(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D\vec{f}(-1, -1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{2} \text{ (Sattel)}$$

instabil

$$\downarrow$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i \text{ (stab. Strudel)}$$

stabil

Beispiel Betrachten wir die Stabilität der

○ stationären Lösungen von $y' = \sin(y)$.

Stationäre Punkte $\sin(y) = 0 \iff y = k\pi$

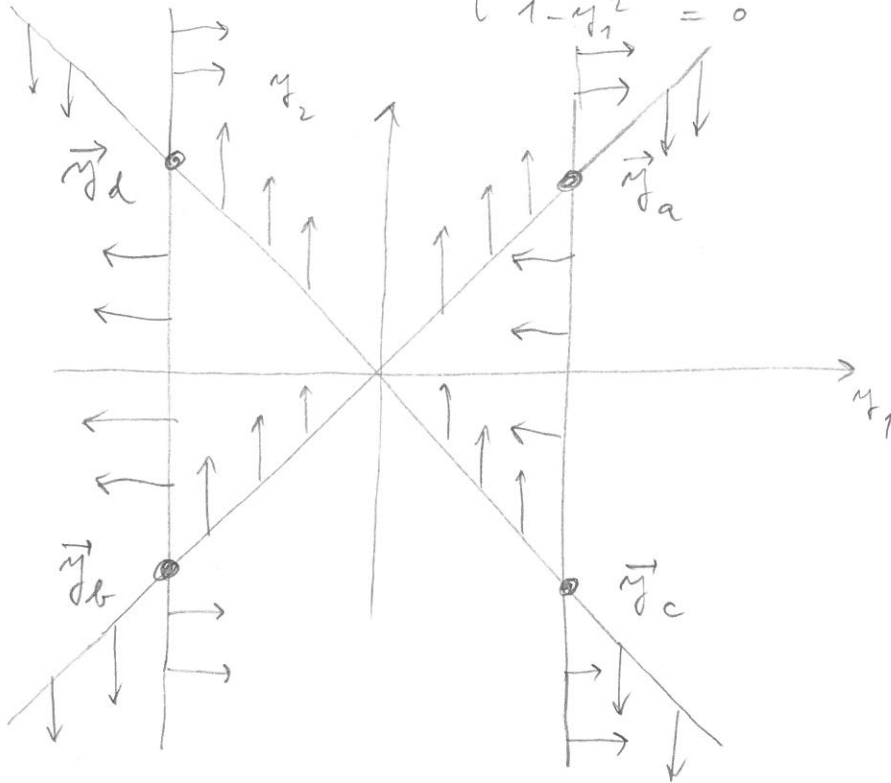
$$\text{Da } (\sin(y))' \Big|_{y=k\pi} = \cos(y) \Big|_{k\pi} = \begin{cases} 1 & k \text{ gerade} \\ -1 & k \text{ ungerade} \end{cases},$$

sind die Punkte $y = 2m\pi$ instabil und die

Punkte $y = (2m+1)\pi$ stabil.

Übung Betrachten Sie die Stabilität der stationären Lösungen von $\vec{y}' = (y_1', y_2') = (y_2^2 - y_1^2, 1 - y_1^2)$

Station. Lösungen : $\begin{cases} y_2^2 - y_1^2 = 0 \\ 1 - y_1^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \pm y_2 \\ y_1 = \pm 1 \end{cases}$



$$\vec{y}_a = (1, 1)$$

$$\vec{y}_b = (-1, -1)$$

$$\vec{y}_c = (1, -1)$$

$$\vec{y}_d = (-1, -1)$$

Stabilität : $D\vec{f}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} -2y_1 & 2y_2 \\ -2y_1 & 0 \end{pmatrix}$

$$D\vec{f}(\vec{y}_a) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} [\det > 0, \text{tr} < 0] \Rightarrow \vec{y}_a \text{ asymp. stab. (stab. Strudel)}$$

$$D\vec{f}(\vec{y}_b) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} [\det > 0, \text{tr} > 0] \Rightarrow \vec{y}_b \text{ instabil (instab. Strudel)}$$

$$D\vec{f}(\vec{y}_c) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} [\det < 0] \Rightarrow \vec{y}_c \text{ instabil (Sattel)}$$

$$D\vec{f}(\vec{y}_d) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} [\det < 0] \Rightarrow \vec{y}_d \text{ instabil (Sattel)}$$

Übung Betrachten Sie die Stabilität der stationären Lösungen von $y' = y^2(1-y^2)$

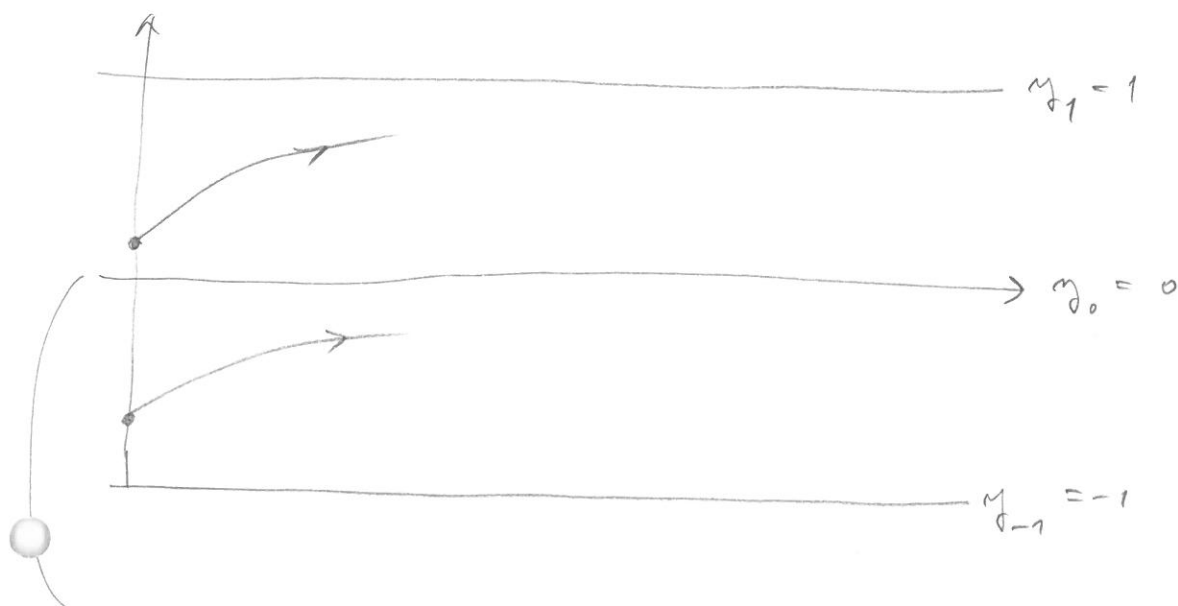
Stat. Lösungen: $y^2(1-y^2) = 0 \iff y_0 = 0, y_1 = 1, y_{-1} = -1$

Stabilität: $f(y) = y^2(1-y^2), f'(y) = 2y - 4y^3$

$f'(y_1) = 2 - 4 = -2 \implies y_1$ ist stabil

$f'(y_{-1}) = -2 + 4 = 2 \implies y_{-1}$ ist instabil

○ $f'(y_0) = 0 \implies$ Keine Aussage vom Satz.



Falls $y(0) > 0$ ist y strikt monoton wachsend.
Deshalb ist y_0 instabil.

Beispiel Betrachten wir die Stabilität der stationären Lösungen von

$$\vec{y}' = (y_1 (y_1^2 + y_2^2 - 1), y_2 (y_1^2 + y_2^2 - 1))$$

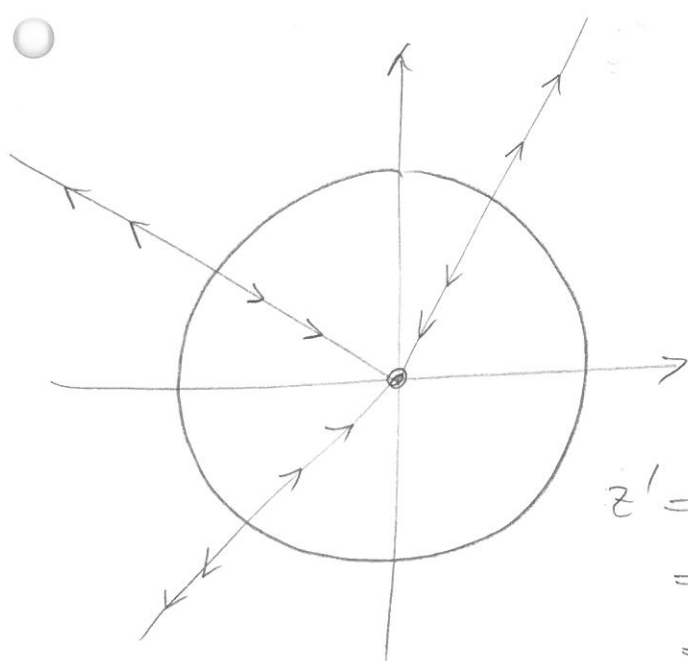
Station. Lösungen: $\vec{y}_0 = \vec{0}$ und $\vec{y}_0 = (\cos \theta, \sin \theta)$

$$D\vec{f}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} y_1^2 + y_2^2 - 1 + 2y_1^2 & 2y_1 y_2 \\ 2y_1 y_2 & y_1^2 + y_2^2 - 1 + 2y_2^2 \end{pmatrix}$$

$$D\vec{f}(\vec{y}_0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}_0 \text{ asymptotisch stabil}$$

Da $\vec{y}_0$ nicht isoliert sind, kann man den Satz für $\vec{y}_0$ nicht verwenden!

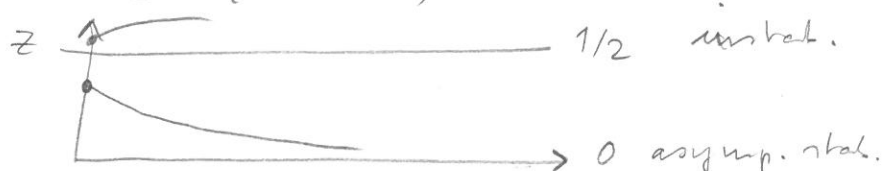
Graphische Analyse:



$\vec{y}_0$ asymptotisch stabil
 $\vec{y}_0$ instabil

Da $\vec{f} \parallel \vec{y}$ kann man $z = \|\vec{y}\|^2/2$ betrachten:

$$\begin{aligned} z' &= \vec{y} \cdot \vec{y}' = \vec{y} \cdot \vec{f}(\vec{y}) = \\ &= \vec{y} \cdot \vec{y} (\|\vec{y}\|^2 - 1) = \|\vec{y}\|^2 (\|\vec{y}\|^2 - 1) \\ &= 2z(2z - 1) \end{aligned}$$



Liapunov - Stabilität

Die Stabilität von stationären Lösungen von autonomen Systemen kann manchmal durch die Liapunov - Stabilität Methode analysiert werden:

Beispiel 0 ist eine asympt. stabile stationäre Lösung von $y' = -y^3$, da die Liapunov - Funktion $V(y) = y^4$ erfüllt:

$$\begin{aligned} V(y(t))' &= (y^4(t))' = 4y^3(t) y'(t) \\ &= -4y^6(t) < 0 \end{aligned}$$

$\uparrow$ $y' = -y^3$ $\uparrow$ $y \neq 0$

Damit ist $t \mapsto y^4(t)$ strikt fallend. Deshalb ist $y(t) \rightarrow 0$

Satz (Liapunov) Sei $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ und $\vec{l}$ eine isolierte stationäre Lösung von $\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y})$. Falls $U_{\vec{l}}$ und $V: U_{\vec{l}} \rightarrow \mathbb{R}$ existieren mit $V \in C(U_{\vec{l}})$, V differenzierbar in $U_{\vec{l}} \setminus \{\vec{l}\}$, $V(\vec{l}) = 0$, $V > 0$ in $U_{\vec{l}} \setminus \{\vec{l}\}$ und $\nabla V(\vec{y}) \cdot \vec{f}(\vec{y}) \leq 0$ für $\vec{y} \in U_{\vec{l}} \setminus \{\vec{l}\}$, ist $\vec{l}$ stabil und V heißt Liapunov - Funktion (zu $\vec{l}$ assoziiert). Ferner, falls $\nabla V(\vec{y}) \cdot \vec{f}(\vec{y}) < 0$ für $\vec{y} \in U_{\vec{l}} \setminus \{\vec{l}\}$ ist $\vec{l}$ asymptotisch stabil.

Beweis Sei $\vec{a} \in U_{\vec{e}}$ und $\vec{y}_{\vec{a}}$ die Lösung von $\vec{y}'_{\vec{a}} = \vec{f}(\vec{y}_{\vec{a}})$ und $\vec{y}_{\vec{a}}(0) = \vec{a}$. Für $t > 0$ klein hat man $\vec{y}_{\vec{a}} \in U_{\vec{e}}$ und

$$\begin{aligned} (V(\vec{y}_{\vec{a}}(t)))' &= \nabla V(\vec{y}_{\vec{a}}(t)) \cdot \vec{y}'_{\vec{a}}(t) = \\ &= \nabla V(\vec{y}_{\vec{a}}(t)) \cdot \vec{f}(\vec{y}_{\vec{a}}(t)) \leq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Seien $\bar{B}_r(\vec{e}) \subset U_{\vec{e}}$ und $\alpha = \min_{\bar{B}_r(\vec{e})} V > 0$ und definieren wir $W = \{ \vec{y} \in \bar{B}_r(\vec{e}) : V(\vec{y}) < \alpha \}$. Die Menge W ist offen, da V stetig ist, und $\vec{e} \in W$. Für alle $\vec{a} \in W$ bleibt $\vec{y}_{\vec{a}}(t) \in W \quad \forall t > 0$, wegen (8). Damit ist $\vec{e}$ stabil.

Falls $\nabla V(\vec{y}) \cdot \vec{f}(\vec{y}) < 0$ für $\vec{y} \in U_{\vec{e}} \setminus \{\vec{e}\}$ kann man durch Widerspruch zeigen, dass $\vec{y}_{\vec{a}}(t) \rightarrow \vec{e} \quad \forall \vec{a} \in W$ (und damit ist $\vec{e}$ asymptotisch stabil). Nehmen wir an, dass $\vec{a} \in W$ existiert, somit $\vec{y}_{\vec{a}}(t) \not\rightarrow \vec{e}$ und sei und $t_n \rightarrow \infty$ gegeben, mit $\vec{y}_{\vec{a}}(t_n) \rightarrow \vec{z} \neq \vec{e}$.

Die Laufbahnen $\vec{y}_n(t) := \vec{y}_{\vec{a}}(t + t_n)$ lösen $\vec{y}'_n = \vec{f}(\vec{y}_n)$ und $\vec{y}_n(0) = \vec{y}_{\vec{a}}(t_n)$. Damit $\vec{y}_n \rightarrow \vec{y}_{\vec{z}}$ gleichmäßig auf Kompakten von $\mathbb{R}$. Da

$$V(\vec{y}_{\vec{z}}(1)) < V(\vec{z}) < V(\vec{y}_{\vec{a}}(t_n)) < V(\vec{y}_{\vec{a}}(1))$$

Kann man den Limes $n \rightarrow \infty$ nehmen und findet man

$$V(\vec{y}_{\vec{z}}(1)) < V(\vec{z}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} V(\vec{y}_n(1)) = V(\vec{y}_{\vec{z}}(1))$$

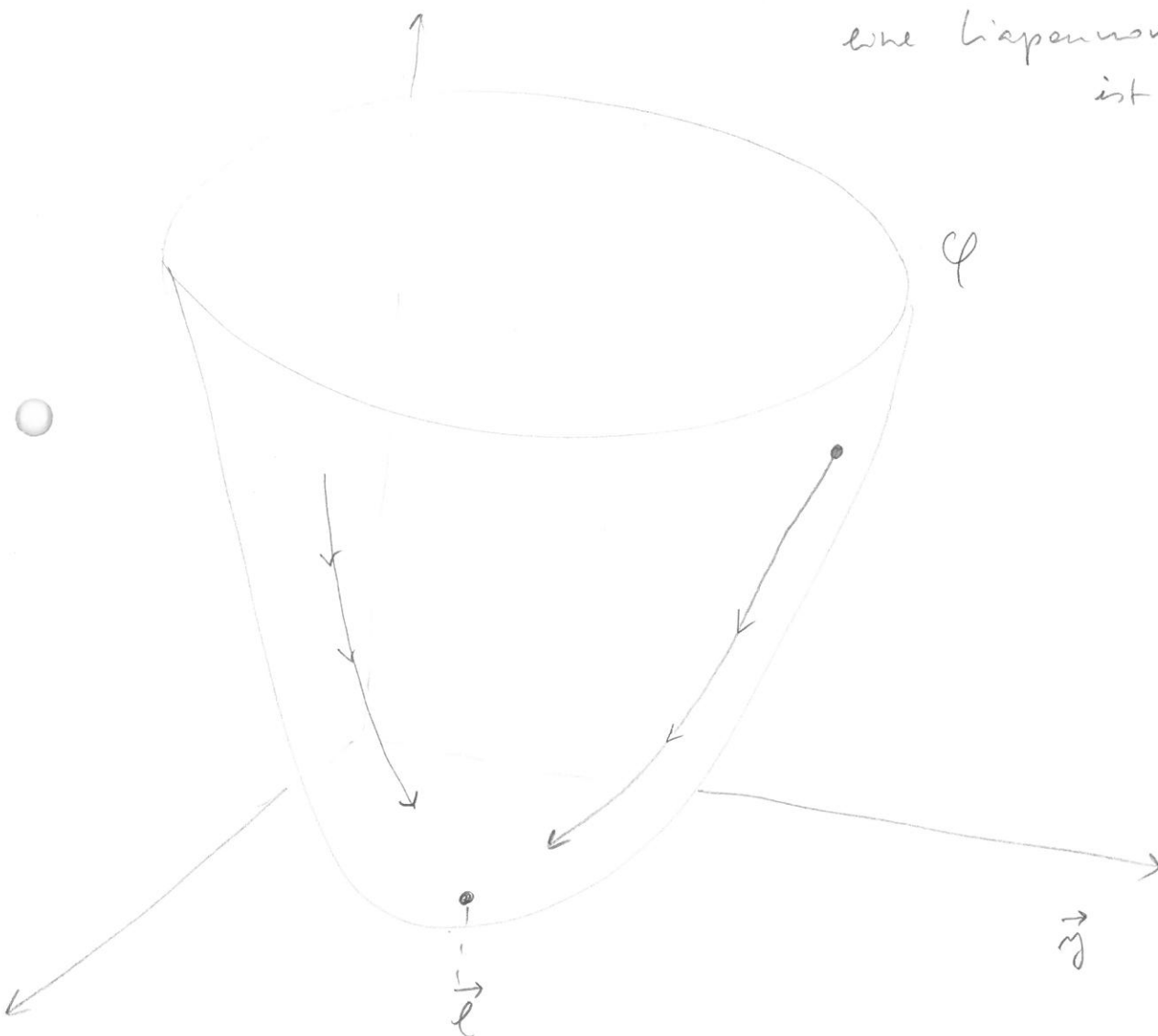
was ein Widerspruch ist. $\square$

Beispiel (Gradienten-Flux) Betrachten wir $\vec{y}' = -\nabla\varphi(\vec{y})$
 wo $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ glatt ist. Kritische Punkte von φ sind
 stationäre Lösungen des Systems.

Sei $\vec{\ell}$ ein strikter lokaler Minimumpunkt von φ .
 Dann ist $\varphi(\vec{y}) > \varphi(\vec{\ell})$ in einer Umgebung $U_{\vec{\ell}}$.
 Ferner hat man

$$\varphi(\vec{y})' = \nabla\varphi(\vec{y}) \cdot \vec{y}' = -\|\nabla\varphi(\vec{y})\|^2 < 0$$

- für alle $\vec{y} \in U_{\vec{\ell}} \setminus \{\vec{\ell}\}$. Damit ist $\vec{\ell}$
 asymptotisch stabil, da $y \mapsto V(\vec{y}) = \varphi(\vec{y}) - \varphi(\vec{\ell})$
 eine Liapunov-Funktion
 ist



Anwendung Betrachten wir die Stabilität der stationären Lösungen von

$$(\eta_1', \eta_2') = - \underbrace{(\eta_1^3 (\eta_1^4 + \eta_2^4), \eta_2^3 (\eta_1^4 + \eta_2^4))}_{\vec{f}(\eta_1, \eta_2)}.$$

Stationäre Lösung: $(\eta_1, \eta_2) = \vec{0}$

○ $D\vec{f}(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leadsto$ keine Aussage vom Kriterium möglich.

Allerdings ist $\vec{f}(\eta_1, \eta_2) = -\nabla\varphi(\eta_1, \eta_2)$,
wobei

$$\varphi(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{4} (\eta_1^4 + \eta_2^4).$$

und $V(\eta_1, \eta_2) = \varphi(\eta_1, \eta_2)$ ist eine
Ljapunov-Funktion, da $V \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$,

○ $V(\vec{0}) = 0, \quad V(\vec{\eta}) \neq 0$ falls $\vec{\eta} \neq \vec{0}$. Da

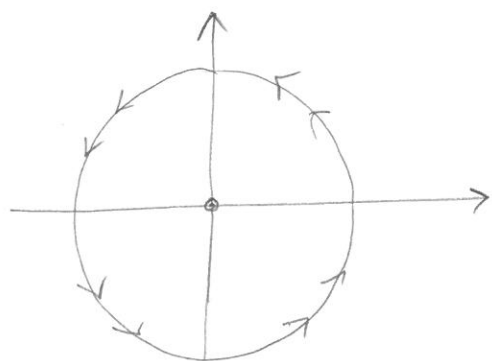
$$\nabla V(\eta_1, \eta_2) \cdot \vec{f}(\eta_1, \eta_2) = -(\eta_1^6 + \eta_2^6)(\eta_1^4 + \eta_2^4) < 0$$

für alle $(\eta_1, \eta_2) \neq 0$, ist $\vec{0}$ asymp. stabil.

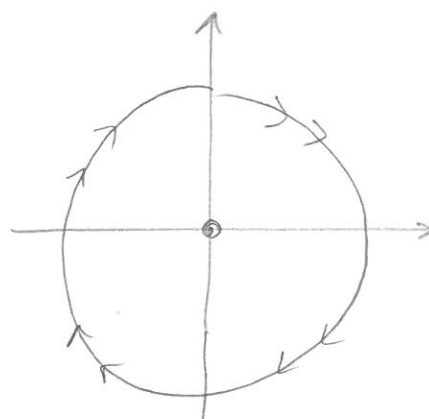
Ein überraschendes Beispiel

Betrachten wir $(\varepsilon > 0)$ $\vec{y}'_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \vec{y}_A$ und $\vec{y}'_B = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}}_B \vec{y}_B$

In beiden Fällen ist $\vec{0}$ ein Zentrum



+

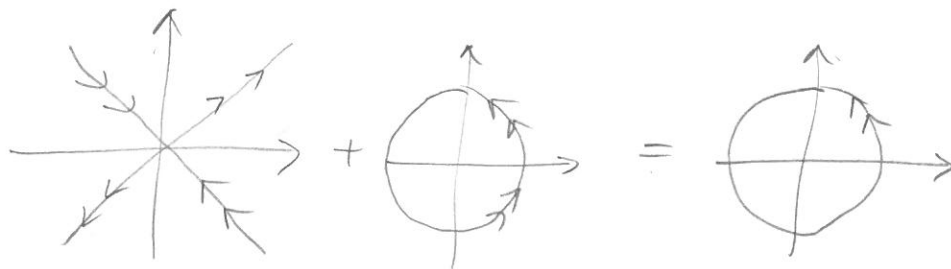


?

Allerdings ist $\vec{0}$ für $\vec{y}' = (A+B) \vec{y}$ instabil!

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Sattel}$$

Andererseits ist: $\underbrace{(A+B)}_{\text{instabil}} + \underbrace{(-B)}_{\text{stabil}} = \underbrace{A}_{\text{stabil}}!$



Moral: stabil + stabil $\not\Rightarrow$ stabil
 instabil + stabil $\not\Rightarrow$ instabil
 (Turvey, 1952)